Προβλήματα Ανάλυσης

1 Ακολουθίες

Ασκηση 1. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός $x_n > 1$ ώστε $(x_n - 1)\ln x_n = n$.
(β) Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln n}{n}$.

Ασκηση 2. Έστω (x_n) φραγμένη ακολουθία. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k \to a$ και $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2 \to a^2$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sin x_k \to \sin a.$$

Ασκηση 3. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποία η ακολουθία $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Δείξτε ότι, για κάθε $s > 1$, η ακολουθία

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^n k^{s-1} a_k$$

συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

Ασκηση 4. Έστω $\alpha \in (0,1]$ και έστω (b_n) φραγμένη ακολουθία που ικανοποιεί την $b_{n+1} \leqslant \alpha b_n + (1-\alpha) b_{n-1}$ για κάθε $n \geqslant 2$. Δείξτε ότι η (b_n) συγκλίνει.

Ασκηση 5. Να βρεθεί το $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} \right)^n$.

Ασκηση 6. Να βρεθεί το

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \left(1 - \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\} \right).$$

Ασκηση 7. Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{2^k}{k}$.

Ασκηση 8. Θεωρούμε την ακολουθία

$$t_n = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n.$$

Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{t_n} \to \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$$

και

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\sqrt{e}}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt[n]{t_n} \to 1.$$

Υπόδειξη: Η συνάρτηση $x \mapsto x \ln x$ είναι αύξουσα και κυρτή στο $[1,\infty)$. Για μια τέτοια συνάρτηση f μπορείτε να συγκρίνετε τα $\sum_{k=1}^n f(k)$ και $\int_1^n f(s)\,ds$.

Ασκηση 9. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι το

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^1 x^n f(x)\,dx}{\int_0^1 x^n dx}$$

υπάρχει. Ποιά είναι η τιμή του;

Ασκηση 10. Έστω $k \geqslant 1$. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ με $a_0 > 0$ και

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}, \qquad n \geqslant 0.$$

Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

Ασκηση 11. Δείξτε ότι η ακολουθία $x_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}} \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ συγκλίνει.

Ασκηση 12. Έστω $a, b > 0$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a(\sin x)^{2n} + b(\cos x)^{2n}}\, dx.$$

Ασκηση 13. Έστω (x_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{x_n}{n}$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

Ασκηση 14. Έστω (a_n) ακολουθία τέτοια ώστε $a_n + \frac{a_{2n}}{2} \to 1$. Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

Ασκηση 15. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_1 \in (0,1)$ και $x_{n+1} = x_n - x_n^{n+1}$. Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$.

Ασκηση 16. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x \in (0,\pi)$ και $x_{n+1} = \sin x_n$. Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n$.

Ασκηση 17. (Seemous 2020) Έστω $p > 1$. Υπολογίστε τα όρια

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\frac{p}{\sqrt[n]{x} + p - 1}\right)^n dx$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \left[L - \int_0^1 \left(\frac{p}{\sqrt[n]{x} + p - 1}\right)^n dx\right].$$

Ασκηση 18. (Seemous 2021) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

(α) Αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) που ορίζεται από την

$$x_n = f\left(\frac{1}{1}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) - \int_1^n f\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

συγκλίνει.

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (y_n) που ορίζεται από την

$$y_n = f\left(\frac{1}{n+1}\right) + f\left(\frac{1}{n+2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2021\, n}\right).$$

Ασκηση 19. (Seemous 2023) Για την ακολουθία

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}}$$

υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n\left(n(\ln(1 + \sqrt{2}) - S_n) - \frac{1}{2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}\right).$$

Ασκηση 20. (Seemous 2024) Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$x_n = \int_0^1 \ln(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx.$$

(α) Αποδείξτε ότι $x_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \geqslant 1$ και $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

(β) Υπολογίστε το $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\ln n}(2 - x_n)$.

Ασκηση 21. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdots \sin\left(\frac{\pi n}{2n}\right) \right)^{1/n}.$$

Ασκηση 22. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n^{3/2}}\right).$$

Ασκηση 23. Έστω (a_n) και (t_n) ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $t_n \to 0$ και

$$a_{n+1} \leqslant c a_n + t_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < c < 1$ είναι μια σταθερά. Αποδείξτε ότι $a_n \to 0$.

Ασκηση 24. Αν a_n είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $e^x + nx = 2$, $n \in \mathbb{N}$, αποδείξτε ότι

$$n a_n \to 1.$$

Ασκηση 25. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} a_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1.$$

Αποδείξτε ότι $\sqrt[3]{n} a_n \longrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Ασκηση 26. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\prod_{k=1}^{n} (n^2 + k^2) \right)^{1/n}.$$

Ασκηση 27. Έστω (x_n) ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με $x_1 \geqslant 0$, που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$x_{n+1} = x_n + \frac{x_n^2}{n^2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Για ποιες τιμές του $x_1 \geqslant 0$ συγκλίνει η (x_n);

Ασκηση 28. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2(a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n)}{n^2}, \qquad n \geqslant 1.$$

Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Ασκηση 29. Αποδείξτε ότι το όριο

$$\ell := \lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^1 \left[(1 + x^n)^{1/n} - 1 \right] dx$$

υπάρχει, και $\ell \in \left(\frac{27}{36}, \frac{31}{36}\right)$.

Ασκηση 30. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2a_{n-1}}{n+1}$$

για κάθε $n \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

2 Σειρές

Ασκηση 31. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, όπου

$$a_k = \int_1^{\infty} \exp\left(-x^{k^2}\right)\, dx.$$

Ασκηση 32. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, όπου

$$a_k = \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt.$$

Ασκηση 33. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}.$$

Ασκηση 34. Εξετάστε αν συγκλίνει η σείρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\log n)}{n}.$$

Ασκηση 35. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right)$.

Ασκηση 36. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Ασκηση 37. Για κάθε $n \geqslant 1$ θέτουμε $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ασκηση 38. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε b_n να είναι το πλήθος των $k \in \mathbb{N}$ για τους οποίους $a_k \geqslant \frac{1}{n}$. Να δειχτεί ότι τουλάχιστον μία από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ αποκλίνει.

Ασκηση 39. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ με $a_0 = 1$ και

$$a_{n+1} = \sin(a_n), \qquad n \geqslant 0.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

Ασκηση 40. Έστω $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια 1-1 συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} = +\infty.$$

Ασκηση 41. Δίνεται ακολουθία θετικών αριθμών $(a_k)_{k\geqslant 0}$ τέτοια ώστε $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = e$ και

$$a_n = \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$.

Ασκηση 42. Δείξτε ότι: για κάθε $m \geqslant 1$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} < \pi.$$

Ασκηση 43. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}$, όπου

$$a_n = \int_0^1 (1-(1-t^n)^{1/n})\,dt.$$

Ασκηση 44. Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = +\infty.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $t>0$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(kt) = +\infty.$$

Ασκηση 45. Θεωρούμε την ακολουθία (x_n) με $x_0 = 1$ και $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ για κάθε $n \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ συγκλίνει και υπολογίστε το άθροισμά της.

Ασκηση 46. Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)2^n}.$$

Ασκηση 47 (IMC 2010)**.** Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}.$$

Ασκηση 48. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$. Υπολογίστε το

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)}.$$

Ασκηση 49. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Είναι η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\left(\frac{x}{k}\right)$$

φραγμένη;

Ασκηση 50. Δείξτε ότι υπάρχουν σταθερές $a, b > 0$ ώστε: για κάθε $n \geqslant 2$,

$$a\log n \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\left(1-(1-2^{-k})^n\right) \leqslant b\log n.$$

Ασκηση 51. Έστω $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ μια φραγμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών και έστω $\rho > 1$. Ορίζουμε

$$B = \{m \geqslant 0 : \alpha_n < \rho^{|n-m|}\alpha_m \text{ για κάθε } n \geqslant 0, n \neq m\}.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n \leqslant \frac{2\rho}{\rho-1}\sum_{m\in B}\alpha_m.$$

Ασκηση 52 (Seemous 2022)**.** Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υπόσυνόλων του $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Να βρείτε για ποια $a>0$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{A\in\mathcal{F}}\frac{1}{\sum_{k\in A} a^k}.$$

Ασκηση 53. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε: (α) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ να συγκλίνει και (β) για κάθε $k \geqslant 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = 0.$$

Δείξτε ότι $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ασκηση 54. Έστω $\phi(x) = d(x, \mathbb{Z})$, η αποσταση του x από τον πλησιέστερο ακέραιο. Να υπολογιστεί το

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}.$$

Ασκηση 55. Έστω (x_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n^2} \leqslant 2.$$

Ασκηση 56. (Seemous 2019) (α) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx.$$

(β) Υπολογίστε το

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \cdots \right).$$

Ασκηση 57. (Seemous 2020) Έστω $0 < a < T$, $D = \mathbb{R} \setminus \{kT + a : k \in \mathbb{Z}\}$ και $f : D \to \mathbb{R}$ μια T-περιοδική και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f' > 1$ στο $(0, a)$ και

$$f(0) = 0, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 1.$$

(α) Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \geqslant 1$ η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση x_n στο διάστημα $(nT, nT + a)$.

