Προβλήματα για το διαγωνισμό επιλογής
για τη Μαθηματική Ολυμπιάδα πρωτοετών και δευτεροετών φοιτητών
25 Ιανουαρίου 2025

Πρόβλημα 1. Σωστό ή λάθος; Αν $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ είναι πίνακες τέτοιοι ώστε $(AB)^2 = I_3$, τότε $(BA)^2 = I_3$.

Πρόβλημα 2. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,+\infty)$. Αν

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = 3\sqrt{5},$$

δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 (f(x))^3 dx\right)\left(\int_0^1 (f(x))^5 dx\right) \geq 2025.$$

Πρόβλημα 3. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται θέτοντας $a_0 = 1$ και $a_k = k(a_{k-1} + 1)$ για $k \geq 1$. Να υπολογιστεί το άπειρο γινόμενο

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{a_k}\right).$$

Πρόβλημα 4. Δίνονται θετικός ακέραιος n και $r \in \{0, 1, \dots, n\}$. Βρείτε όλους τους ακεραίους k που έχουν την εξής ιδιότητα: Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τάξης r υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τάξης k, τέτοιος ώστε $ABA = A$.

Πρόβλημα 5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \in (0,1)$ τέτοια ώστε $a < b$ και

$$\frac{1}{f'(a)} + \frac{2024}{f'(b)} = 2025.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Λύσεις

Πρόβλημα 1: Η πρόταση είναι σωστή. Μας δίνεται ότι $(AB)(AB) = I_3$ ή, ισοδύναμα, ότι $(ABA)B = I_3$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι $\det(ABA)\det(B) = \det(I_3) = 1$ και επομένως ότι $\det(B) \neq 0$. Άρα, ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και $B^{-1} = ABA$, οπότε $(BA)^2 = (BA)(BA) = B(ABA) = I_3$.

Πρόβλημα 2: Εφαρμόζουμε δύο φορές την ανισότητα Chauchy–Schwarz και βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\int_0^1 (f(x))^3 dx\right)\left(\int_0^1 (f(x))^5 dx\right) &\geq \left(\int_0^1 (f(x))^{3/2}(f(x))^{5/2} dx\right)^2 = \left(\int_0^1 (f(x))^4 dx\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 (f(x))^4 dx\right)^2 \left(\int_0^1 dx\right)^2 \geq \left(\int_0^1 (f(x))^2 dx\right)^4 = (3\sqrt{5})^4 \\ &= 2025.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3: Παρατηρούμε ότι

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{a_k} = \prod_{k=1}^{n}\frac{a_k+1}{k(a_{k-1}+1)} = \frac{a_n+1}{n!(a_0+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_n}{n!}+\frac{1}{n!}\right).$$

Επίσης,

$$\frac{a_k}{k!} = \frac{a_{k-1}}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!}$$

για $k \geq 1$. Αθροίζουμε για $1 \leq k \leq n$ και βρίσκουμε ότι

$$\frac{a_n}{n!} = \frac{a_0}{0!} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}.$$

Συνδυάζουμε τα παραπάνω και συμπεραίνουμε ότι

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \overset{n\to\infty}{\to} \frac{e+1}{2}.$$

Άρα, το δοσμένο άπειρο γινόμενο ισούται με $(e+1)/2$.

Πρόβλημα 4: Θα δείξουμε ότι οι ζητούμενοι ακέραιοι είναι οι $k \in \{r, r+1, \ldots, n\}$. Για $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ θα συμβολίζουμε με J_m τον $n \times n$ διαγώνιο πίνακα τάξης m με στοιχεία επί της κύριας διαγωνίου $1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $r \leq k \leq n$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τάξης r υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A = PJ_rQ^{-1}$. Τότε,

$$ABA = A \Leftrightarrow (PJ_rQ^{-1})\cdot B \cdot (PJ_rQ^{-1}) = PJ_rQ^{-1} \Leftrightarrow J_r \cdot (Q^{-1}BP) \cdot J_r = J_r.$$

Η τελευταία ισότητα επαληθεύεται για πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ με $Q^{-1}BP = J_k$, δηλαδή για τον $B = QJ_kP^{-1}$, ο οποίος έχει τάξη k.

Το αντίστροφο ισχύει επίσης, αφού αν $ABA = A$ και $\operatorname{rank}(B) = k$, τότε $r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(ABA) \leq \operatorname{rank}(B) = k$.

Πρόβλημα 5: Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε, $g(0) = g(1) = 0$ και συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. Επιπλέον, είτε το ξ είναι μοναδικό, είτε υπάρχουν $a, b \in (0,1)$ τέτοια ώστε $a < b$ και $g'(a) = g'(b) = 0$. Στη δεύτερη περίπτωση το ζητούμενο έπεται άμεσα, αφού $f'(a) = f'(b) = 1$.

Στην πρώτη περίπτωση, η g λαμβάνει την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή της στο ξ και g' η λαμβάνει όλες τις τιμές του ανοικτού διαστήματος $(-\varepsilon, \varepsilon)$ στο $(0, 1)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Αφού $f'(x) = g'(x) + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$, η f' λαμβάνει όλες τις τιμές του ανοικτού διαστήματος $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ στο $(0, 1)$. Στο διάστημα $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ μπορούμε να επιλέξουμε A και B έτσι ώστε

$$\frac{1}{A} + \frac{2024}{B} = 2025,$$

με $A < 1 < B$, αν η g λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της στο ξ, και $A > 1 > B$, αν η g λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της στο ξ. Επιλέγοντας έπειτα $a, b \in (0, 1)$ τέτοια ώστε $f'(a) = A$ και $f'(b) = B$, έχουμε $a < b$ και

$$\frac{1}{f'(a)} + \frac{2024}{f'(b)} = 2025.$$