Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

13 Φεβρουαρίου 2010

Πρόβλημα 1: Να εξετάσετε:

(α) αν υπάρχουν γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = \sin(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

(β) αν υπάρχουν γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = \sin(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται ότι το πολυώνυμο $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$ έχει μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές και n πραγματικές ρίζες (προσμετρώντας τις πολλαπλότητες).

(α) Δείξτε ότι $a_1 \geq n$ και ότι $a_{n-1} \geq n$.

(β) Δείξτε ότι $a_1 + \cdots + a_{n-1} \geq 2^n - 2$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(γ) Δείξτε ότι $a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \geq \binom{2n}{n} - 2$.

Πρόβλημα 3: Αν $f : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f(x)}\, dx \ = \ \infty.$$

Πρόβλημα 4: Για τους θετικούς ακεραίους $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ ισχύει $a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+10} < 20$ για κάθε $i \in \{0, 10, 20, \ldots, 2000\}$. Δείξτε ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n < m$ τέτοιοι ώστε $a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m = 201$.

Πρόβλημα 5: Για ένα 2×2 πίνακα A με στοιχεία ακέραιους αριθμούς ισχύει

$$\det\left(A^3 + A^2 + A + I\right) = 1.$$

(α) Δείξτε ότι $\det(A + I) = 1$.

(β) Ποιες είναι οι δυνατές τιμές της ορίζουσας του A; Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του ίχνους του A;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: (α) Τέτοιες συναρτήσεις είναι, για παράδειγμα, οι $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + \sin(x)$ και $g(x) = x$, για $x \in \mathbb{R}$. (β) Δεν υπάρχουν συναρτήσεις με αυτές τις ιδιότητες. Πράγματι, αν οι $f, g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι αύξουσες, τότε τα όρια $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ και $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ υπάρχουν και είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Επομένως, υπάρχει το όριο $\lim_{x\to-\infty} (f(x) - g(x))$ και συνεπώς δεν είναι δυνατό να ισχύει $f(x) - g(x) = \sin(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2: Από την υπόθεση έχουμε $p(x) = (x + \beta_1)(x + \beta_2)\cdots(x + \beta_n)$, όπου οι β_i είναι πραγματικοί αριθμοί με $\beta_1\beta_2\cdots\beta_n = 1$. Προφανώς το $p(x)$ δεν έχει μη αρνητικές πραγματικές ρίζες και συνεπώς έχουμε $\beta_i > 0$ για $1 \le i \le n$. Για τους συντελεστές του x^{n-1} και του x στο $p(x)$ έχουμε

$$a_1 \;=\; \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \qquad \text{και} \qquad a_{n-1} \;=\; \beta_1\beta_2\cdots\beta_n \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \cdots + \frac{1}{\beta_n}\right).$$

Επομένως, οι προτεινόμενες ανισότητες στο (α) προκύπτουν από την ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου και τη σχέση $\beta_1\beta_2\cdots\beta_n = 1$. Γενικότερα, για το συντελεστή του x^{n-k} στο $p(x)$ έχουμε

$$a_k \;=\; \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n} \beta_{i_1}\beta_{i_2}\cdots\beta_{i_k}$$

και συνεπώς η ανισότητα αριθμητικού - γεωμετρικού μέσου δίνει

$$a_k \;\ge\; \binom{n}{k}\,(\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)^{\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}} \;=\; \binom{n}{k}$$

για $1 \le k \le n-1$. Από τις ανισότητες αυτές προκύπτει ότι $2 + a_1 + \cdots + a_{n-1} \ge \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ και ότι $2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 \ge \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Μια άλλη λύση στο (β) προκύπτει παρατηρώντας ότι

$$2 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = p(1) \;=\; (1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\cdots(1 + \beta_n) \;\ge\; 2\sqrt{\beta_1}\cdot 2\sqrt{\beta_2}\cdots 2\sqrt{\beta_n} \;=\; 2^n.$$

Σε όλα τα ερωτήματα, η ισότητα ισχύει μόνο αν $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 1$, δηλαδή μόνο για το πολυώνυμο $p(x) = (x+1)^n$.