(β) Θέτουμε $y_n = nT + a - x_n$ και $z_n = \int_0^{y_n} f(x) \, dx$. Αποδείξτε ότι $y_n \to 0$ και μελετήστε τη σύγκλιση των σειρών

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Ασκηση 58. (Seemous 2021) Έστω $p \in \mathbb{R}$ και (a_n) η ακολουθία που ορίζεται από την

$$a_n = \frac{1}{n^p} \int_0^n |\sin(\pi x)|^x dx.$$

Να βρείτε όλες τις τιμές του p για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Ασκηση 59. (Seemous 2023) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέτοια ώστε $f([0,1]) \subseteq [0,1]$.

(α) Δείξτε ότι για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει μοναδικός $a_n \in (0,1)$ ο οποίος είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = x^n$ και ότι, για την ακολουθία (a_n) που ορίζεται έτσι, ισχύει ότι $a_n \to 1$.

(β) Έστω ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $f(1) = 0$ και $f'(1) < 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ρίζουμε

$$F(x) = \int_x^1 f(t) \, dt.$$

Μελετήστε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (F(a_n))^p$ για τις διάφορες τιμές του $p \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 60. (Seemous 2024) Έστω (x_n) η ακολουθία που ορίζεται από τις $x_1 \in (0,1)$ και $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Να βρείτε τις τιμές του $p \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^p$ συγκλίνει.

Ασκηση 61. Έστω (x_n) ακολουθία πραγματίκών αριθμών με $x_0 = 0$ και $x_{n+1}^3 = x_n^2 - 8$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < +\infty.$$

Ασκηση 62. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ συγκλίνει τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = 0.$$

Ασκηση 63. Έστω (a_n) ακολουθία με $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\log(1/a_n)}$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\log n}$ συγκλίνει.

Ασκηση 64. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant 2e \cdot a_1.$$

Ασκηση 65. Έστω (x_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = +\infty.$$

Ασκηση 66. Έστω (x_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ να συγκλίνει.

3 Απειρογινόμενα, δυναμοσειρές, θεώρημα Taylor

Ασκηση 67. Έστω $a_0 = 5/2$ και $a_k = a_{k-1}^2 - 2$, $k \geqslant 1$. Υπολογίστε το

$$\prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{a_k}\right).$$

Ασκηση 68. Υπολογίστε το

$$\lim_{x\to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\right)^{x^n}.$$

Ασκηση 69. Υπολογίστε το απειρογινόμενο

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

όπου $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ασκηση 70. Δίνεται η δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \qquad |x| < 1.$$

Αποδείξτε ότι

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = (1+x^2) f(x)$$

για $|x| < 1$.

Ασκηση 71. Υπολογίστε την τιμή των

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}, \quad \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+x^{2^n}\right), \quad |x|<1.$$

Ασκηση 72. Υπολογίστε την τιμή των

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right), \quad \prod_{n=1}^{\infty}2^{\frac{(-1)^n}{n}}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Ασκηση 73. Εξετάστε αν συγκλίνουν τα απειρογινόμενα

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Ασκηση 74. Εξετάστε αν συγκλίνουν τα απειρογινόμενα

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{n}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}.$$

Ασκηση 75. Δείξτε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ αποκλίνει παρόλο που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει.

Ασκηση 76. Αποδείξτε ότι αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{a_n^2}{2}\right) \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$$

συγκλίνουν τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει.

Ασκηση 77. Αποδείξτε ότι αν τα απειρογινόμενα $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ και $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ συγκλίνουν τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ συγκλίνουν.

Ασκηση 78. Έστω $x>0$. Θέτουμε $a_1=\frac{1}{1+x}$ και

$$a_n=\frac{n}{x+n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{x-k}{x+k}, \quad n>1.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει και υπολογίστε το άθροισμά της.

Ασκηση 79. Έστω $x>-1$. Εξετάστε αν συγκλίνουν τα απειρογινόμενα

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} \quad \text{και} \quad \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}.$$

Ασκηση 80. Έστω $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{2^n}$, $x\in(-1,1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|f'(x)|\leqslant\dfrac{M}{1-|x|}$ για κάθε $x\in(-1,1)$.

4 Παράγωγος

Ασκηση 81. Έστω $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $f(-1)=f(1)=0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi\in[-1,1]$ ώστε $f(\xi)=(1+\xi^2)f'(\xi)$.

Ασκηση 82. Έστω $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $c_1^k+\cdots+c_n^k>0$ για κάθε $k\geqslant 1$. Αν

$$f(x)=\frac{1}{(1-c_1x)\cdots(1-c_nx)},$$

δείξτε ότι $f^{(k)}(0)>0$ για κάθε $k\geqslant 1$.

Ασκηση 83. Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f'(x) = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2(f^2(x)+1)}, \quad \text{για κάθε } x > 1.$$

Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Ασκηση 84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $n \geqslant 3$ προσδιορίστε την ποσότητα

$$M_n = \sup\left\{ \min_{1\leqslant i<j\leqslant n} f(|x_i - x_j|) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ασκηση 85. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άρτια συνάρτηση, $2k$ φορές παραγωγίσιμη. Ορίζουμε $g(x) = f(\sqrt{x})$, $x \geqslant 0$. Δείξτε ότι η g είναι k φορές παραγωγίσιμη στο 0 και εκφράστε την $g^{(k)}(0)$ συναρτήσει των παραγώγων της f στο 0.

Ασκηση 86. Έστω $\{a_n\}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη, με $f^{(n)}(0) = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ασκηση 87. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x) + \frac{f'(x)}{x} \right) = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Ασκηση 88. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να βρεθούν όλες οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$f'(x) = \frac{f(x+n) - f(x)}{n}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 89. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n$ στο (a, b) τέτοιοι ώστε

$$f'(\xi_1)f'(\xi_2)\cdots f'(\xi_n) = \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)^n.$$

Ασκηση 90. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0$, $f'(x) > 0$ και $f(x)f''(x) \leqslant 2(f'(x))^2$ για κάθε $x \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(f(x))^2} = 0.$$

Ασκηση 91. Εξετάστε αν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f'(x) \geqslant f(x+f(x))$ για κάθε $x > 0$.

Ασκηση 92 (Putnam 2023)**.** Για $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$f_n(x) = \cos x \cos 2x \ldots \cos nx\,.$$

Να βρείτε τον μικρότερο $n \in \mathbb{N}$ για τον οποίο ισχύει

$$|f_n''(0)| > 2023\,.$$

5 Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκληρωτικές ανισότητες

Ασκηση 93. Να βρεθεί το
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2+n^2}.$$

Ασκηση 94. Να δειχθεί ότι
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/k}=e^{\pi^2/12}.$$

Ασκηση 95. Να βρεθεί το
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1\sqrt[n]{e^{x^2}}\,dx\right)^n.$$

Ασκηση 96. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\int_0^x f^2(t)\,dt=1.$$
Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{3x}f(x)=1$.

Ασκηση 97. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)-\int_0^1 f(x)\,dx\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$
(β) Έστω $k\geqslant 0$. Υπολογίστε το
$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Ασκηση 98. Έστω $f:[0,1]\to(0,\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $\theta(n)\in(0,1)$ ώστε
$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\theta(n)}f(x)\,dx+\int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$
Υπολογίστε το $\lim_{n\to\infty}n\theta(n)$.

Ασκηση 99. Έστω $f;\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<+\infty\quad\text{και}\quad\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2dt<+\infty.$$
Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.

Ασκηση 100. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 f(t)\,dt=0$. Αποδείξτε ότι
$$\int_0^1 f^2(t)\,dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1|f'(t)|\,dt\cdot\int_0^1|f(t)|\,dt.$$

Ασκηση 101 (Sintamarian-Furdui)**.** Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\int_0^{+\infty}[x]^n e^{-x}dx}\,,$$
όπου με $[x]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του x.

Ασκηση 102 (Sintamarian-Furdui)**.** Να υπολογίσετε το όριο
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_0^{+\infty}\{x\}^n e^{-x}dx}$$
όπου με $\{x\}$ συμβολίζουμε το κλασματικό μέρος του x.

