

Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Προβλήματα για τον διαγωνισμό επιλογής για τον IMC
31 Μαΐου 2025

Πρόβλημα 1. Έστω k, n θετικοί ακέραιοι με $k \leq n/2$ και $I \subset [n] := \{1, 2, \dots, n\}$ με $|I| = k$. Θετούμε

$$\mathcal{A}_I := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A_{i,j} = 0 \text{ αν } i, j \in [n] \setminus I\}.$$

Βρείτε το $\max\{\text{rank}(A) : A \in \mathcal{A}_I\}$.

Πρόβλημα 2. Έστω n θετικός ακέραιος και $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας που ικανοποιεί την $A^3 + A^2 + A = 0$. Δείξτε ότι το ίχνος, $\text{tr}(A)$, του A είναι ακέραιος μη θετικός.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}. \quad (1)$$

Πρόβλημα 4. Έστω n θετικός ακέραιος για τον οποίο υπάρχουν ξένα σύνολα A, B τέτοια ώστε $A \cup B = \{1, 2, \dots, n\}$ και

$$\sum_{k \in A} k^r = \sum_{k \in B} k^r \quad (2)$$

για κάθε $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Δείξτε ότι $8|n$ και $n \neq 8$.

Πρόβλημα 5. Έστω $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών που

(i) είναι κοίλη (δηλαδή $a_{n+1} \geq (a_n + a_{n+2})/2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$),

(ii) και έχει $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{a_n^x}$$

για όλα τα $x > 0$.

(α) Δείξτε ότι η σειρά που ορίζει την f πράγματι συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι δεν είναι δυνατόν να γραφτεί το $(0, 1)$ ως ξένη ένωση διαστημάτων της μορφής $[a, b]$ με $a < b$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες.

Καλή επιτυχία!

Λύσεις

1. Το ζητούμενο μέγιστο ισούται με $2k$.

Έστω $A \in \mathcal{A}_I$ και $a_1, a_2, \dots, a_n$ οι γραμμές του A . Δηλαδή

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$\text{rank}(A) = \dim \langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \rangle \leq \dim \langle \{a_i : i \in I\} \rangle + \dim \langle \{a_i : i \in [n] \setminus I\} \rangle.$$

Καθεμία από τις δύο διαστάσεις στο τέλος είναι το πολύ k . Για την πρώτη είναι προφανές αφού $I = k$. Για τη δεύτερη, παρατηρούμε ότι είναι η τάξη του πίνακα με γραμμές τις $\{a_i : i \in [n] \setminus I\}$ με όποια σειρά θέλουμε. Σε αυτόν τον πίνακα, όλες οι στήλες με δείκτη $j \in [n] \setminus I$ είναι 0, άρα η τάξη του είναι το πολύ k .

Ισχυρισμός: Η τιμή $2k$ λαμβάνεται. Δηλαδή, υπάρχει $A \in \mathcal{A}_I$ με $\text{rank}(A) = 2k$.

Θεωρούμε $J \subset [n] \setminus I$ με $|J| = k$. Αυτό είναι εφικτό γιατί $2k \leq n$. Έστω ότι τα στοιχεία των I, J , όταν μπουν σε αύξουσα σειρά είναι τα

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

$$j_1 < j_2 < \dots < j_k.$$

Ο (συμμετρικός) πίνακας A με

$$A_{r,s} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \{r, s\} = \{i_t, j_t\} \text{ για κάποιο } t \in [k], \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

έχει ακριβώς $2k$ μη μηδενικές γραμμές οι οποίες μάλιστα είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Σχόλιο: Η λύση απλοποιείται αν πούμε πως με χρήση ενός μετασχηματισμού ομοιότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $I = [k]$.

2. Η δοσμένη ισότητα γράφεται $A(A^2 + A + I) = 0$. Επειδή το πολυώνυμο $x^2 + x + 1$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$, κατά τα γνωστά, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι της μορφής $x^r(x^2 + x + 1)^s$ με r, s μη αρνητικούς ακέραιους και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο¹ της μορφής $x^u(x^2 + x + 1)^v$ με u, v μη αρνητικούς ακέραιους και $u + 2v = n$. Όλοι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Το ίχνος του A είναι το αντίθετο του συντελεστή του x^{n-1} στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, και το συμπέρασμα έπεται. Το ίχνος είναι αρνητικό αν $v > 0$, ενώ διαφορετικά ισούται με 0 (και $A = 0$).

3. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} \binom{n}{k} x^{k+1}$$

¹Χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το $p(x) := \det(xI - A)$.

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ο ελαχιστοβάθμιος όρος είναι ο $(n/2)x^2$, οπότε $h(0) = h'(0) = 0$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$h''(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-x)^{k-1} = \frac{1}{(-x)} \{(1-x)^n - 1\}.$$

Ολοκληρώνοντας, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h'(x) &= \int_0^x \frac{1 - (1-t)^n}{t} dt \stackrel{s:=1-t}{=} \int_{1-x}^1 \frac{1-s^n}{1-s} ds = \int_{1-x}^1 (1+s+s^2+\dots+s^{n-1}) ds \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (1-x)^j. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} h(1) &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \int_0^1 (1-x)^j dx = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Για την τρίτη ισότητα, παρατηρούμε ότι $\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, οπότε έχουμε τηλεσκοπικό άθροισμα, που υπολογίζεται άμεσα.

