**Μάθημα Προετοιμασίας για τον Διαγωνισμό SEEMOUS 2024**
**Επιμέλεια: Προδρομίδης Κυπριανός-Ιάσων**

## ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Θεωρούμε έναν άδειο $2024 \times 2024$ πίνακα. Δύο παίκτες Α και Β παίζουν το εξής παιχνίδι: Ξεκινώντας από τον Α και παίζοντας εναλλάξ, επιλέγουν μια κενή θέση του πίνακα και τη γεμίζουν με κάποιον πραγματικό αριθμό. Αν ο πίνακας που προκύπτει στο τέλος είναι αντιστρέψιμος κερδίζει ο Α, διαφορετικά κερδίζει ο Β. Να εξεταστεί ποιος από τους δύο παίκτες έχει στρατηγική νίκης.

2. Θεωρούμε $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ υποσύνολα του $\{1, 2, ..., n\}$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν υποσύνολα $I, J \subseteq \{1, 2, ..., n+1\}$ ξένα μεταξύ τους για τα οποία ισχύει
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

3. Θεωρούμε πίνακα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει $A^3 = A + I_n$. Να αποδειχθεί ότι $\det(A) > 0$.

4. Θεωρούμε ακολουθία πινάκων $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και για } n \geq 1,\ A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & I_{2^n} \\ I_{2^n} & A_n \end{pmatrix}.$$
Να αποδειχθεί ότι κάθε πίνακας $A_n$ έχει ακριβώς $n+1$ διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ με πολλαπλότητες $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$, αντίστοιχα.

5. Θεωρούμε πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ για τους οποίους το $A + xB$ είναι μηδενοδύναμος πίνακας για $n+1$ διαφορετικές τιμές του $x$. Να αποδειχθεί ότι οι $A, B$ είναι μηδενοδύναμοι.

6. Ο πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ονομάζεται *καλός* αν για κάθε πίνακα $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ υπάρχουν μοναδικοί πίνακες $Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ για τους οποίους ισχύει
   - $X = Y + Z$.
   - $AY = YA$.
   - $AZ = -ZA$.

   Να αποδειχθεί ότι ένας πίνακας $A$ είναι καλός $\Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιος ώστε $A^2 = \lambda I_n$.

7. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι $n$ με την εξής ιδιότητα: Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει η σχέση
$$AB - BA = B^2 A.$$

8. Να βρεθούν όλες οι επί συναρτήσεις $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \{0, 1, ..., n\}$ για τις οποίες ισχύει η σχέση
$$f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\},\ \text{για όλους τους πίνακες } X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

9. Θεωρούμε $A$ το Jordan Block διάστασης $n$ της ιδιοτιμής 0 και $L_A : \mathbb{C}^{n \times n} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ τη γραμμική απεικόνιση με τύπο $L_A(X) = AX - XA$. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $L_A$.

10. Θεωρούμε έναν πρώτο αριθμό $p$ και έναν πίνακα $A \in \mathbb{Q}^{p\times p}$, για τον οποίο ισχύει $\det(A^p + I_p) = 0$ και $\det(A + I_p) \neq 0$. Να αποδειχθεί ότι το $\mathrm{tr}(A)$ είναι ιδιοτιμή του $A + I_p$.

11. Δίνεται ορθογώνιος πίνακας $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $u \in \mathbb{R}^n$, θέτουμε $B = I_n - 2uu^T$. Να αποδειχθεί ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του $A$ ή του $AB$.

12. Θεωρούμε πίνακες $A, B$ διάστασης $n$ για τους οποίους $AB^2A = AB$. Να αποδειχθεί ότι
$$(AB)^2 = AB.$$

13. Θεωρούμε πίνακες $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις
$$AC - BD = I_n \text{ και } AD + BC = O_n.$$
Να αποδειχθεί ότι
   (α′) $CA - DB = I_n$ και $DA + CB = O_n$.
   (β′) $\det(AC) \geq 0$ και $(-1)^n \det(BD) \geq 0$.

14. Θεωρούμε πίνακα $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ για τον οποίο ισχύει η σχέση
$$A + A^* = A^2A^*.$$
Να αποδειχθεί ότι ο $A$ είναι ερμιτιανός πίνακας.

15. Θεωρούμε θετικά ημιορισμένους μιγαδικούς πίνακες $A, B$ ίδιας διάστασης. Να αποδειχθεί ότι
$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$

## ΑΝΑΛΥΣΗ

16. Για δύο αύξουσες συναρτήσεις $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι
$$\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x \geq \left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\right).$$

17. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c$ για τους οποίους υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,\infty)$, όχι ταυτοτικά ίση με 0, για την οποία
$$\int_0^1 xf(x)^2\mathrm{d}x = c\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

18. Θεωρούμε μια ακολουθία θετικών αριθμών $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ με $a_0 > 0$ και αναδρομικό τύπο
$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}, \text{ για κάθε } n \geq 0.$$
Να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}.$$

19. Θεωρούμε ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ η οποία έχει $a_0 = 1$ και αναδρομικά ορίζεται ως

$$a_{n+1} = \sin(a_n), \text{ για κάθε } n \geq 0.$$

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

20. Θεωρούμε ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ για την οποία η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Να αποδειχθεί ότι και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{n/(n+1)}$$

συγκλίνει.

21. Έστω $A$ το σύνολο των θετικών ακεραίων που δεν περιέχουν το ψηφίο 9 στη δεκαδική τους αναπαράσταση. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά

$$\sum_{a \in A} \frac{1}{a}.$$

22. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$(b-a)f'(\sqrt{ab}) = f(b) - f(a), \text{ για κάθε } a, b > 0.$$

23. Θεωρούμε ακολουθία θετικών πραγματικών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Να αποδειχθεί ότι η σχέση

$$1 + a_n > \sqrt[n]{2} \cdot a_{n-1}$$

ισχύει για άπειρους $n$.

24. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$x_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

25. Έστω $a, b > 0$. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a \sin(x)^{2n} + b \cos(x)^{2n}} \mathrm{d}x.$$

26. Για κάποιον $p > 0$ θέτουμε

$$a_n = \frac{1}{n^p} \int_0^n |\sin(\pi x)|^x \mathrm{d}x.$$

Να βρεθούν όλες οι τιμές του $p$ για τις οποίες η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

27. Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$\alpha_n = \int_0^1 1 - (1 - t^n)^{1/n} \mathrm{d}t.$$

Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$.

28. Θεωρούμε συνάρτηση $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_1^t f(x)\mathrm{d}x \leq ct^2,$$

για κάθε $t > 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x = \infty.$$

29. Να εξεταστεί αν υπάρχει υποσύνολο $A$ του $\mathbb{N} \cup \{0\}$ για το οποίο ισχύει η σχέση

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \sum_{n\in A} \frac{x^n}{n!} = 1.$$

30. Θεωρούμε συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $a \leq f(x) \leq b$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και ότι

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Να αποδειχθεί ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει η σχέση

$$\int_0^1 e^{\lambda f(x)}\mathrm{d}x \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right).$$