Ασκηση 103. Έστω $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ φθίνουσα συνάρτηση με

$$\int_1^\infty xf(x)\,dx<+\infty.$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,dx<+\infty.$$

Ασκηση 104. (α) Έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0\leqslant g(x)\leqslant 1$ για κάθε $x\in[a,b]$, και έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_{b-s}^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leqslant\int_a^{a+s} f(x)\,dx,$$

όπου

$$s=\int_a^b g(x)\,dx.$$

(β) Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0\leqslant g(x)\leqslant 1$ για κάθε $x\in[0,1]$, και έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μη αρνητική και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι, για κάθε $p\geqslant 1$,

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^p\leqslant\int_0^s (f(x))^p dx,$$

όπου

$$s=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^p.$$

Ασκηση 105. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Δείξτε ότι, για κάθε $p\geqslant 0$, $q\geqslant 1$,

$$\int_0^a |f(x)|^p|f'(x)|^q\,dx\leqslant\frac{qa^p}{p+q}\int_0^a |f'(x)|^{p+q}dx.$$

Ασκηση 106. Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των συνεχών συναρτήσεων $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις

$$\int_0^1 f(x)\,dx=3\quad\text{και}\quad\int_0^1 xf(x)\,dx=2.$$

Να βρεθεί το

$$\min_{f\in\mathcal{A}}\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Ασκηση 107. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$n^2\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,dt=nf(x)+1$$

για κάθε $n\geqslant 2$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 108. (α) Έστω $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k,j=1}^n\frac{a_ka_j}{a_k^2+a_j^2}\geqslant 0.$$

(β) Έστω $\{D_1,\ldots,D_n\}$ ένα σύνολο δίσκων στο επίπεδο. Αν a_{ij} είναι το εμβαδόν της τομής $D_i\cap D_j$, δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j\geqslant 0$$

για κάθε $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 109. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το $\int_0^\infty f(t)dt$ υπάρχει και ότι η συνάρτηση $G:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$G(x) := \int_x^{x+1} |f'(t)|^2 dt$$

είναι φραγμένη. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Ασκηση 110. Έστω $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση και έστω $c>0$ με την ιδιότητα

$$\int_1^t f(x)dx \leqslant ct^2$$

για κάθε $t>1$. Δείξτε ότι

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}dx = \infty.$$

Ασκηση 111 (Kaczor-Nowak)**.** Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και

$$a_n = \int_0^1 f(n+x)\,dx\,, n=0,1,2,...$$

Αν υποθέσουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx\,.$$

Ασκηση 112 (IMC 2022)**.** Έστω $f:[0,1]\to(0,+\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x)f(1-x)=1,\ \text{για κάθε } x\in[0,1]\,.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx \geq 1\,.$$

Ασκηση 113 (Torchinski)**.** Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση της οποίας το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Να δείξετε ότι

$$\underline{\lim}\sqrt{n}f(n)=0\,.$$

Ασκηση 114 (IMC 2004)**.** Έστω $f,g:[a,b]\to[0,+\infty)$ συνεχείς και αύξουσες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}\,dt \leq \int_a^x \sqrt{g(t)}\,dt,\ \text{για κάθε } x\in[a,b)$$

και

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \int_a^b \sqrt{g(x)}\,dx\,.$$

Να δείξετε ότι

$$\int_a^b \sqrt{1+f(x)}\,dx \geq \int_a^b \sqrt{1+g(x)}\,dx\,.$$

Ασκηση 115. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(x)f'(x)|\,dx \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a (f'(x))^2 dx.$$

Ασκηση 116. Έστω $f,g:[0,1]\to(0,+\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει υποδιάστημα $[c,d]\subset[0,1]$ τέτοιο ώστε

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_c^d g(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ασκηση 117. Δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ ώστε

$$|p(0)| \leqslant C_n \int_{-1}^{1} |p(x)|\, dx$$

για κάθε πολυώνυμο p βαθμού n.

Ασκηση 118. Έστω p ένα πολυώνυμο βαθμού n με την ιδιότητα

$$\int_0^1 x^k p(x)\, dx = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Δείξτε ότι

$$\int_0^1 (p(x))^2 dx = (n+1)^2 \left(\int_0^1 p(x)\, dx \right)^2.$$

Ασκηση 119. Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ αύξουσες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)g(x)\, dx \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right) \left(\int_0^1 g(x)\, dx \right).$$

Ασκηση 120. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι φθίνουσα μη αρνητική και η g είναι ολοκληρώσιμη. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\, dx \right| \leqslant f(a) \sup_{t \in [a,b]} \left| \int_a^t g(x)\, dx \right|.$$

Ασκηση 121. Να βρεθούν όλοι οι $c > 0$ για τους οποίους υπάρχει αύξουσα συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0, +\infty)$, όχι ταυτοτικά μηδενική, τέτοια ώστε

$$\int_0^1 x f(x)^2 dx = c \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

Ασκηση 122. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $a \leqslant f(x) \leqslant b$ για κάθε $x \in [0,1]$ και $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\lambda > 0$,

$$\int_0^1 e^{\lambda f(x)} dx \leqslant \exp\left(\frac{\lambda^2 (b-a)^2}{8} \right).$$

Ασκηση 123. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to \infty} \left(f(x) + \int_0^x f(t)\, dt \right)$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Ασκηση 124. Για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} (x^2 - t^2)^n \cos t\, dt.$$

Αποδείξτε ότι $I_n(x) = A_n(x) \cos x + B_n(x) \sin x$, όπου οι $A_n(x), B_n(x)$ είναι πολυώνυμα βαθμού το πολύ n με ακέραιους συντελεστές.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι αν $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ τότε $\tan q \notin \mathbb{Q}$.

Ασκηση 125. (Seemous 2008) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\int_0^1 x^k f(x)\, dx = 1$$

για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geqslant n^2.$$

Ασκηση 126. (Seemous 2009) (α) Έστω $k \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 (x(1-x))^n x^k dx.$$

(α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \int_0^1 (x(1-x))^n f(x)\, dx.$$

Ασκηση 127. (Seemous 2011) Έστω $n \geqslant 1$ και $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\, dx \leqslant (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx.$$

Βρείτε όλες τις αύξουσες και συνεχείς $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ισότητα.

Ασκηση 128. (Seemous 2011) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη αύξουσα συνάρτηση. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{και} \quad U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad n \geqslant 1.$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ χωρίζουμε το διάστημα $[L_n, U_n]$ σε τρία ίσα διαστήματα. Αποδείξτε ότι, αν ο n είναι αρκετά μεγάλος, τότε ο αριθμός

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$

ανήκει στο μεσαίο από αυτά τα διαστήματα.

Ασκηση 129. (Seemous 2012) (α) Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n dx.$$

(β) Έστω $k \geqslant 1$ φυσικός. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n^{k+1} \int_0^1 \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n x^k dx.$$

Ασκηση 130. (Seemous 2013) Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [1,8] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\int_1^2 f^2(t^3)dt + 2\int_1^2 f(t^3)dt = \frac{2}{3}\int_1^8 f(t)dt - \int_1^2 (t^2-1)^2 dt.$$

Ασκηση 131. (Seemous 2013) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το ολοκήρωμα

$$\int_0^1 |f(t)|\,|f'(t)|^2 \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

πάνω από όλες τις συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \leqslant 1.$$

Ασκηση 132. (Seemous 2014) (α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^n \frac{\arctan(x/n)}{x(x^2+1)}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

(β) Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty} n \left(n\int_0^1 \frac{\arctan(x/n)}{x(x^2+1)}\, dx - \frac{\pi}{2}\right).$$

Ασκηση 133. (Seemous 2015) Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in (0,1)$,

$$\int_0^1 \sqrt{1+(\cos y)^2}\,dy \geqslant \sqrt{x^2+(\sin x)^2}.$$

Ασκηση 134. (Seemous 2016) στω $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_{\frac{\pi}{2}-1}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Πότε ισχύουν ισότητες;

Ασκηση 135. (Seemous 2016) Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{(1+x^2)^n}\,dx.$$

Αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{I_n}{n} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{και} \quad \int_0^\infty \arctan x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ασκηση 136. (Seemous 2017) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^4 f(x(x-3)^2)\,dx = 2\int_1^3 f(x(x-3)^2)\,dx.$$

Ασκηση 137. (Seemous 2017) (α) Έστω $n \geqslant 1$. Υπολογίστε το

$$\int_0^1 (1-t)^n e^t dt.$$

(β) Έστω $k \geqslant 0$ ακέραιος. Ορίζουμε μια ακολουθία $(x_n)_{n\geqslant k}$ με

$$x_n = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k}\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{i!}\right).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριό της.

Ασκηση 138. (Seemous 2018) Έστω $f:[0,1]\to(0,1)$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\frac{2\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 (f^2(x)+1)\,dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

Ασκηση 139. Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ συνεχής, με $\displaystyle\int_x^1 f(t)\,dt \geqslant \frac{1-x^2}{2}$ για κάθε $x\in[0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ασκηση 140. Έστω $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, τέτοια ώστε

$$2f'(x)+xf''(x) \geqslant 1$$

για κάθε $x\in(-1,1)$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}.$$

Ασκηση 141. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $\int_0^1 f(x)\,dx$ πάνω από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$f(x)+f(y) \geqslant |x-y|$$

για κάθε $x,y\in[0,1]$.