Πρόβλημα 3: Αν f η είναι φραγμένη άνω στο διάστημα $[0, +\infty)$, τότε η $\sqrt{1 + (f')^2}/f$ είναι φραγμένη κάτω στο ίδιο διάστημα από ένα θετικό αριθμό και το ζητούμενο είναι φανερό. Διαφορετικά, υπάρχει ακολουθία (x_n) στοιχείων του $[0, +\infty)$ τέτοια ώστε $x_n \to \infty$ και $f(x_n) \to \infty$ για $n \to \infty$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f(x)}\,dx \;\ge\; \int_0^{x_n} \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f(x)}\,dx \;\ge\; \int_0^{x_n} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx \;=\; \ln f(x_n) - \ln f(0) \to \infty$$

για $n \to \infty$, από όπου προκύπτει και πάλι η ζητούμενη ισότητα.

Πρόβλημα 4: Θέτουμε $s_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$ για $r \in \{1, 2, \ldots, 2010\}$ και θεωρούμε το σύνολο S με στοιχεία τους θετικούς ακεραίους $s_1, s_2, \ldots, s_{2010}$ και $s_1 + 201, s_2 + 201, \ldots, s_{2010} + 201$. Από την υπόθεση του προβλήματος βρίσκουμε ότι $s_{2010} \le 19 \cdot 201$ και συνεπώς τα στοιχεία του S δεν υπερβαίνουν το $19 \cdot 201 + 201 = 4020$. Αν το S έχει 4020 στοιχεία, τότε $S = \{1, 2, \ldots, 4020\}$ και επομένως έχουμε $s_r = 201$ για κάποιο δείκτη r, οπότε το ζητούμενο ισχύει με $n = 1$ και $m = r$. Διαφορετικά, δύο από τους ακεραίους $s_1 < s_2 < \cdots < s_{2010}$ και $s_1 + 201 < s_2 + 201 < \cdots < s_{2010} + 201$ είναι ίσοι μεταξύ τους. Κατά συνέπεια έχουμε $s_j = s_i + 201$ για κάποιους δείκτες i και j και το ζητούμενο ισχύει με $n = i + 1$ και $m = j$.

Πρόβλημα 5: Παρατηρώντας ότι $A^3 + A^2 + A + I = (A + I)(A^2 + I)$, η δοσμένη σχέση γράφεται $\det(A + I)\det(A^2 + I) = 1$. Αφού τα στοιχεία των πινάκων $A + I$ και $A^2 + I$ είναι ακέραιοι αριθμοί, οι ορίζουσες των πινάκων αυτών είναι επίσης ακέραιοι αριθμοί και συνεπώς είτε είναι και οι δύο ίσες με 1, είτε είναι και οι δύο ίσες με -1. Έστω $\chi_A(x) = x^2 - px + q$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A, όπου $p = \mathrm{tr}\,(A)$ και $q = \det(A)$ είναι το ίχνος και η ορίζουσα του A, αντίστοιχα. Έχουμε $\det(A + I) = \chi_A(-1) = p + q + 1$ και, γράφοντας $A^2 + I = (A - \mathrm{i}I)(A + \mathrm{i}I)$, βρίσκουμε ότι

$$\det(A^2 + I) \;=\; \det(A - \mathrm{i}I)\det(A + \mathrm{i}I) \;=\; \chi_A(\mathrm{i})\,\chi_A(-\mathrm{i}) \;=\; p^2 + (q - 1)^2.$$

Από τη δεύτερη ισότητα προκύπτει ότι $\det(A^2 + I) \ge 0$ και συνεπώς, από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι $\det(A + I) = \det(A^2 + I) = 1$. Επιπλέον, από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε $p + q = 0$ και $p^2 + (q - 1)^2 = 1$. Αφού οι p και q είναι ακέραιοι, συμπεραίνουμε ότι $p \in \{0, -1\}$ και $q \in \{0, 1\}$. Ο μηδενικός πίνακας και ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

δείχνουν ότι οι τιμές αυτές για το ίχνος και την ορίζουσα του A είναι εφικτές.