Ασκήσεις

1. Μπορεί ένα αριθμήσιμο σύνολο να έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος υποσυνόλων έτσι ώστε η τομή οποιονδήποτε δύο από αυτά να είναι πεπερασμένη;

2. Πόσα ξένα οχτάρια χωράνε στο επίπεδο (αριθμήσιμα ή υπεραριθμίσιμα);

3. Προσπαθούμε να βάψουμε μαύρα όλα τα σημεία του επιπέδου με μία (άπειρη) κυκλική βούρτσα. Κάθε φορά που το κέντρο της βούρτσας ακουμπάει σε ένα σημείο P του επιπέδου βάφονται μαύρα όλα τα σημεία που απέχουν άρρητη απόσταση από το P. Πόσες φορές πρέπει να ακουμπήσουμε τη βούρτσα στο επίπεδο ώστε να βαφούν όλα τα σημεία μαύρα;

4. Υποθέστε ότι κάθε σημείο στο επίπεδο είναι βαμένο κόκκινο, πράσινο ή μπλέ. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 σημεία που απέχουν 1 μεταξύ τους και έχουν το ίδιο χρώμα.

5. Έστω S ένα υποσύνολο του χώρου τέτοιο ώστε η τομή του S με οποιοδήποτε επίπεδο είναι είτε κενή είτε σημείο είτε κύκλος. Δείξτε ότι το S είναι σφαίρα.

6. Είναι δυνατό να βρούμε μία (άπειρη) ακολουθία από δίσκους στο επίπεδο τέτοιους ώστε: ι) Τα κέντρα τους δεν συσσωρεύονται σε σημείο του επιπέδου, ιι) Η συνολικό άθροισμα των εμβαδών τους είναι πεπερασμένο ιιι) Κάθε ευθεία του επιπέδου τέμνει τουλάχιστον ένα δίσκο.

7. Εκατό μυρμήγκια κινούνται με σταθερή ταχύτητα ενός μέτρου την ώρα σε μία ράβδο που έχει μήκος 1 μέτρο. Όταν δύο μυρμήγκια συγκρούονται αλλάζουν κατεύθυνση. Όταν ένα μυρμήγκι φτάνει στην άκρη της ράβδου πέφτει. Πόσο χρόνο θα πάρει το πολύ για να πέσουν όλα τα μυρμήγκια;

8. Έστω ότι έχουμε τοποθετήσει 100 ξένους δίσκους ακτίνας 1 σε ένα ορθογώνιο έτσι ώστε να μην είναι δυνατό να προσθέσουμε άλλον ένα δίσκο ακτίνας 1 χωρίς να τέμνει τους προηγούμενους. Δείξτε ότι μπορούμε να καλύψουμε το ορθογώνιο με 400 δίσκους ακτίνας 1.

9. Έστω n σημεία στο επίπεδο έτσι ώστε καμία ευθεία του επιπέδου δεν περιέχει ακριβώς 2 σημεία απ΄ αυτά. Δείξτε ότι όλα τα σημεία είναι συνευθειακά.

10. Έστω 5 διαφορετικά σημεία στη σφαίρα. Δείξτε ότι υπάρχει κάποιο κλειστό ημισφαίριο που περιέχει τουλάχιστον 4 απ΄ αυτά.

11. Ένα πεπερασμένο σύνολο από δίσκους καλύπτει ένα υποσύνολο X του επιπέδου. Δείξτε ότι μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο S από ξένους δίσκους τ.ω.

$$X \subset \bigcup \{3D : D \in S\}$$

όπου με $3D$ συμβολίζουμε το δίσκο με το ίδιο κέντρο όπως ο D και τριπλάσια ακτίνα.

12. Έστω n σημεία στο επίπεδο. Δείξτε ότι το πολύ $2n^{3/2}$ ζευγάρια σημείων έχουν απόσταση 1.

13. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που να αυξάνει τις αποστάσεις (δηλ. $|f(a) - f(b)| \geq \|a - b\|$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}^2$).

14. Λέμε ότι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι καλό όταν τουλάχιστον μία πλευρά του έχει ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι αν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μπορεί να υποδιαιρεθεί σε καλά παραλληλόγραμμα τότε είναι και το ίδιο καλό.

15. Δύο άτομα παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι: Έχουν μία σοκολάτα που ένα γωνιακό τετραγωνάκι της είναι από κερί. Διαδοχικά ο κάθε παίκτης κόβει τη σοκολάτα οριζόντια ή κάθετα και τρώει το ένα από τα 2 κομμάτια. Χάνει αυτός που του μένει το τετραγωνάκι με το κερί. Ποιός θα κερδίσει;

16. Βρείτε ένα υποσύνολο A του κύκλου και μία απεικόνιση $f : A \to A$ η οποία διατηρεί τις αποστάσεις αλλά δεν είναι επί.

17. Μπορεί το επίπεδο να γραφεί σαν ξένη ένωση τόξων; (ονομάζουμε τόξο την εικόνα μιας συνεχούς και 1-1 συνάρτησης $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$).

18. Κατασκευάζουμε ένα `πύργο' από τούβλα τοποθετώντας κάθε τούβλο είτε ακριβώς πάνω από το προηγούμενο τούβλο ή λίγο δεξιότερα. Μπορούμε να φτιάξουμε ένα τέτοιο πύργο ώστε η κατακόρυφη προβολή της κορυφής στο έδαφος να απέχει ένα χιλιόμετρο από τη βάση;