Ασκηση 142. Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, όπου το L είναι πεπερασμένο ή άπειρο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = L.$$

Ασκηση 143. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, τέτοια ώστε $xf(y) + yf(x) \leqslant 1$ για κάθε $x, y \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Ασκηση 144. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leqslant \frac{1}{2} \int_0^1 |f'(x)|^2.$$

Ασκηση 145. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ μονότονη συνάρτηση για την οποία το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{f(x) - x}{x^2}\,dx$$

συγκλίνει. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Ασκηση 146. Έστω $f : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{f(x)}\,dx = \infty.$$

Ασκηση 147. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^\infty |f(x+t) - f(x)|\,dx.$$

Ασκηση 148. Έστω $\mathcal{C}$ το σύνολο όλων των $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που έχουν συνεχή παράγωγο και ικανοποιούν τις $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Υπολογίστε το

$$\inf \left\{ \int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,dt \mid f \in \mathcal{C} \right\}.$$

Ασκηση 149. Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\left| \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt \right| \leqslant 1$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Υπολογίστε το

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \left| \int_0^1 f(x)\,dx \right|.$$

Ασκηση 150. Έστω $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε η f και η $\frac{g}{f}$ να είναι αύξουσες. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\,dx \leqslant 2 \int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,dt.$$

Ασκηση 151. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|^2 dt < \infty$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt \right)^2 dx \leqslant 4 \int_0^\infty |f(t)|^2 dt.$$

Ασκηση 152. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε το

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx.$$

Ασκηση 153. *Έστω $f : (1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) \leqslant x^2 \ln x$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,+\infty)$. Αποδείξτε ότι*

$$\int_1^\infty \frac{1}{f'(x)}\,dx = +\infty.$$

Ασκηση 154. Έστω $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1}e^{-u}du$ για κάθε $x > 0$. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο k ο αριθμός

$$\frac{2^{2k+1}}{\pi}\frac{\Gamma(3/2)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+2)}$$

είναι ακέραιος. Δίνεται ότι $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Στη συνέχεια δείξτε ότι $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) < \sqrt{k}\Gamma(k)$.

Ασκηση 155. Δείξτε ότι $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\,dx = \log 2.$

6 Θεώρημα Fubini και θεωρήματα σύγκλισης

Ασκηση 156. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^1\int_0^1 |f(x)+f(y)|\,dx\,dy \geqslant \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Ασκηση 157. Έστω $f : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)^2 dx + \int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy\right)^2 + \int_0^1\int_0^1 f^2(x,y)\,dx\,dy.$$

Ασκηση 158. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1-e^{-xy}}{xy}\right)^2 e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Ασκηση 159. Έστω $0 < a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -.$ Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\ln(x+y)\,dx\,dy \leqslant 0.$$

Ασκηση 160. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$ Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\int\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1.$$

Ασκηση 161. Συγκρίνετε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 x^x\,dx \text{ και } \int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}dx\,dy.$$

Ασκηση 162. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^2 \ln x\cdot\ln(1-x)\,dx.$

Ασκηση 163. Έστω $T : [0,1]\times[0,1] \to (0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση και $f, g : [0,1] \to (0,+\infty)$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_0^1 f(y)T(x,y)\,dy = g(x) \quad \text{και} \quad \int_0^1 g(y)T(x,y)\,dy = f(x)$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Ασκηση 164. Έστω $(f_n)_{n\geqslant 1}$ ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η f_n να είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά n^2 και απολύτως φραγμένη από 1. Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C \in (0,\infty)$ ώστε η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x)$$

να ικανοποιεί την $|F(x) - F(y)| \leqslant C|x-y|^{1/2}$ για κάθε $x, y \in [0,1]$,

Ασκηση 165. Έστω $\lambda > 1$ και $\alpha \in (0,1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{\alpha k}} \sin(\lambda^k t).$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|f(t+h) - f(t)| \leqslant C|h|^{\alpha}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $h \in [0,1]$.

Ασκηση 166. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\|f_n'\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx = 0$$

για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\|f_n\|_\infty \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Ασκηση 167. Έστω $f : [1,+\infty) \to (0,+\infty)$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει. Αν $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$, δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{f(n+1)} = 1.$$

Ασκηση 168. (Seemous 2010) Έστω $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μέσω της

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt, \qquad x \in [0,1].$$

Δείξτε ότι:

(α) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Βρείτε τύπο για το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [0,1]$.

Ασκηση 169. Έστω $f_1 : [0,1] \to (0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε αναδρομικά

$$f_{n+1}(x) = 2\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f_n(x) \to x^2$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

Ασκηση 170. (Seemous 2018) (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ πολυωνυμική συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx = f(0) + f'(0) + f''(0) + \cdots$$

(β) Έστω f μια συνάρτηση που έχει ανάπτυγμα Taylor με κέντρο το 0 και ακτίνα σύγκλισης $R = \infty$. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0)$ συγκλίνει απολύτως τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x)\,dx.$$

Ασκηση 171. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: $f_0(x) = f(x)$ και

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt.$$

Δείξτε ότι: αν $f_n(1) = 0$ για κάθε $n \geqslant 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Ασκηση 172. Έστω $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ μέσω της

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\, dt, \qquad x \in [0,1].$$

Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει $n = n_x \in \mathbb{N}$ ώστε $f_n(x) = 0$. Δείξτε ότι:

(α) Υπάρχει διάστημα $I \subset [0,1]$ στο οποίο $f_0 \equiv 0$.

(β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $0 < b \leqslant 1$, η f_n μηδενίζεται σε άπειρα το πλήθος σημεία του $(0,b)$.

Ασκηση 173. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|f(x)| \leqslant \frac{c}{x^2+1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c είναι μια θετική σταθερά. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η F είναι συνεχής, 1-περιοδική και ότι για κάθε συνεχή 1-περιοδική συνάρτηση $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_0^1 F(x)G(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)\, dx.$$

Ασκηση 174. Υπολογίστε το κατά σημείο όριο της ακολουθίας συναρτήσεων $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (n+1)x^n$.

(β) $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = \sqrt{x}$ και $f_{n+1}(x) = \sqrt{x + f_n(x)}$.

(γ) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = \sin x$ και $f_{n+1}(x) = \sin(f(x))$.

(δ) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_1(x) = 0$ και $2f_{n+1}(x) = x + 2f_n(x) - f_n(x)^2$.

Ασκηση 175. Για $x \in (-1,1)$ υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $f_n(x) = x^n$.

(β) $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$.

(γ) $f_n(x) = nx^n$.

(δ) $f_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ και $f_{2n}(x) = 0$ για κάθε $n \geqslant 0$.

Ασκηση 176. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^2 \frac{x+1}{x} \frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}\, dx.$$

Ασκηση 177. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx.$$

Ασκηση 178. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{nx} + n \cdot \sin x}{e^{nx}+1}\, dx.$$

Ασκηση 179. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2 x}\right) dx.$$

Ασκηση 180. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}dx.$$

Ασκηση 181. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{n}\right)\left(x(1+x^2)\right)^{-1}dx.$$

Ασκηση 182. Έστω $p>-1$. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1}\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{e^{(n+1)x}-e^{nx}}\,dx.$$

Ασκηση 183. Έστω $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Υπολογίστε το όριο
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{x^k}{k}\right)^2 f(x)\,dx.$$

7 Θεώρημα προσέγγισης Weierstrass

Ασκηση 184. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε
$$\int_0^1 x^k f(x)\,dx=0$$
για κάθε $k\geqslant 0$. Αποδείξτε ότι $f\equiv 0$.

Ασκηση 185. Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς και 1-περιοδικές συναρτήσεις. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)g(nx)\,dx=\left(\int_0^1 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 g(x)dx\right).$$

Ασκηση 186. Έστω $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με την εξής ιδιότητα: αν $x_1,x_2\in[0,1]$ και $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $g(x_1)=g(x_2)$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $\{p_n\}$ ώστε $p_n\circ f\to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς το $n\to\infty$.

Ασκηση 187. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{a_n\}$ πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών αριθμών, η οποία εξαρτάται από την f, ώστε $\sum_{k=1}^{k_n}a_kx^k\to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$ καθώς το $n\to\infty$.

Ασκηση 188. (Seemous 2019) Λέμε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι ακολουθία Devin αν $0\leqslant x_n\leqslant 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $f\in C[0,1]$ ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)=\int_0^1 f(x)\,dx.$$
Αποδείξτε ότι μια ακολουθία (x_n) είναι ακολουθία Devin αν και μόνο αν, για κάθε $k\geqslant 0$ ισχύει ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k=\frac{1}{k+1}.$$

8 Κυρτές συναρτήσεις

Ασκηση 189. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κοίλη, αύξουσα, άνω φραγμένη και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0.$$

Ασκηση 190. Έστω $f:[0,+\infty)$ κυρτή, μη αρνητική συνάρτηση με $f(0)=0$. Ορίζουμε $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F(0)=0$ και
$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$
Δείξτε ότι η F είναι κυρτή.

