Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών

24 Φεβρουαρίου 2024

Πρόβλημα 1. Για πίνακα $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ συμβολίζουμε με $f(A)$ το πλήθος των ζευγών $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ για τα οποία το $a_{i,j}$ είναι περιττός αριθμός. Δοθέντος θετικού ακεραίου n, βρείτε τη μέγιστη τιμή του $f(A)$ αν $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ και υπάρχει $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ τέτοιος ώστε $AB = I_n$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ πραγματικών αριθμών με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)}{n^2}$$

για $n \geq 1$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\geq 1}$ συγκλίνει.

Πρόβλημα 3. Δίνονται θετικός ακέραιος n, πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $A^n = O$ και πολυώνυμα $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ με $P(0) \neq 0$ και $Q(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ η εξίσωση

$$P(A)X - XQ(A) = B$$

έχει μοναδική λύση $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Πρόβλημα 4. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0, 1] \to [0, 1]$ τέτοια ώστε:

(α) για κάθε $y \in [0, 1]$ η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει είτε ακριβώς μία λύση $x \in [0, 1]$, είτε ακριβώς τρεις λύσεις $x \in [0, 1]$, και

(β) για τουλάχιστον ένα $y \in [0, 1]$ η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει ακριβώς τρεις λύσεις $x \in [0, 1]$;

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\ell := \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 \left\{(1 + x^n)^{1/n} - 1\right\} dx$$

υπάρχει και $\ell \in (27/36, 31/36)$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Ζητάμε να βρούμε τη μέγιστη τιμή του $f(A)$ αν $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ και $\det(A) = \pm 1$. Θα δείξουμε ότι η μέγιστη αυτή τιμή ισούται με $n^2 - n + 1$. Πράγματι, για τον $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

έχουμε $f(A) = n^2 - n + 1$ και, αφαιρώντας την πρώτη γραμμή από καθεμιά από τις υπόλοιπες, βρίσκουμε ότι $\det(A) = (-1)^{n-1}$. Ας υποθέσουμε ότι $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ και ότι $f(A) > n^2 - n + 1$. Τότε, το πολύ $n - 2$ στοιχεία του A είναι άρτιοι αριθμοί και συνεπώς υπάρχουν δύο γραμμές του A οι οποίες αποτελούνται μόνο από περιττούς αριθμούς. Αφαιρούμε τη μία από τις δύο αυτές γραμμές από την άλλη και βρίσκουμε ότι $\det(A) \in 2\mathbb{Z}$.

Πρόβλημα 2: Αφαιρώντας κατά μέλη τις

$$n^2 a_{n+1} = 2 \sum_{k=1}^{n} k a_k$$

$$(n-1)^2 a_n = 2 \sum_{k=1}^{n-1} k a_k$$

βρίσκουμε ότι $n^2 a_{n+1} - (n-1)^2 a_n = 2n a_n$ ή, ισοδύναμα, ότι $a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) a_n$ για $n \geq 1$. Έπεται ότι η (a_n) είναι αύξουσα και ότι

$$a_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{1/k^2} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k^2\right) < e^2$$

για $n \geq 1$. Κατά συνέπεια, η (a_n) συγκλίνει ως αύξουσα και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Πρόβλημα 3: Αρκεί να δείξουμε ότι η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ με $T(X) = P(A)X - XQ(A)$ για $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ έχει μηδενικό πυρήνα. Πράγματι, έστω ότι $P(A)X = XQ(A)$. Τότε, $(P(A))^m X = X(Q(A))^m$ για κάθε θετικό ακέραιο m και συνεπώς $(P(A))^n X = O$. Όμως, ο πίνακας $P(A)$ είναι αντιστρέψιμος, αφού ισούται με το άθροισμα του $P(0)\, I_n$ και ενός μηδενοδύναμου πίνακα, και $P(0) \neq 0$. Κατά συνέπεια, ο $(P(A))^n$ είναι επίσης αντιστρέψιμος και η $(P(A))^n X = O$ δίνει $X = O$.

Πρόβλημα 4: Υπάρχει. Θεωρούμε αυθαίρετη γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ στοιχείων του ανοιχτού διαστήματος $(0, 1)$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to-\infty} a_n = 0$ και $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$. Θέτουμε $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(a_n) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και

$$f\left(\frac{a_{n-1} + a_n}{2}\right) = a_{n+1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και επεκτείνουμε γραμμικά την f σε κάθε κλειστό διάστημα $[a_{n-1}, (a_{n-1} + a_n)/2]$ και $[(a_{n-1} + a_n)/2, a_n]$. Τότε, η $f : [0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχής και η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση $x \in [0, 1]$ για κάθε $y \in \{0, 1\}$ και ακριβώς τρεις λύσεις $x \in [0, 1]$ για κάθε $y \in (0, 1)$.

Πρόβλημα 5: Η ακολουθία στο αριστερό μέλος, αφού κάνουμε την αντικατάσταση $y = x^n$ στο ολοκλήρωμα, γράφεται

$$\int_0^1 n\left\{(1+y)^{1/n} - 1\right\} y^{-1+\frac{1}{n}}\, dy.$$

Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα, για $n \to \infty$, συγκλίνει στο $y^{-1}\log(1+y)$ και είναι απολύτως φραγμένη ομοιόμορφα ως προς n από το 1 (χρησιμοποιούμε την $(1+y)^a \leq 1 + ay$ για κάθε $a \in [0,1]$ και $y \geq 0$). Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, η ακολουθία συγκλίνει στο

$$\ell := \int_0^1 \frac{\log(1+y)}{y}\, dy.$$

Σε κάθε διάστημα $[0,r]$ με $r \in (0,1)$, η δυναμοσειρά της $y^{-1}\log(1+y)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και ισούται με

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}y^{k-1}.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμά της στο $[0,r]$ ισούται με $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}r^k$. Το όριο αυτής της σειράς για $r \nearrow 1$ ισούται με $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}$ αφού η σειρά είναι συνεχής συνάρτηση του r στο $[0,1]$.

Έστω $a_k := (-1)^{k-1}/k^2$ για κάθε θετικό ακέραιο k. Επειδή η $(|a_k|)_{k\geq 1}$ είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία, έχουμε $a_1 - a_2 < \ell < a_1 - a_2 + a_3$, που είναι η ζητούμενη.