Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

31 Ιανουαρίου 2015

Πρόβλημα 1: Υπολογίστε την $n \times n$ ορίζουσα

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_1 & \cdots & x_n + y_1 \\ (x_1+y_1)(x_1+y_2) & (x_2+y_1)(x_2+y_2) & \cdots & (x_n+y_1)(x_n+y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_1+y_1)\cdots(x_1+y_{n-1}) & (x_2+y_1)\cdots(x_2+y_{n-1}) & \cdots & (x_n+y_1)\cdots(x_n+y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

για πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Πρόβλημα 2: Δίνεται διαφορίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ και τέτοια ώστε

$$\int_1^x f(t)dt \;=\; f(x) \,+\, \frac{1}{2}\big(f(x)\big)^2 \,-\, 3/2$$

για κάθε $x > 0$.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x$.

Πρόβλημα 3: Για θετικούς ακεραίους n θέτουμε $f(n) = \sum_{d|n} (-1)^{\frac{d-1}{2}}$, όπου στο άθροισμα το d διατρέχει όλους τους περιττούς θετικούς διαιρέτες του n. Προσδιορίστε όλους τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους $f(n) = 0$.

Πρόβλημα 4: Για $p > 0$ η συνάρτηση Γάμμα ορίζεται ως

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx.$$

Θεωρήστε γνωστό ότι $\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p)$ για κάθε $p > 0$ και ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

(α) Δείξτε ότι $\Gamma(p + \frac{1}{2}) < \Gamma(p)\sqrt{p}$ για κάθε $p > 0$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}} \;<\; \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} \;<\; \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Πρόβλημα 5: Δίνονται σύνολο S με n στοιχεία και μη κενά υποσύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ του S. Δείξτε ότι υπάρχουν μη κενά, ξένα μεταξύ τους σύνολα δεικτών $I, J \subseteq \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ τέτοια ώστε $\cup_{i\in I} A_i = \cup_{j\in J} A_j$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Θεωρούμε τη δοσμένη ορίζουσα ως πολυώνυμο στις μεταβλητές $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Αφου η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες αν $x_i = x_j$ για δύο διαφορετικούς δείκτες i και j, το πολυώνυμο αυτό διαιρείται με το $x_j - x_i$ για $1 \leq i < j \leq n$ και συνεπώς με το γινόμενο $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$. Εύκολα υπολογίζουμε ότι ο συντελεστής του μονωνύμου $x_n^{n-1} x_{n-1}^{n-2} \cdots x_2$ στο πολυώνυμο αυτό είναι ίσος με 1 και συμπεραίνουμε ότι η δοσμένη ορίζουσα είναι ίση με $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_j - x_i)$, άρα ανεξάρτητη των $y_1, \ldots, y_{n-1}$.

Πρόβλημα 2: (α) Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, με παραγώγιση των δύο μελών της δεδομένης ισότητας λαμβάνουμε

$$f(x) \;=\; f'(x) + f(x) f'(x)$$

για κάθε $x > 0$. Επομένως, έχουμε

$$f'(x) \;=\; \frac{f(x)}{1 + f(x)} > 0 \tag{1}$$

για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Επειδή η f είναι διαφορίσιμη, μέσω της (1) ορίζεται και η δεύτερη παράγωγος της f και ισχύει

$$f''(x) \;=\; \frac{f'(x)}{(1 + f(x))^2} > 0 \tag{2}$$

για κάθε $x > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

(β) Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $(0, +\infty)$, έχουμε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ και συνεπώς

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)/x \;=\; \lim_{x \to +\infty} f'(x) \;=\; \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1 + f(x)} \;=\; \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{1 + f(x)}\right) \;=\; 1.$$

Πρόβλημα 3: Παρατηρούμε ότι $f(mn) = f(m) f(n)$ αν οι m και n είναι σχετικώς πρώτοι και υπολογίζουμε ότι $f(2^r) = 1$, ότι $f(p^r) = r + 1$ για κάθε πρώτο αριθμό p της μορφής $p = 4k + 1$ και ότι για κάθε πρώτο αριθμό q της μορφής $q = 4k + 3$ έχουμε $f(q^r) = 1$ αν ο r είναι άρτιος και $f(q^r) = 0$ αν ο r είναι περιττός. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι $f(n) = 0$ και μόνο αν ο n διαιρείται από τον q^r αλλά όχι από τον q^{r+1} για κάποιο πρώτο της μορφής $q = 4k + 3$ και κάποιον περιττό θετικό ακέραιο r.

Πρόβλημα 4: (α) Με τη βοήθεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma(p + \frac{1}{2}) \;&=\; \int_0^\infty \sqrt{x} \cdot x^{p-1} e^{-x}\, dx \;\leq\; \left(\int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx \cdot \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\, dx \right)^{1/2} \\
&=\; (\Gamma(p+1)\, \Gamma(p))^{1/2} \;=\; \sqrt{p}\, \Gamma(p).
\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2\ 2^{2n}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!2^n}\times\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{n!2^n}\\ &= \frac{1}{n!}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(n-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}n!}\,\Gamma(\frac{1}{2})\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots(n-\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

Εφαρμοζοντας διαδοχικά την ταυτότητα $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ για $p=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots,n-\frac{1}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}n!}.$$

Εφόσον $\Gamma(1)=1$, από την $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ έχουμε επαγωγικά ότι $\Gamma(n+1)=n!$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) για $p=n+\frac{1}{2}$ παίρνουμε

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1)} > \frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{2})}}.$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) για $p=n$ παίρνουμε

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}n\Gamma(n)} < \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \qquad \square$$

Πρόβλημα 5: Έστω $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$. Θεωρούμε το ομογενές σύστημα των n γραμμικών εξισώσεων

$$\sum_{r\in\{1,\dots,n+1\}:\ a_k\in A_r} x_r = 0, \qquad\qquad 1\le k\le n$$

σε $n+1$ αγνώστους $x_1,x_2,\dots,x_{n+1}\in\mathbb{R}$. Ως γνωστόν, ένα τέτοιο σύστημα έχει τουλάχιστον μία μη μηδενική λύση $(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})$. Έστω $I=\{i : x_i>0\}$ και $J=\{j : x_j<0\}$ και έστω $y_j=-x_j$ για $j\in J$. Προφανώς τα I και J είναι μη κενά, ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόλου $\{1,2,\dots,n+1\}$ και για κάθε $k\in\{1,2,\dots,n\}$ ισχύει

$$\sum_{i\in I:\ a_k\in A_i} x_i = \sum_{j\in J:\ a_k\in A_j} y_j.$$

Από την ισότητα αυτή έπεται ότι $a_k\in\cup_{i\in I}A_i$ αν και μόνο αν $a_k\in\cup_{j\in J}A_j$ για κάθε k, οπότε $\cup_{i\in I}A_i=\cup_{j\in J}A_j$.