Ασκηση 191. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$\int_1^x f(t)\,dt = f(x) + \frac{(f(x))^2}{2} - \frac{3}{2}$$

για κάθε $x>0$. Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

Ασκηση 192. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ κοίλη συνάρτηση με

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0.$$

Δείξτε ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\} = 1$, όπου $\{t\} = t - [t]$.

Ασκηση 193. Έστω $f:(0,+\infty)\to[0,+\infty)$ κυρτή συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $a>0$,

$$\int_0^\infty f(x)\cos(ax)\,dx \geqslant 0.$$

Ασκηση 194. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\frac{2}{5}\int_0^1 f(x)\,dx + \frac{2}{3}\int_0^{3/5} f(x)\,dx \geqslant \int_0^{4/5} f(x)\,dx.$$

Ασκηση 195. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to+\infty}[f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)] = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι γραμμική (δηλαδή, της μορφής $f(x) = ax+b$ για κάποιους $a,b\in\mathbb{R}$).

Υπόδειξη: Εξηγήστε πρώτα γιατί αρκεί να εξετάσουμε μόνο τις περιπτώσεις «f άρτια» και «f περιττή».

Ασκηση 196. (α) Έστω $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\phi:[0,1/2]\to\mathbb{R}$ με $\phi(x) = g(x) + g(1-x)$ είναι φθίνουσα.

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση, η οποία είναι αύξουσα στο $[0,1/2]$ και ικανοποιεί την $f(1-x) = f(x)$ για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι: για κάθε κυρτή συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(x)dx.$$

Ασκηση 197. (α) Έστω $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $b>0$, η συνάρτηση $\phi(x) = f(b+x) - f(x)$ είναι αύξουσα.

(β) Έστω $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ κυρτή και αύξουσα συνάρτηση με $f(0)=0$. Δείξτε ότι: αν $a_0\geqslant a_1\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$, τότε

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j f(a_j) \geqslant f\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j a_j\right).$$

Ασκηση 198. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ κοίλη, μη-αρνητική συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 xf(x)\,dx \leqslant \frac{2}{3}\int_0^1 f(x)\,dx \quad\text{και}\quad \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ασκηση 199. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ κυρτή, φθίνουσα συνάρτηση με $f(0)=M$ και $f(1)=0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \leqslant \frac{2}{3}M\int_0^1 f(x)\,dx \quad\text{και}\quad \int_0^1 f^3(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}M^2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

9 Διάφορα προβλήματα

Ασκηση 200. (Seemous 2008) Έστω $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ μια συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $a > 0$ η εξίσωση $f(x) = ax$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $[1,\infty)$.

Αποδείξτε ότι για κάθε $a > 0$ η εξίσωση $f(x) = ax$ έχει πεπερασμένες το πλήθος λύσεις. Δώστε παράδειγμα γνησίως αύξουσας συνεχούς συνάρτησης f με αυτές τις ιδιότητες.

Ασκηση 201 (Putnam 2014). Να αποδείξετε ότι κάθε μη μηδενικός συντελεστής της σειράς Taylor της

$$(1 - x + x^2)e^x$$

γύρω από το 0, είναι ρητός αριθμός του οποίου ο αριθμητής (μετά από απλοποίηση) είναι είτε 1 ή πρώτος αριθμός.

Ασκηση 202. (Seemous 2014) Έστω $n \geqslant 1$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f(2014) = 1 - f(2013)$. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Αν

$$\begin{vmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1+f(x_3) & \ldots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \ldots & 1+f(x_n) \end{vmatrix} = 0,$$

αποδείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής.

Ασκηση 203. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\Big)^2 \leqslant (3 + 2\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Ασκηση 204. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

Ασκηση 205. Να βρεθούν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to [1,\infty)$ για τις οποίες υπάρχουν $C > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$f(x)f(2x)\cdots f(nx) \leqslant Cn^k$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ασκηση 206. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$2f(f(x)) = 3f(x) - x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$ είναι μη κενό διάστημα. Στη συνέχεια, βρείτε την f.

Ασκηση 207. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_i - a_j| x_i x_j \leqslant 0.$$

Ασκηση 208. Έστω (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_1k_2\cdots k_n} = +\infty$ τότε ο $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ είναι άρρητος.

Ασκηση 209. Έστω (k_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{k_n} = +\infty$ τότε ο $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ είναι άρρητος.

Ασκηση 210. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Αποδείξτε ότι ο $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{n^2}}$ είναι άρρητος.

Απαντήσεις

1. (α) Η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και $f(1) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός $x_n > 1$ τέτοιος ώστε $f(x_n) = n$, δηλαδή $(x_n - 1)\ln x_n = n$.

(β) Ισχύει ότι $(x_n - 1)^2 \geqslant (x_n - 1)\ln x_n = n$, απ' όπου βλέπουμε ότι $x_n \to \infty$. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{x_n \ln n}{n} &= \frac{(x_n-1)\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln n}{\ln x_n} + \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln((x_n-1)\ln x_n)}{\ln x_n} + \frac{\ln n}{n} \\ &= \frac{\ln(x_n-1)}{\ln x_n} + \frac{\ln\ln x_n}{\ln x_n} + \frac{\ln n}{n}.\end{aligned}$$

Έχουμε $\frac{\ln n}{n} \to 0$, $\frac{\ln\ln x_n}{\ln x_n} \to 0$ διότι $\ln x_n \to \infty$, και $\frac{\ln(x_n-1)}{\ln x_n}$ διότι $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln(t-1)}{\ln t} = 1$ και $x_n \to \infty$. Άρα, τελικά $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n \ln n}{n} = 1$.

2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $|\sin x - \sin a| \leqslant |x - a|$, άρα χρησιμοποιώντας και την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sin x_k - \sin a\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |\sin x_k - \sin a| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |x - a_k| \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2 - \frac{2a}{n}\sum_{k=1}^n x_k + a^2\right)^{1/2} \longrightarrow (a - 2a\cdot a + a^2)^{1/2} = 0.\end{aligned}$$

3. Ορίζουμε $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε, $a_k = kb_k - (k-1)b_{k-1}$ για κάθε $k \geqslant 1$, αν θέσουμε $b_0 = 0$. Γράφουμε

$$\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^n k^{s-1}a_k = \frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^n k^{s-1}(kb_k - (k-1)b_{k-1}) = -\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}((k+1)^{s-1} - k^{s-1})kb_k + b_n.$$

Αν ορίσουμε

$$\gamma_{n,k} = \frac{s}{(s-1)n^s}((k+1)^{s-1} - k^{s-1})k$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$, τότε $\gamma_{n,k} \geqslant 0$, για κάθε k ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \gamma_{n,k} = 0$ και από το λήμμα Cesàro-Stolz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{n,k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{s}{(s-1)n^s}\sum_{k=1}^{n-1}((k+1)^{s-1} - k^{s-1})k \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{s}{s-1}\,\frac{((n+1)^{s-1} - n^{s-1})n}{(n+1)^s - n^s} = 1.\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Toeplitz συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_{n,k}b_k = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

οπότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^n k^{s-1}a_k = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{s-1}{s}\sum_{k=1}^n \gamma_{n,k}b_k + b_n\right) = \frac{1}{s}\lim_{n\to\infty} b_n.$$

4. Προσθέτοντας και στα δύο μέλη της ανισότητας $b_{n+1} \leqslant \alpha b_n + (1-\alpha)b_{n-1}$ τον $(1-\alpha)b_n$ βλέπουμε ότι $b_{n+1} + (1-\alpha)b_n \leqslant b_n + (1-\alpha)b_{n-1}$ για κάθε $n \geqslant 2$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_n = b_n + (1-\alpha)b_n$, $n \geqslant 2$. Η προηγούμενη ανισότητα δείχνει ότι η (x_n) είναι φθίνουσα, και αφού η (b_n) είναι φραγμένη, ελέγχουμε εύκολα ότι η (x_n) είναι φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι

$$b_n \to y := \frac{1}{2-\alpha}x.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|x_n - x| \leqslant \frac{\alpha}{2}\varepsilon$ για κάθε $n \geqslant 0$. Τότε,

$$\frac{\alpha}{2}\varepsilon \geqslant |b_n + (1-\alpha)b_{n-1} - (2-\alpha)y| \geqslant |b_n - y| - (1-\alpha)|b_{n-1} - y|$$

δηλαδή $|b_n - y| \leqslant (1-\alpha)|b_{n-1} - y| + \frac{\alpha}{2}\varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned}|b_{n_0+k} - y| &\leqslant (1-\alpha)^k |b_{n_0} - y| + \frac{\alpha}{2}\varepsilon \sum_{s=0}^{k-1} (1-\alpha)^s \\ &\leqslant (1-\alpha)^k |b_{n_0} - y| + \frac{\alpha}{2(1-(1-\alpha))}\varepsilon = (1-\alpha)^k |b_{n_0} - y| + \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Για μεγάλα k έχουμε επίσης $(1-\alpha)^k |b_{n_0} - y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant N$ να έχουμε $|b_n - y| \leqslant \varepsilon$. Συνεπώς, $b_n \to y$.

