$\mathbb{F}$ σώμα , $\mathbb{F} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$Mat_{n\times m}(\mathbb{F}) = \{$ πίνακες $n \times m$ με συντελεστές στο $\mathbb{F}\}$

$Mat_{n\times n}(\mathbb{F}) = \{$ » $n \times n$ » $\}$

$GL_n(\mathbb{F}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F}) \mid \det A \neq 0\}$

$SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F}) \mid \det A = 1\} \subseteq GL_n(k)$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

$A, B \in GL_n(\mathbb{F}) \Rightarrow A \cdot B \in GL_n(\mathbb{F})$

$\quad\quad\; SL_n(\mathbb{F}) \quad\quad\quad\quad\; SL_n(\mathbb{F})$ Ομάδες

Ορισμός $A = (a_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$. Ο ανάστροφος του A είναι ο πίνακας A^t με $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.

Ορισμός : $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ συμμετρικός αν $A = A^t$, δηλ. $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall$ $1 \leq i, j \leq n$.

Ορισμός $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$. Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Άσκηση 1 Λύσεις Αθανασιάδη

$A, B, C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$

$A^t = BC$, $B^t = CA$, $C^t = AB$

N.δ.ό. $(ABC)^2 = ABC$

Λύση: $(ABC)^2 = \underbrace{AB}\underbrace{CA}\underbrace{BC} = C^t B^t A^t = (ABC)^t$

Αρκεί ν.δ.ο. $(ABC)^t = ABC$

$ABC = AA^t$

$(ABC)^t = AA^t$

Άσκηση 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Υπολογίστε τον A^n.

Λύση: $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \dots$

Μαντεύουμε:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Απόδειξη με επαγωγή. OK για $n = 1, 2, 3, \dots, m$

$$A^{m+1} = A \cdot A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{m-1} & 0 & 2^{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^m & 0 & 2^m \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^m & 0 & 2^m \end{pmatrix}$$

Άσκηση 9

Έστω $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ δυο άνω τριγωνικοί πίνακες. Ν.δ.ο.

(α) AB άνω τριγωνικός

(β) Αν $B_{ii}=0 \ \forall i$, τότε $(AB)_{ii}=0 \ \forall i$.

(γ) Αν $A_{ii}=0 \ \forall i$, τότε $(AB)_{ii}=0 \ \forall i$.

Λύση: (α) $A_{ij}=B_{ij}=0$ για $i>j$.

$$(AB)_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$$

Θέλουμε ν.δ.ο. $(AB)_{ij}=0$ για $i>j$.

Αν $k<i$, τότε $A_{ik}=0$ και άρα $A_{ik}B_{kj}=0$

Αν $k\geqslant i$, τότε $k>j$ και $B_{kj}=0$, οπότε $A_{ik}B_{kj}=0$

(β) $$(AB)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} A_{ik}B_{ki}$$

Παρόμοια με πριν: Αν $k<i$, τότε $A_{ik}=0$

Αν $k\geqslant i$, τότε $B_{ki}=0$

(γ) Παρόμοια με το (β).

Matrix Units

Έστω $1 \leq i,j \leq n$

$E_{ij} = (e_{kl})_{1\leq k,l\leq n}$ με $e_{ij} = 1$

$e_{kl} = 0$ αν $(k,l) \neq (i,j)$

Αν $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ τότε $A = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} E_{ij}$

Οι πίνακες E_{ij} αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ επί του $\mathbb{F}$, δηλαδή κάθε $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως «γραμμικός συνδυασμός» των πινάκων E_{ij}.

$$E_{ij}E_{kl} = 0 \quad \text{αν } j \neq k$$
$$= E_{il} \quad \text{αν } j = k$$

$$A \cdot E_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj} \qquad E_{ij} A = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} E_{ik}$$

Π.χ. $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{32}} = \begin{pmatrix} 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{33} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{32}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

<u>Ασκηση</u> :

Αν $AB = BA$ για καθε $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$, τοτε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $A = \lambda I_n$

<u>Λύση</u>: Αφου $AE_{ii} = E_{ii}A$ για καθε $1 \leq i \leq n$, καταλήγουμε οτι $a_{ki} = 0 = a_{ik}$ για κάθε $k \neq i$.