4. Εφαρμόζοντας τη (2) για $r = 0$, παίρνουμε $|A| = |B|$. Έστω $s = |A|$. Τότε $n = 2s$. Η (2) για $r = 1$ δίνει ότι

$$\sum_{k \in A} k = \sum_{k \in B} k = \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{s(2s+1)}{2}.$$

Το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, άρα $2|s$. Έστω $n = 4\ell$ με $\ell \in \mathbb{N}^+$. Η (2) για $r = 2$ και $r = 3$ δίνει ότι είναι ακέραιοι οι

$$\begin{aligned} \sum_{k \in A} k^2 &= \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{\ell(4\ell+1)(8\ell+1)}{3}, \\ \sum_{k \in A} k^3 &= \frac{1}{2} \frac{n^2(n+1)^2}{4} = 2\ell^2(4\ell+1)^2. \end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι ο ℓ είναι περιττός, τότε ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς είναι περιττός ενώ ο δεύτερος είναι άρτιος. Όμως η διαφορά τους είναι $\sum_{k \in A} (k^3 - k^2) = \sum_{k \in A} k^2(k-1)$, που είναι άρτιος. Άτοπο. Άρα ο ℓ είναι άρτιος, και επομένως $8|n$.

Για το $n \neq 8$.

Ας υποθέσουμε ότι τέτοια σύνολα A, B υπάρχουν για $n = 8$. Βέβαια $|A| = |B| = 4$. Δουλεύοντας με τη (2) για $r = 2$, βλέπουμε ότι: τα 8 και 7 δεν μπορούν να ανήκουν στο ίδιο σύνολο, το 6 πρέπει να πάει στο ίδιο σύνολο με το 7, το 5 στο ίδιο με το 8. Και τελικά η μόνη διαμέριση που ικανοποιεί τη (2) για $r = 0, 2$ είναι η $\{8, 5, 3, 2\}, \{7, 6, 4, 1\}$. Η διαμέριση ικανοποιεί τη (2) και για $r = 1$ αλλά όχι για $r = 3$.

5. Ισχυρισμός 1: Η $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ είναι αύξουσα.

Η κοιλότητα σημαίνει ότι η ακολουθία $(n \mapsto a_{n+1} - a_n)$ είναι φθίνουσα. Αν υπάρχει ένα n_0 τέτοιο ώστε $a_{n_0} > a_{n_0+1}$, τότε για κάθε $n > n_0$ θα έχουμε τις ανισότητες

$$a_{k+1} - a_k \leq a_{n_0+1} - a_{n_0} =: c < 0 \text{ για } k = n_0, \dots, n-1.$$

Προσθέτοντάς τα, έχουμε ότι $a_n - a_{n_0} \leq (n - n_0)c$. Η δεξιά πλευρά συγκλίνει στο $-\infty$ καθώς $n \rightarrow \infty$, και αυτό είναι αδύνατο επειδή $a_n > 0$ για όλα τα n .

(α) Από τον Ισχυρισμό 1 και το κριτήριο του Leibniz, έχουμε ότι η σειρά που ορίζει την f είναι συγκλίνουσα.

(β) Ορίζουμε $b_n := a_n^{-x} - a_{n+1}^{-x}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$. Κάθε b_n είναι μη αρνητικό λόγω του Ισχυρισμού 1.

Ισχυρισμός 2: Η $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ είναι φθίνουσα.

Σημειώστε πρώτα ότι για $x > 0$ η συνάρτηση $h_x : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $h_x(y) = y^{-x}$ για όλα τα $y > 0$ είναι φθίνουσα και κυρτή. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^+$ και $x > 0$, έχουμε

$$a_{n+1}^{-x} \leq \left(\frac{a_n + a_{n+2}}{2} \right)^{-x} \leq \frac{a_n^{-x} + a_{n+2}^{-x}}{2}.$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την κοιλότητα του $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ και το γεγονός ότι η h_x είναι φθίνουσα, ενώ στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η h_x είναι κυρτή. Αναδιατάσσοντας, αυτό μας δίνει το αποτέλεσμα.

Ισχυρισμός 3: Ισχύει

$$\frac{1}{a_1^x} \leq 2f(x) \leq \frac{2}{a_1^x} - \frac{1}{a_2^x} \quad (3)$$

για όλα τα $x > 0$.

Πράγματι, έχουμε

$$2f(x) = \frac{1}{a_1^x} + \left(\frac{1}{a_1^x} - \frac{1}{a_2^x} \right) - \left(\frac{1}{a_2^x} - \frac{1}{a_3^x} \right) + \left(\frac{1}{a_3^x} - \frac{1}{a_4^x} \right) + \dots = \frac{1}{a_1^x} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k.$$

Η δεύτερη ισότητα (δηλαδή, η ομαδοποίηση) ισχύει επειδή $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Η μονοτονία της ακολουθίας b δίνει ότι

$$\frac{1}{a_1^x} \leq 2f(x) \leq \frac{1}{a_1^x} + b_1,$$

το οποίο είναι η (3)

Τώρα, παίρνοντας $x \rightarrow 0^+$ στην (3) βρίσκουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1/2$.

6. Έστω ότι το $(0, 1)$ μπορεί να γραφτεί ως ένωση όπως στην εκφώνηση. Προφανώς η ένωση είναι αριθμήσιμη γιατί τα διαστήματα έχουν μη κενό εσωτερικό. Έστω $(0, 1) = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ και $A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ άκρο κάποιου } I_n\} \cup \{0, 1\}$. Το A είναι μη κενό.

Ισχυρισμός 1. Το A δεν έχει μεμονωμένα σημεία.

Ισχυρισμός 2. Το A είναι μη κενό κλειστό υποσύνολο του $[0, 1]$.

Έπεται ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο, όμως προφανώς είναι αριθμήσιμο.