5. Χρησιμοποιούμε την ανισότητα $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ που ισχύει για κάθε $x > 0$. Αν θέσουμε $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$ τότε παίρνουμε

$$-\frac{1}{2} < \ln a_n = n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - n < -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n},$$

άρα $\ln a_n \to -\frac{1}{2}$ και συμπεραίνουμε ότι $a_n \to e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

6. Αν ο $k \geqslant 1$ ικανοποιεί την $m^2 \leqslant k < (m+1)^2$ για κάποιον $m \geqslant 1$, τότε $\{\sqrt{k}\} = \sqrt{k} - m \leqslant \sqrt{(m+1)^2 - 1} - m$, με ισότητα αν $k = (m+1)^2 - 1$. Επίσης παρατηρούμε ότι αν $m < s$ τότε

$$\begin{aligned}1 - \{\sqrt{(m+1)^2 - 1}\} &= m + 1 - \sqrt{(m+1)^2 - 1} = \frac{1}{m + 1 + \sqrt{(m+1)^2 - 1}} > \frac{1}{s + 1 + \sqrt{(s+1)^2 - 1}} \\ &= 1 - \{\sqrt{(s+1)^2 - 1}\},\end{aligned}$$

Δηλαδή, η ακολουθία $\{\sqrt{(m+1)^2 - 1}\}$ είναι φθίνουσα ως προς m.

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις για τον n. Αν $n = m^2 - 1$ για κάποιον $m \geqslant 1$ τότε

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\} = \{\sqrt{m^2 - 1}\} = \sqrt{m^2 - 1} - m + 1.$$

Αν $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$ για κάποιον $m \geqslant 1$ τότε, αφού η $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\}$ είναι αύξουσα ως προς n, έχουμε ότι

$$\sqrt{m^2 - 1} - m + 1 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\} \leqslant \sqrt{(m+1)^2 - 1} - m.$$

Επίσης, $m \leqslant \sqrt{n} < m + 1$, άρα

$$\frac{m}{m+1}(m+1)\left(m + 1 - \sqrt{(m+1)^2 - 1}\right) \leqslant \sqrt{n}\left(1 - \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\}\right) < \frac{m+1}{m}\, m\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right)$$

και αφού

$$\lim_{m \to \infty} m\left(m - \sqrt{m^2 - 1}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lim_{m \to \infty} \frac{m}{m+1} = 1$$

συμπεραίνουμε ότι $\sqrt{n}\left(1 - \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \{\sqrt{k}\}\right) \longrightarrow \dfrac{1}{2}$.

7. Για κάθε $n \geqslant 3$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} &= \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k}}{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n-k} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \frac{1}{2^k}.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\alpha_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \to 2$ και θα δείξουμε ότι $\beta_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \frac{1}{2^k} \to 0$, οπότε τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = 2.$$

Για την β_n χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα $2^k \geqslant \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$ για $k \geqslant 2$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\beta_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \frac{1}{2^k} &\leqslant \frac{1}{2(n-1)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2k}{k(k-1)(n-k)} = \frac{1}{2(n-1)} + 2\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k-1)(n-k)} \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + 2\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{k-1} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{2}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k-1} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{1}{2(n-1)} + \frac{4}{n-1} \sum_{m=1}^{n-2} \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{2(n-1)} + \frac{4\log n}{n-1} \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$, άρα $\beta_n \to 0$.

8. Αν $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{t_n}$ τότε

$$\begin{aligned}
\log a_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \log k - \frac{1}{2}\log n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\left(\log\frac{k}{n} + \log n\right)\right) - \frac{1}{2}\log n \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\log\frac{k}{n} + \frac{\log n}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{2}\log n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\log\frac{k}{n} + \frac{\log n}{2n} \\
&\longrightarrow \int_0^1 x\log x\, dx = \left(\frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt[n^2]{t_n} \to e^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}.$$

9. 1ος τρόπος. Δεδομένου ότι $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$, ζητάμε το $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\, dx$. Αν υποθέσουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο, εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\, dx = \int_0^1 (x^{n+1})' f(x)\, dx = x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)\, dx = f(1) - \int_0^1 x^{n+1}f'(x)\, dx.$$

Όμως,

$$\left|\int_0^1 x^{n+1}f'(x)\, dx\right| \leqslant \int_0^1 x^{n+1}|f'(x)|\, dx \leqslant \|f'\|_\infty \int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}\|f'\|_\infty \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 (n+1)x^n f(x)\, dx = f(1).$$

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και για τυχόν $\epsilon > 0$ βρίσκουμε πολυώνυμο p ώστε $\|f-p\|_\infty \leqslant \epsilon$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\, dx - f(1)\right| &\leqslant \left|\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\, dx - \int_0^1 (n+1)x^n p(x)\, dx\right| \\
&\quad + \left|\int_0^1 (n+1)x^n p(x)\, dx - p(1)\right| + |p(1) - f(1)| \\
&\leqslant \|f-p\|_\infty \int_0^1 (n+1)x^n dx + \left|\int_0^1 (n+1)x^n p(x)\, dx - p(1)\right| + |p(1) - f(1)| \\
&\leqslant \epsilon + \left|\int_0^1 (n+1)x^n p(x)\, dx - p(1)\right| + \epsilon,
\end{aligned}$$

και έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\,dx - f(1)\right| \leqslant 2\epsilon + \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 (n+1)x^n p(x)\,dx - p(1)\right| = 2\epsilon$$

διότι το ζητούμενο ισχύει για το πολυώνυμο p. Αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\,dx = f(1)$.

2ος τροπος. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = x^{n+1}$, έχουμε

$$\int_0^1 (n+1)x^n f(x)\,dx = \int_0^1 f(y^{1/(n+1)})\,dy \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f(1)\,dy = f(1).$$

Χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Επειδή η f είναι συνεχής και $\lim_{n\to\infty} y^{1/(n+1)} = 1$ για κάθε $y \in (0,1]$, ο ολοκληρωτέος συγκλίνει στο $f(1)$. Κυριαρχούσα συνάρτηση είναι η σταθερά $\|f\|_\infty$.

10. Εύκολα ελέγχουμε ότι $a_n \to +\infty$: από την αναδρομική σχέση, η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και αν συνέκλινε σε κάποιον $x > 0$ τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι $x = x + \frac{1}{\sqrt[k]{x}}$, άτοπο.

Χρησιμοποιούμε το λήμμα του Stolz: αν (a_n) είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών, (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $b_n \to +\infty$ και $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lambda$.

Στην περίπτωσή μας,

$$\frac{a_{n+1}^{\frac{k+1}{k}} - a_n^{\frac{k+1}{k}}}{(n+1)-n} = \left(a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}\right)^{\frac{k+1}{k}} - a_n^{\frac{k+1}{k}}.$$

Αν θέσουμε $t_n = 1/a_n^{\frac{k+1}{k}}$ τότε η τελευταία ποσότητα γράφεται στη μορφή

$$\frac{(1+t_n)^{\frac{k+1}{k}} - 1}{t_n} \longrightarrow \frac{k+1}{k}$$

διότι $t_n \to 0$. Έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\frac{k+1}{k}}}{n} = \frac{k+1}{k}, \quad \text{άρα} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{k+1}}{n^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}}.$$

11. Η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη και θα δείξουμε ότι είναι τελικά φθίνουσα. Για $n \geq 2$ ακέραιο,

$$\log\frac{x_{n+1}}{x_n} = \log\frac{e}{\{(n+1)/n\}^n} = 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Από το θεώρημα Taylor, έχουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\log(1+x) > x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$. Επομένως, η πιο πάνω ποσότητα είναι άνω φραγμένη από την

$$1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4}\right) = -\frac{1}{12n^2} + \frac{1}{12n^3} + \frac{1}{8n^4} = \frac{1}{12n^4}(-n^2+n+3/2).$$

Η τελευταία ποσότητα είναι αρνητική για $n \geq 2$. [Ισχύει επίσης $x_1 > x_2$ αφού $x_2/x_1 = e/(2\sqrt{2}) < 1$.]

