# Μάθημα Προετοιμασίας για τη SEEMOUS 2021

11 Δεκεμβρίου 2020

## 1 Το Προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass

1. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση
$$\int_0^1 x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$$
για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $k$. Να αποδειχθεί ότι $f = 0$.

2. Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με $x_n \in [0,1]$ θα λέγεται «Devin» αν για κάθε συνάρτηση $f \in \mathrm{C}[0,1]$ ισχύει
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$
Να αποδειχθεί ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Devin αν και μόνο αν
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{n=1}^{k} x_n^m = \frac{1}{m+1}$$
για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $m$.

3. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι
$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = f(1).$$

4. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}\int_0^1 x^n(1-x)^n f(x)\mathrm{d}x.$$

5. Έστω $k > 1$ πραγματικός αριθμός. Να βρεθεί το όριο
$$L = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \left(\frac{k}{\sqrt[n]{x}+k-1}\right)^n \mathrm{d}x$$

καθώς και το όριο

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(L-\int_0^1\left(\frac{k}{\sqrt[n]{x}+k-1}\right)^n\mathrm{d}x\right)$$

.

6. Έστω $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς και $1-$περιοδικές συναρτήσεις. Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

## 2 Κατά σημείο σύγκλιση ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων

7. Να βρεθεί το κατά σημείο όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ που ορίζεται με καθέναν από τους ακόλουθους τρόπους:

   - $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=(n+1)x^n$.
   - $f_n:(0,1)\to\mathbb{R}$ με $f_n(x)=\begin{cases} n, \text{αν } 0\le x\le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n}, \text{αν } \dfrac{1}{n}<x<1. \end{cases}$
   - $f_n:\mathbb{R}_{\ge 0}\to\mathbb{R}$, με $f_1(x)=\sqrt{x}$ και $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}$.
   - $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=\sin x$ και $f_{n+1}(x)=\sin(f(x))$.
   - $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f_1(x)=0$ και $2f_{n+1}(x)=x+2f_n(x)-f_n(x)^2$.

8. Για $x\in(-1,1)$ να βρεθεί το κατά σημείο όριο της σειράς $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ αν:

   - $f_n(x)=x^n$.
   - $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$.
   - $f_n(x)=nx^n$.
   - $f_{2n+1}(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ και $f_{2n}(x)=0$ για κάθε $n\ge 0$.

## 3 Το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης

9. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^2\frac{x+1}{x}\frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}\mathrm{d}x.$$

10. Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\mathrm{d}x.$$

11. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{nx}+n\mathrm{sin}x}{e^{nx}+1}\mathrm{d}x.$$

12. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{1}\ln(1+\frac{1}{n^2x})\mathrm{d}x.$$

13. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\infty}(1-\frac{x}{n})^n\mathrm{d}x.$$

14. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{sin}\frac{x}{n}(1+\frac{x}{n})^{-n}\mathrm{d}x.$$

15. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{\infty}\mathrm{sin}\frac{x}{n}(x(1+x^2))^{-1}\mathrm{d}x.$$

16. Έστω $k\in(-1,+\infty)$. Να βρεθεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} n^{k+1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{sin}x}{e^{(n+1)x}-e^{nx}}\mathrm{d}x.$$

17. Να λυθεί εκ νέου η άσκηση 5, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

18. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $k$ να υπολογιστεί το όριο
$$\lim_{n\to+\infty} n^{k+1}\int_0^{1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k\mathrm{d}x$$
.

# 4 Τα Θεωρήματα Tonelli και Fubini

19. Να βρεθεί το άθροισμα
$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sqrt{\mathrm{sin}x})^n\mathrm{cos}x\mathrm{d}x.$$

20. Δίνεται μια Riemann-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $|f(x)|\leq\dfrac{C}{x^2+1}$ για κάποια σταθερά $C$. Για κάθε $x$ θέτουμε επίσης $F(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε συνεχή και $1-$περιοδική συνάρτηση $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει
$$\int_0^1 F(x)G(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)G(x)\mathrm{d}x.$$

21. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - 1} \mathrm{d}x.$$

22. (α) Για κάθε φυσικό $n \geq 1$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int_0^1 x^{n-1} \ln x \mathrm{d}x.$$

(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right)$$

.

## 5 Συνδυαστικά Θέματα

23. (α) Να αποδειχθεί ότι

$$\lim_{n \to +\infty} n \int_0^n \frac{\arctan \frac{x}{n}}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

(β) Να βρεθεί το όριο

$$\lim_{n \to +\infty} n \cdot \left( n \int_0^n \frac{\arctan \frac{x}{n}}{x(x^2+1)} \mathrm{d}x - \frac{\pi}{2} \right).$$

24. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) \mathrm{d}x = f(0) + f'(0) + \cdots .$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση που έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 με ακτίνα σύγκλισης $+\infty$. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(0)| < +\infty$ να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) < +\infty$$

.

25. (α) Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $n$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t \mathrm{d}t.$$

(β) Θεωρούμε τυχαίο και σταθερό μη αρνητικό ακέραιο $k$. Για κάθε $n \geq k$ θέτουμε

$$x_n = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left( e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \cdots - \frac{1}{i!} \right).$$

Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(x_n)_{n=k}^{\infty}$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.