Οποτε ο A είναι διαγωνιος πίνακας

Επισης, αφού $AE_{ij} = E_{ji}A$, έχουμε $a_{ii}E_{ij} = a_{jj}E_{ij}$ $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$

Αρα $a_{ii} = a_{jj} = \lambda$ $\forall\ 1 \leq i,j \leq n$

<u>Στοιχειώδεις πίνακες</u> (τετραγωνικοί)

F_{ij} = Ο πίνακας που προκύπτει από τον μοναδιαίο με εναλλαγή της γραμμής i με τη γραμμή j

$$H_{ij}(r) = I_n + rE_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & r \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{θέση } (i,j)$$

$$\overline{H}_{ij}(r) = I_n + rE_{ji} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ r & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{θέση } (j,i) \quad = H_{ij}^{t}(r)$$

$$G_i(r) = I_n + (r-1)E_{ii} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\det F_{ij} = -1$

$\det H_{ij}(r) = \det \overline{H}_{ij}(r) = 1$

$\det G_{ij}(r) = r$

$G_{ij}(r)$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow$ r αντιστρέψιμο

$\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$

$F_{ij}A \rightsquigarrow \Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ $\qquad \det(F_{ij}A) = -\det A$

$AF_{ij} \rightsquigarrow \Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j$ $\qquad \det(AF_{ij}) = -\det A$

$H_{ij}(r)A \rightsquigarrow \Gamma_i \to \Gamma_i + r\Gamma_j$ $\qquad \det(H_{ij}(r)(A)) = \det A$

$A\overline{H}_{ij}(r) \rightsquigarrow \Sigma_i \to \Sigma_i + r\Sigma_j$ $\qquad \det(A\overline{H}_{ij}(r)) = \det A$

$G_i(r)A \rightsquigarrow \Gamma_i \to r\Gamma_i$ $\qquad \det(G_i(r)A) = r\det A$

$AG_i(r) \rightsquigarrow \Sigma_i \to r\Sigma_i$ $\qquad \det(AG_i(r)) = r\det A$

Άσκηση Seemous

$a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ με $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

$b_1,\dots,b_n \in \mathbb{R}$ με $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$a_{ij} := a_i - b_j \qquad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } a_{ij} < 0 \end{cases}$

$C=(c_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $c_{ij} \in \{0,1\}$ τ.ω.

$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \quad \forall i$ and $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \quad \forall j$

N.δ.ο.

(α) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) = 0$ και $B=C$

(β) B αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow b_1 \leq a_1 < b_2 \leq a_2 < \dots < b_n \leq a_n$

Λυση: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} - \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\right) - \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij} - \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\right) = 0$

Αν $a_i \geq b_j$ τοτε $a_{ij} \geq 0$, $b_{ij}=1$ και $c_{ij} \in \{0,1\}$, αρα $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) \geq 0$

Αν $a_i < b_j$ τοτε $a_{ij} < 0$, $b_{ij}=0$ και $c_{ij} \in \{0,1\}$, άρα $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) \geq 0$

Επομενως $a_{ij}(b_{ij}-c_{ij}) = 0 \;\forall i,j$.

Αν $a_{ij} \neq 0$, τότε $b_{ij} = c_{ij}$.

Αν $a_{ij} = 0$, τοτε $b_{ij} = 1 \geq c_{ij}$.

Σε καθε περιπτωση, $b_{ij} \geq c_{ij} \;\forall i,j$.

Αν υπάρχει (i,j) τ.ώ. $b_{ij} > c_{ij}$, τοτε $\sum_{k=1}^{n} b_{ik} > \sum_{k=1}^{n} c_{ik}$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $b_{ij} = c_{ij} \;\forall i,j$.

(β) Αν $a_i = a_{i+1}$, τοτε οι γραμμες i και $i+1$ του B είναι ισες οποτε ο B δεν αντιστρέφεται. Παρόμοια αν $b_j = b_{j+1}$, τότε οι στηλες j και $j+1$ του B είναι ισες οποτε ο B δεν αντιστρέφεται
Οποτε $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ και $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$

Αν τωρα $\nexists$ b_j τ.ω. $a_i < b_j \leq a_{i+1}$ τοτε πάλι οι γραμμες $i, i+1$ είναι ισες. Το ίδιο αν $\nexists$ a_i τ.ω. $b_j \leq a_i < b_{j+1}$.