12. Η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από τα σημεία που μεγιστοποιείται η $\sin x$ και η $\cos x$, δηλαδή από τα σημεία κοντά στο $\pi/2$ και στο 0. Η δουλειά μειώνεται στο μισό αν εκμεταλευτούμε τη σχέση αυτών των δύο συναρτήσεων. Δηλαδή, χρησιμοποιώντας αλλαγή μεταβλητής, γράφουμε το ολοκλήρωμα ως

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi/4}\sqrt{a(\sin x)^{2n} + b(\cos x)^{2n}}\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{a(\sin x)^{2n} + b(\cos x)^{2n}}\,dx\\ &= \int_0^{\pi/4}\sqrt{a(\sin x)^{2n} + b(\cos x)^{2n}}\,dx + \int_0^{\pi/4}\sqrt{a(\cos x)^{2n} + b(\sin x)^{2n}}\,dx.\end{aligned}$$

Ονομάζουμε I_n το πρώτο ολοκληρωμα στη τελευταία γραμμή και θα δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}I_n = \sqrt{b}\sqrt{\pi/2}$. Θα έπεται τότε ότι το ζητούμενο όριο ισούται με $(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{\pi/2}$.
Για $x \in [0,\pi/4]$ ισχύει

$$\sqrt{b}(\cos x)^n \leq \sqrt{a(\sin x)^{2n} + b(\cos x)^{2n}} \leq \sqrt{b}(\cos x)^n + \sqrt{a}(\sqrt{2})^{-n}$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε το εξής.
Ισχυρισμος: $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\int_0^{\pi/4}(\cos x)^n\,dx=\sqrt{\pi/2}$.
Θέτοντας $y:=x\sqrt{n}$ στο ολοκλήρωμα, γράφουμε την ποσότητα στο όριο ως

$$\int_0^{\infty}\left(\cos\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\mathbf{1}_{[0,(\pi/4)\sqrt{n}]}(y)\,dy.$$

Το όριο του ολοκληρωτέου είναι $e^{-y^2/2}$ για κάθε $y\in[0,\infty)$ (με κανόνα de l' Hospital) και μένει να βρούμε κυριαρχούσα συνάρτηση. Για κάθε $x\in[0,2]$ ισχύει

$$\cos x\le 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\le 1-\frac{1}{3}x^2.$$

[Η πρώτη ανισότητα ισχύει για κάθε $x\ge 0$.] Για $y\in[0,(\pi/4)\sqrt{n}]$ έχουμε $0\le y/\sqrt{n}\le 1$, και άρα

$$\left(\cos\frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n\le\left(1-\frac{y^2}{3n}\right)^n\le e^{-y^2/3}=:g(y).$$

Επειδή $\int_0^{\infty}g(y)\,dy<\infty$, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δίνει ότι το όριο στον ισχυρισμό ισούται με

$$\int_0^{\infty}e^{-y^2/2}\,dy=\sqrt{2}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi/2}.$$

13. Θεωρούμε την ακολουθία $t_n=x_{n+1}-x_n$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $|t_{n+1}-t_n|\leqslant\frac{1}{n^2}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα για κάθε $n>m$ παίρνουμε

$$|t_n-t_m|\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}|t_{k+1}-t_k|\leqslant\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k^2}\leqslant\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{k^2}\longrightarrow 0$$

όταν $m,n\to+\infty$. Αυτό δείχνει ότι η (t_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει το

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{n\to\infty}t_n=t\in\mathbb{R}.$$

Τότε,

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=t.$$

14. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $\alpha_n\to\ell$ τότε αναγκαστικά $\ell=\frac{2}{3}$. Έστω ότι $\alpha_n\not\to\frac{2}{3}$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (α_{k_n}) της (α_n) με $\alpha_{k_n}\to s\neq\frac{2}{3}$. Αφού $\alpha_n+\frac{\alpha_{2n}}{2}\to 1$ έπεται ότι

$$\alpha_{2k_n}\to 2(1-s).$$

Όμοια,

$$\alpha_{4k_n}\to 2(1-2(1-s))$$

και ούτω καθεξής. Δηλαδή, αν ορίσουμε

$$y_0=s\quad\text{και}\quad y_{r+1}=2(1-y_r),\ \ r\geqslant 1$$

τότε

$$\alpha_{2^rk_n}\to y_r.$$

Αφού η (α_n) είναι φραγμένη και

$$y_r=\lim_{n\to\infty}\alpha_{2^rk_n},$$

έχουμε ότι η (y_r) είναι φραγμένη. Όμως, η $y_{r+1}=2(1-y)r)$ γράφεται

$$y_{r+1}-\frac{2}{3}=-2\left(y_r-\frac{2}{3}\right).$$

Άρα,

$$\left|y_r-\frac{2}{3}\right|=2^r\left|y_0-\frac{2}{3}\right|\to+\infty,$$

άρα
$$|y_r| \to +\infty,$$
το οποίο είναι άτοπο.

15. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν $0 < x_n < 1$ τότε $0 < x_{n+1} = x_n(1 - x_n^n) < x_n < 1$, δηλαδή η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συνεπώς υπάρχει το όριο $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$.

Από την $x_{k+1} = x_k(1 - x_k^k)$ βλέπουμε επίσης ότι
$$x_{n+1} \prod_{k=1}^{n} x_k(1 - x_k^k) = x_1 \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log(1 - x_k^k)\right) \geqslant x_1 \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} |\log(1 - x_1^k)|\right).$$

Αφού $0 < x_1 < 1$ έχουμε ότι $x_1^k \to 0$ όταν $k \to \infty$, άρα $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{|\log(1-x_1^k)|}{x_1^k} = 1$. Άρα, υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε $|\log(1 - x_1^k)| \leqslant C x_1^k$ για κάθε $k \geqslant 1$ και έπεται ότι
$$\sum_{k=1}^{N} |\log(1 - x_1^k)| \leqslant C \sum_{k=1}^{n} x_1^k \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} x_1^k = \frac{Cx_1}{1 - x_1}$$
για κάθε $n \geqslant 1$. Συνεπώς, $x_{n+1} \geqslant x_1 \exp\left(-\frac{Cx_1}{1 - x_1}\right)$ για κάθε $n \geqslant 1$ και, τελικά, $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant x_1 \exp\left(-\frac{Cx_1}{1 - x_1}\right) > 0$.

16. Η (x_n) είναι φθίνουσα και $x_n \geqslant 0$ για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $x_n \to x \geqslant 0$. Παίρνοντας όριο στην αναδρομική σχέση βλέπουμε ότι $\sin x = x$, άρα $x = 0$ και τελικά $x_n \to 0$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l' Hospital βλέπουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \dfrac{1}{3}$, άρα
$$\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{1}{\sin^2 x_n} - \frac{1}{x_n^2} = \frac{x_n^2 - \sin^2 x_n}{x_n^2 \sin^2 x_n} \to \frac{1}{3}.$$
Έπεται ότι $\dfrac{1}{nx_n^2} \to \dfrac{1}{3}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} x_n = \sqrt{3}$.

Χρησιμοποιήσαμε εδώ το γεγονός ότι: αν για κάποια ακολουθία $(a_n))$ πραγματικών αριθμών έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = a$.

17. (α) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = y^n$ έχουμε ότι
$$I_n = \int_0^1 \left(\frac{p}{\sqrt[n]{x} + p - 1}\right)^n dx = np^n \int_0^1 \left(\frac{y}{y + p - 1}\right)^{n-1} \frac{1}{y + p - 1}\, dy.$$
Θέτοντας $\frac{y}{y+p-1} = t$ ή, ισοδύναμα, $y = \frac{(p-1)t}{1-t}$, παίρνουμε
$$I_n = np^n \int_0^{\frac{1}{p}} \frac{t^{n-1}}{1 - t}\, dt.$$
Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε ότι
$$I_n = \frac{p}{p - 1} - p^n \int_0^{\frac{1}{p}} \frac{t^n}{(1 - t)^2} dt.$$
Τέλος,
$$0 < p^n \int_0^{\frac{1}{p}} \frac{t^n}{(1 - t)^2} dt < \frac{p^{n+2}}{(p - 1)^2} \int_0^{\frac{1}{p}} t^n dt = \frac{p}{(n + 2)(p - 1)^2} \to 0,$$
άρα $I_n \longrightarrow \dfrac{p}{p - 1}$.

