Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής της ΕΜΕ για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

28 Ιανουαρίου 2017

Πρόβλημα 1: Δίνεται ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \ldots$ θετικών αριθμών για την οποία ισχύει

$$a_n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e$. Υπολογίστε το $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

Πρόβλημα 2: Να εξετάσετε αν είναι σωστή η ακόλουθη πρόταση: Αν $f(x), g(x)$ είναι πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές τα οποία δεν έχουν κοινή μιγαδική ρίζα, τότε υπάρχει ακέραιος d τέτοιος ώστε $\mu\kappa\delta(f(n), g(n)) \leq d$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 3: Δίνονται $n \times n$ πίνακες A, B με στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, τέτοιοι ώστε $A^2 = B^2$ και $\lambda AB + \mu BA = I_n$ για κάποια $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda \neq \mu$, δείξτε ότι $AB = BA$.

Πρόβλημα 4: Θεωρούμε συνεχείς συναρτήσεις $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Αν η f είναι (ασθενώς) φθίνουσα στο $[a, b]$ και $0 \leq g(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [a, b]$, δείξτε ότι

$$\int_{b-\mu}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{b} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{a}^{a+\mu} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

όπου $\mu := \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Πρόβλημα 5: Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k} \right)^2 \leq (3 + 2\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

για $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: *Πρώτη λύση.* Αθροίζοντας τη σχέση για το a_n για $n \geq 1$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{a_k}{k+2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{a_k}{k+2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k(k+1)}{k+2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+2},$$

οπότε

$$e - a_0 \;=\; e - a_1,$$

και άρα

$$a_0 \;=\; a_1.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα πάλι τη δοθείσα σχέση προκύπτει ότι

$$a_{n-1} - a_n \;=\; \sum_{k=n-2}^{\infty}\frac{a_k}{k+2} - \sum_{k=n-1}\frac{a_k}{k+2} \;=\; \frac{a_{n-2}}{n}$$

για κάθε $n \in \{2, 3, \ldots\}$, από όπου με επαγωγή στο n συμπεραίνει κανείς ότι

$$a_n \;=\; \frac{a_0}{n!}$$

για $n \geq 0$. Από τη σχέση $e = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ προκύπτει τώρα ότι $a_0 = 1$ και κατόπιν

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{3^n} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/3)^n}{n!} \;=\; e^{1/3}.$$

Δεύτερη λύση. Όπως στην πρώτη λύση βρίσκουμε ότι

$$a_0 \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+2} \;=\; a_1.$$

Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση για το a_n με z^n και αθροίζοντας για $n = 1, 2, \ldots$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{a_k}{k+2}z^j \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{k+1}\frac{a_k}{k+2}z^n \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+2}\cdot\frac{z-z^{k+2}}{1-z}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $1-z$ και θέτοντας $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ παίρνουμε

$$(1-z)(A(z)-a_0) \;=\; a_0 z - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+2}}{k+2}$$

ή

$$(1-z)A(z) \;=\; -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+2}-1}{k+2} \;=\; -\int_1^z uA(u)du.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $-A(z)+(1-z)A'(z) = -zA(z)$, δηλαδή $A'(z) = A(z)$, οπότε $A(z) = ce^z$. Έχουμε $c = 1$ από την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e$, οπότε $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = A(1/3) = e^{1/3}$.

Πρόβλημα 2: Η πρόταση είναι σωστή. Από την υπόθεση προκύπτει ότι $\mu\kappa\delta(f(x), g(x)) = 1$ στο $\mathbb{Q}[x]$. Κατά συνέπεια, υπάρχουν $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ τέτοια ώστε $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$. Πολλαπλασιάζοντας αυτή την ισότητα με κατάλληλο θετικό ακέραιο d βρίσκουμε $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ τέτοια ώστε $p(x)f(x) + q(x)g(x) = d$ και προφανώς $\mu\kappa\delta(f(n), g(n)) \le d$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 3: Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά και από δεξιά την ισότητα $\lambda AB + \mu BA = I_n$ με A, αφαιρώντας κατά μέλη, παρατηρώντας ότι $BA^2 = B^3 = A^2B$ και λαμβάνοντας υπόψην ότι $\lambda - \mu \neq 0$ βρίσκουμε ότι $A(AB - BA) = O$. Εργαζόμενοι ομοίως βρίσκουμε ότι $B(AB - BA) = O$. Επομένως,

$$AB - BA \ = \ I_n \cdot (AB - BA) \ = \ (\lambda AB + \mu BA) \cdot (AB - BA) \ = \ O.$$

Πρόβλημα 4: Έστω

$$H(x) := \int_a^x f(y)g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad G(x) := \int_a^x g(y)\,\mathrm{d}y, \qquad F(x) := \int_a^{a+G(x)} f(y)\mathrm{d}y.$$

Τότε $F(a) = G(a) = H(a) = 0$. Επίσης

$$H'(x) = f(x)g(x), \qquad G'(x) = g(x)$$

και

$$F'(x) = f(a + G(x))G'(x) = f(a + G(x))g(x),$$

από το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και τον κανόνα της αλυσίδας. Από το γεγονός ότι $g(x) \le 1$ για κάθε $x \in [a, b]$ προκύπτει καταρχήν ότι $G(x) \le x - a$, και άρα $a + G(x) \le x$, κατόπιν από την μονοτονία της f ότι $f(a + G(x)) \ge f(x)$ και τέλος επειδή $g(x) \ge 0$ για κάθε x παίρνει κανείς ότι

$$H'(x) \le F'(x),$$

για κάθε $x \in (a, b)$. Όμως τότε από το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

$$H(x) = \int_a^x H'(y)\,\mathrm{d}y \le \int_a^x F'(y)\,\mathrm{d}y = F(x)$$

για κάθε $x \in [a, b]$, που για $x = b$ δίνει την δεύτερη ανισότητα. Όμοια για την πρώτη.

Πρόβλημα 5: Συμβολίζουμε με $|x|$ την Ευκλείδεια νόρμα του $x \in \mathbb{R}^n := \mathbb{R}^{n\times 1}$. Θέτοντας

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{pmatrix},$$

έχουμε να δείξουμε ότι $|Ax|^2 \le (3 + 2\sqrt{2})\,|x|^2$ για $x \in \mathbb{R}^n$. Θέτοντας

$$\|Q\| \ := \sup_{x\in\mathbb{R}^n:\,|x|=1} |Qx|$$

για $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, έχουμε, ισοδύναμα, να δείξουμε ότι $\|A\| \le 1 + \sqrt{2}$. Παρατηρώντας ότι $AA^t = A + A^t - J$, όπου J είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στην κύρια διαγώνιο $1, 1/2, \ldots, 1/n$ και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα βρίσκουμε ότι

$$\|AA^t\| \ \le \ \|A\| \ + \ \|A^t\| \ + \ 1.$$

Από τις βασικές ιδιότητες $\|Q\| = \|Q^t\| = \|QQ^t\|^{1/2}$ της $\|\cdot\|$ συμπεραίνουμε ότι $\|A\|^2 \le 2\|A\| + 1$, οπότε $\|A\| \le 1 + \sqrt{2}$.