Θεωρία Αριθμών για Ολυμπιάδες

Ζαδίκ Ηλίας

Άσκηση 1.
Να βρεθεί άπειρη μη σταθερή αριθμητική πρόοδος τέτοια ώστε κανένας της όρος να μην είναι το άθροισμα δύο:
(i) τετραγώνων
(ii) κύβων
(iii) n-οστών δυνάμεων

Άσκηση 2.
Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ τέτοια ώστε το $\mathbb{Z} \setminus \{ax^n + by^n \,|x, y \in \mathbb{Z}\}$ να είναι πεπερασμένο. Να δειχθεί ότι $n = 1$.

Άσκηση 3.
Να βρεθεί ο ελάχιστος θετικός ακέραιος k τέτοιος ώστε να υπάρχουν $x_1, \dots, x_\kappa \in \mathbb{Z}$ με $x_1^3 + \cdots + x_k^3 = 2002^{2002}$.

Άσκηση 4.
Έστω η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορισμένη ως εξής: $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$. Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ακέραιοι που είναι σχετικά πρώτοι με κάθε όρο της ακολουθίας.

Άσκηση 5.
Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $a_1, \dots, a_k$ στοιχεία του $\{1, 2, \dots, n\}$ $(k \geq 1)$, τέτοια ώστε $n \mid a_i\,(a_{i+1} - 1)$ $\forall i = 1, \dots, k-1$. Να δειχθεί ότι $n \nmid a_k\,(a_1 - 1)$.

Άσκηση 6.
Να δειχθεί ότι $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ η ακολουθία $2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots$ είναι τελικά σταθερή $(\mod n)$.

Άσκηση 7.
(i) Να δειχθεί ότι υπάρχουν άπειροι $n \in \mathbb{N}$, τέτοιοι ώστε να $\exists$ πρώτος p με $p \mid n^4 + 1$ και $p > 2n$.
(ii) Το ίδιο με την απαίτηση $p \mid n^2 + 1$ και $p > 2n + \sqrt{2n}$.

Άσκηση 8.
Έστω $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $(p, q) = 1$. Να δειχθεί ότι $\displaystyle\sum_{i=1}^{q-1} \left\lfloor \frac{pi}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)\,(q-1)}{2}$.

Άσκηση 9.
Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με $0 < \det(A) < b_1 \cdots b_n$ $(b_i > 0)$. Να δειχθεί ότι $\exists x \in \mathbb{Z}^n$ με $Ax \in [-b_1, b_1] \times \cdots \times [-b_n, b_n]$. Δηλαδή αν $Ax = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$, τότε $|t_i| \leq b_i \;\forall i$.

(Hint: Minkowski)

Άσκηση 10.

(i) Έστω $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ θετικοί ακέραιοι. Να δειχθεί ότι $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\operatorname{lcm}(a_i, a_{i+1})} < 1 - \frac{1}{2^n}$

(ii) Έστω $x_1, \ldots, x_k$ $(k \geq 1)$ στοιχεία του $\{1, 2, \ldots, m\}$ Αν $\forall l, 1 \leq l \leq m$, δεν $\exists 1 \leq i < j \leq k$ με $x_i \mid l$ και $x_j \mid l$ να δειχθεί ότι $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} \leq \frac{3}{2}$.

Άσκηση 11.
Αν $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $a^n + n \mid b^n + n \ \forall n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι $a = b$.

Άσκηση 12.
Καλούμε το $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ ορατό από το $(0, 0)$, αν $\gcd(x, y) = 1$.

(i) Να δειχθεί ότι $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0} \ \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ώστε η απόστασή του από το τυχαίο ορατό σημείο από το $(0, 0)$ να είναι τουλάχιστον n.

(ii) Να βρεθεί η πιθανότητα αν επιλεγεί ένα ακέραιο σημείο $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ να είναι ορατό από την αρχή των αξόνων $(0, 0)$.

Άσκηση 13.
Να δειχθεί ότι ο d-διάστατος κύβος μπορεί να διαμεριστεί σε n d-διάστατους κύβους για όλα τα αρκετά μεγάλα n.

(Hint: Sylvester Theorem)

Άσκηση 14.
(Βασικό λήμμα)
Έστω $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x \in \mathbb{Z}$. Να δειχθεί ότι $\forall p$ τ.ω. $p \mid \Phi_n(x)$ είτε $p \equiv 1 \pmod{n}$, είτε $p \mid n$. ($\Phi_n(x)$ - n-οστό κυκλοτομικό πολυώνυμο).
(Εφαρμογές)

(i) $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\exists$ άπειροι πρώτοι p με $p \equiv 1 \pmod{n}$.

(ii) Να λυθεί ως προς $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ η: $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$.

Άσκηση 15.
Αν $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $ab + 1 \mid a^2 + b^2$, να δειχθεί ότι το πηλίκο είναι τέλειο τετράγωνο.

Άσκηση 16.
Έστω $x, y \in \mathbb{Z}_{>0}$ με $xy \mid x^2 + y^2 + 1$. Να δειχθεί ότι $\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} = 3$.