Τέλος αν $a_1 < b_1$, τοτε όλη η πρώτη γραμμη του B είναι 0 και δεν αντιστρεφεται. Επομενως $b_1 \leq a_1 < b_2 \leq a_2 < b_3 \leq a_3 < \ldots < b_n \leq a_n$

και $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ που αντιστρέφεται.

<u>Ίχνος τετραγωνικού πίνακα</u>

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

$$\mathrm{Trace}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

<u>Παρατήρηση</u> : Προφανώς $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A^t)$

Ασκηση 11

(α) $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ Προφανες

$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ Προφανες

$Tr(AB) = Tr(BA)$

(β) Αν μια συνάρτηση $\varphi : Mat_{n\times n}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ έχει τις παραπάνω 3 ιδιότητες, τότε υπάρχει $c \in \mathbb{F}$ τέτοιο ώστε $\varphi = c \cdot Tr$

Λυση: (α) $(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$ $\quad (BA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} B_{ik} A_{ki}$

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = Tr(BA)$$

(β) $\varphi(A+0) = \varphi(A) + \varphi(0) \Rightarrow \varphi(0) = 0$

Αρα

$\varphi(E_{ij} E_{kl}) = 0$ αν $j \neq k$

Έχουμε $\varphi(E_{ij}) = \varphi(E_{ik} E_{kj}) = \varphi(E_{kj} E_{ik}) = 0$ αν $i \neq j$

Επισης $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{ij} E_{ji}) = \varphi(E_{ji} E_{ij}) = \varphi(E_{jj}) \quad \forall\, i,j$

Έστω $c := \varphi(E_{11})$ και $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

Τοτε $\varphi(A) = \varphi(\sum a_{ij} E_{ij}) = \sum a_{ij} \varphi(E_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot c = c \cdot Tr(A)$

Ασκηση 12

Δινεται $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(α) $Tr(A^2) = ;$

(β) Αν A συμμετρικός, τότε $Tr(A^2) \geq 0$.

Λυση: $Tr(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ji} \underset{A=A^t}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$

Θέμα Επιλογής Seemous

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$.

Για $S, T \subseteq [n]$ θέτουμε $a_{ST} = (-1)^{|S\cap T|}$

Έστω $A_n = (a_{ST})_{S,T\subseteq[n]} \in Mat_{2^n\times 2^n}(\mathbb{R})$

(α) $Tr(A_n) = ;$

(β) Ν.δ.ό. $Det(A_n) \neq 0$.

Λύση: $a_{SS} = (-1)^{|S|}$ για κάθε $S \subseteq [n]$

Αρα $Tr(A_n) = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1+(-1))^n = 0$

$P(n) = \{ S \mid S \subseteq [n]\}$ $\quad |P(n)| = 2^n$

$P(n) = P(n-1) \cup \{ S\cup\{n\} \mid S \in P(n-1)\}$

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & -A_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A_n) \underset{\substack{1\eta+2\eta \\ \text{στήλη}}}{=} \det\begin{pmatrix} 2A_{n-1} & A_{n-1} \\ 0 & -A_{n-1} \end{pmatrix} \underset{\substack{1\eta+2\eta \\ \text{γραμμή}}}{=} \det\begin{pmatrix} 2A_{n-1} & 0 \\ 0 & -A_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det(2A_{n-1}) \cdot \det(-A_{n-1}) = (-2)^{2^{n-1}} \det(A_n)^2$$

$$\det(A_n) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A_{n-1}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A_1) \neq 0$$

$$\det A_1 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

Παρατήρηση: Αν $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ και $S \in GL_n(\mathbb{F})$ με

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix} = D$$ διαγώνιος πίνακας. Τότε:

(α) $\det(A) = d_1 \cdots d_n$

(β) $Tr(A) = d_1 + \dots + d_n$

(γ) $A^m = S D^m S^{-1}$ και $D^m = \begin{pmatrix} d_1^m & & & \\ & d_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n^m \end{pmatrix}$

Παρατήρηση :

Ακόμα και αν ο πίνακας δεν είναι διαγωνίσιμος, το ίχνος του είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του και η ορίζουσά του το γινόμενο των ιδιοτιμών του, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n(\lambda^n - trA\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A)$$

$$\text{"} \; (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

ΟΧΙ ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ $\lambda_i \neq \lambda_j$

Άρα $trA = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

και $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

Jordan canonical form $\Rightarrow$

· Κάθε πίνακας $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ είναι όμοιος με έναν κάτω τριγωνικό πίνακα της μορφής $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{pmatrix} = J$

δηλ. υπάρχει $S \in GL_n(\mathbb{C})$ τ.ω. $S^{-1}AS = J \Leftrightarrow A = SJS^{-1}$

Οπότε, για κάθε $r \in \mathbb{N}$, $A^r = SJ^rS^{-1}$ και $Tr(A^r) = Tr(J^r)$

$$J^r = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & & 0 \\ & \lambda_2^r & \\ * & & \ddots \\ & & & \lambda_n^r \end{pmatrix}$$

Άρα $Tr(A^r) = \lambda_1^r + \dots + \lambda_n^r$

<u>Θεώρημα Cayley - Hamilton</u>

$\chi_A(A) = 0$

<u>Ορισμός</u> : $min_A(x) :=$ το μονικό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού που μηδενίζει τον πίνακα A

Αν $p(A) = 0$, τότε $min_A(x) \mid p(x)$

Έχουμε $min_A(x) \mid \chi_A(x)$ και $min_A(x), \chi_A(x)$ έχουν ακριβώς τους ίδιους ανάγωγους παράγοντες

<u>Π.χ.</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad min_A(x) = x - 2$

$\chi_A(x) = (x-2)^2$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad min_A(x) = (x-2)^2$

$\chi_A(x) = (x-2)^2$

<u>Παρατήρηση</u> : A διαγωνίσιμος $\Leftrightarrow$ $min_A(x)$ είναι γινόμενο διακριτών πρωτοβάθμιων πολυωνύμων

Ασκηση Seemous

$SL_2(\mathbb{Z}) = \{ A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{Z}) \mid \det A = 1 \}$

(α) Βρείτε παράδειγμα $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ με $A^2 + B^2 = C^2$

(β) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ με $A^4 + B^4 = C^4$

Λύση: (α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(β) $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}A\, x + \det A$

Cayley-Hamilton $\Rightarrow$ $A^2 = \mathrm{Tr}A \cdot A - \det A \cdot I_2$

Έστω $A, B, C \in SL_2(\mathbb{Z})$ τ.ω. $A^2 + B^2 = C^2$

Θέτουμε $a = \mathrm{Tr}A$, $b = \mathrm{Tr}B$, $c = \mathrm{Tr}C$

Έχουμε $A^2 = aA - I_2$ και $A^4 = a^2A^2 - 2aA + I_2 = (a^3 - 2a)A + (1 - a^2)I_2$

Θέλουμε $(a^3 - 2a)A + (b^3 - 2b)B + (2 - a^2 - b^2)I_2 = (c^3 - 2c)C + (1 - c^2)I_2$

$\overset{\text{Trace}}{\Rightarrow}$ $a^4 - 4a^2 + b^4 - 4b^2 + 4 = c^4 - 4c^2 + 2$

$\Rightarrow$ $a^4 + b^4 - c^4 + 2 = 4(a^2 + b^2 - c^2)$

Αν x άρτιος, τότε $4 \mid x^2 \Rightarrow 4 \mid x^4$

Αν x περιττός, τότε $4 \mid x^2 - 1 \Rightarrow 4 \mid x^4 - 1$

$4 \mid a^4 + b^4 - c^4 + 2 \Rightarrow$ a, b περιττοί και c άρτιος

$a = 2k+1 \Rightarrow a^2(a^2 - 4) = (4k^2 + 4k + 1)(4k^2 + 4k - 3) =$

$= 16k^4 + 32k^3 + 8k^2 - 8k - 3 = 8x - 3$ για κάποιο $x \in \mathbb{Z}$

$b = 2l+1 \Rightarrow b^2(b^2 - 4) = 8y - 3$ για κάποιο $y \in \mathbb{Z}$

$c = 2m \Rightarrow c^2(c^2 - 4) = 16m^4 - 16m^2 = 8z$ για κάποιο $z \in \mathbb{Z}$

$8x - 3 + 8y - 3 - 8z + 2 = 0 \Leftrightarrow 8\cdot(x + y - z) = 4$ ΑΤΟΠΟ.