(β) Από την $\dfrac{p}{p - 1} - I_n = p^n \displaystyle\int_0^{\frac{1}{p}} \frac{t^n}{(1 - t)^2} dt$, με ολοκλήρωση κατά μέρη στο δεξιό μέλος παίρνουμε
$$\frac{p}{p - 1} - I_n = \frac{1}{n + 1} \cdot \frac{p}{(p - 1)^2} - \frac{2p^n}{n + 1} \int_0^{\frac{1}{p}} \frac{t^{n+1}}{(1 - t)^3} dt.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{p}{p-1}-\int_0^1\left(\frac{p}{\sqrt[n]{x}+p-1}\right)^n dx\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{p}{(p-1)^2}-\frac{2np^n}{n+1}\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{t^{n+1}}{(1-t)^3}dt\right].$$

Ομως, $\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{p}{(p-1)^2}\to\dfrac{p}{(p-1)^2}$ και

$$0<p^n\int_0^{\frac{1}{p}}\frac{t^{n+1}}{(1-t)^3}dt<\frac{p^{n+3}}{(p-1)^3}\int_0^{\frac{1}{p}}t^{n+1}dt=\frac{p}{(n+2)(p-1)^3}\to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{p}{p-1}-\int_0^1\left(\frac{p}{\sqrt[n]{x}+p-1}\right)^n dx\right]=\frac{p}{(p-1)^2}.$$

18. (α) Γράφουμε

$$x_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(f\left(\frac{1}{k}\right)-\int_k^{k+1}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\right)+f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Αφού η f είναι αύξουσα, για κάθε $k\geqslant 1$ και κάθε $x\in[k,k+1]$ έχουμε ότι $f\left(\frac{1}{k+1}\right)\leqslant f\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant f\left(\frac{1}{k}\right)$, άρα

$$f\left(\frac{1}{k+1}\right)\leqslant\int_k^{k+1}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\leqslant f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, καταλήγουμε στην

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant x_n\leqslant f(1).$$

Αφού $f(0)\leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$ για κάθε $n\geqslant 1$, η (x_n) είναι κάτω φραγμένη από τον $f(0)$. Επίσης,

$$x_{n+1}-x_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)-\int_n^{n+1}f\left(\frac{1}{x}\right)dx\leqslant 0,$$

άρα η (x_n) είναι φθίνουσα. Έπεται ότι η (x_n) συγκλίνει σε κάποιον $\ell\geqslant f(0)$.

(β) Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=1$, υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε $1-\varepsilon<\dfrac{f(x)}{x}<1+\varepsilon$ για κάθε $0<x<\delta$. Τότε, αν $n\geqslant n_0>\frac{1}{\delta}$ και $k\geqslant 1$ έχουμε ότι

$$(1-\varepsilon)\frac{1}{n+k}<f\left(\frac{1}{n+k}\right)<(1+\varepsilon)\frac{1}{n+k}$$

και προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες από $k=1$ έως $2020n$ παίρνουμε

$$(1-\varepsilon)S_n<y_n=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+d\left(\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2021n}\right)<(1+\varepsilon)S_n,$$

όπου

$$S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2021n}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\ln(2021)$, άρα

$$(1-\varepsilon)\ln(2021)\leqslant\liminf_{n\to\infty}y_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}y_n\leqslant(1+\varepsilon)\ln(2021),$$

και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\ln(2021)$.

19. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Για κάθε $0\leqslant a<x<b\leqslant 1$ υπάρχει $\theta\in(x,b)$ ώστε

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2}f''(b)(x-b)^2+\frac{1}{6}f'''(\theta)(x-b)^3,$$

άρα

$$\int_a^b f(x)dx = f(b)(b-a) - \frac{1}{2}f'(b)(b-a)^2 + \frac{1}{6}f''(b)(b-a)^4 + O((b-a)^4).$$

Τώρα, για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ έχουμε ότι

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{6n^3}\sum_{k=1}^n f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^n f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

και

$$f'(1) - f'(0) = \int_0^1 f''(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f''\left(\frac{k}{n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) - \frac{1}{12n^2}(f'(1) - f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Στην περίπτωσή μας έχουμε

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right|\,\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2})$$

και

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(k/n)^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}} = S_n.$$

Επίσης, $f(1) - f(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$ και $f'(1) - f'(0) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Έπεται ότι

$$\ln(1+\sqrt{2}) = S_n + \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})n} + \frac{1}{24\sqrt{2}n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left[n(\ln(1+\sqrt{2}) - S_n) - \frac{1}{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}\right] = \frac{1}{24\sqrt{2}}.$$

20. (α) Για κάθε $x \in (0,1]$ και $n \geqslant 1$ έχουμε ότι $\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \geqslant 0$ και

$$0 \leqslant f_n(x) := \ln(1 + x + x^2 + \cdots + x^n) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \leqslant \ln(n+1) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$ συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι καλά ορισμένη.

Η ακολουθία $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ είναι αύξουσα και $f_n(x) = \ln\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right) \cdot \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \to f(x) := \ln^2\left(\frac{1}{1-x}\right)$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$x_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \ln^2\left(\frac{1}{1-x}\right) dx = 2.$$

(β) Έχουμε

$$2-x_n=\int_0^1\left(\ln^2\left(\frac{1}{1-x}\right)-\ln\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)\cdot\ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)dx=\int_0^1\ln(1-x^{n+1})\cdot\ln(1-x)\,dx.$$

Κάνοοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=x^{n+1}$ γράφουμε

$$2-x_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\ln(1-y)\cdot\ln(1-y^{\frac{1}{n+1}})\cdot y^{\frac{1}{n+1}-1}dy,$$

άρα

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(2-x_n)&=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\ln(n-1)}(2-x_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\ln n}{\ln(n-1)}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^1\ln(1-y)\cdot\ln(1-y^{\frac{1}{n}})\cdot y^{\frac{1}{n}-1}dy\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}\cdot\frac{y^{\frac{1}{n}}\ln(1-y^{\frac{1}{n}})}{\ln n}\,dy.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$g_n(y)=\frac{\ln(1-y)}{y}\cdot\frac{y^{\frac{1}{n}}\ln(1-y^{\frac{1}{n}})}{\ln n}\longrightarrow g(y):=-\frac{\ln(1-y)}{y}$$

και

$$0\leqslant g_n(y)\leqslant h(y):=\frac{\ln^2(1-y)-\ln(1-y)}{y}$$

για κάθε $y\in(0,1)$ και $n\geqslant 3$. Επίσης, το ολοκλήρωμα $\int_0^1 h(y)\,dy$ δυγκλίνει. Μπορούμε έτσι να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}(2-x_n)=\int_0^1 g(y)\,dy=-\int_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}\,dy=\frac{\pi^2}{6}.$$

Για τον τελευταίο υπολογισμό ολοκληρώνουμε τη σειρά Maclaurin της $g(y)=-\frac{\ln(1-y)}{y}$.

21. Οι αριθμοί στο γινόμενο είναι όλοι θετικοί. Ο λογάριθμος της ποσότητας της οποίας αναζητούμε το όριο ισούται με

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n\frac{\pi}{2n}\log\sin\frac{\pi k}{2n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι $I=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=\int_0^{\pi/2}\log(\cos x)\,dx$, άρα

$$2I=\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\left(\frac{\sin y}{2}\right)dy\int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin y}{2}\right)dy=I-\frac{\pi}{2}\log 2,$$

άρα

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=-\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2}\log 2=-\log 2$$

και τελικά

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right)\cdots\sin\left(\frac{\pi n}{2n}\right)\right)^{1/n}=e^{-\log 2}=\frac{1}{2}.$$

22. Έστω P_n το γινόμενο. Όλοι οι όροι του είναι θετικοί και

$$\log P_n=\sum_{k=1}^n\log\cos(k/n^{3/2}).$$

[Κάθε $k/n^{3/2}$ είναι κοντά στο 0, οπότε είναι λογικό να καταφύγουμε σε προσέγγιση των ποσοτήτων μέσω θεωρήματος Taylor.]

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\log\cos x$. Ισχύει $f'(x)=-\tan(x), f''(x)=-1-$

$\tan^2(x)$, $f'''(x) = -2\tan(x)(1+\tan^2(x))$. Από το θεώρημα Taylor, για κάθε $x \in [-\pi/4, \pi/4]$, υπάρχει $\theta_x \in [-2/3, 2/3]$ ώστε $\log\cos(x) = -\frac{x^2}{2} + \theta_x x^3$. Άρα, για $n \geq 2$,

$$\log P_n = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^{3/2}}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^{9/2}}\theta_{k/n^{3/2}} = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} + \frac{1}{n^{9/2}}\sum_{k=1}^{n}k^3\theta_{k/n^{3/2}} \overset{n\to\infty}{\to} -\frac{1}{6}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το φράγμα στα θ_x και το $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n(n+1)/2)^2$. Άρα, το ζητούμενο όριο είναι $e^{-1/6}$.

23. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $t_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < t_n < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε,

$$\begin{aligned} a_{n_0+1} &\leqslant c a_{n_0} + t_{n_0} < c a_{n_0} + \varepsilon \\ a_{n_0+2} &\leqslant c^2 a_{n_0} + c\varepsilon + t_{n_0+1} < c^2 a_{n_0} + (1+c)\varepsilon \\ a_{n_0+3} &\leqslant c^3 a_{n_0} + (c+c^2)\varepsilon + t_{n_0+2} < c^3 a_{n_0} + (1+c+c^2)\varepsilon, \end{aligned}$$

και επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$a_{n_0+m} \leqslant c^m a_{n_0} + (1+c+\cdots+c^{m-1})\varepsilon < c^m a_{n_0} + \frac{\varepsilon}{1-c}.$$

Αφήνοντας το $m \to \infty$ έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \frac{\varepsilon}{1-c},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, τελικά έχουμε ότι $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant 0$. Όμως $a_n > 0$ για κάθε n άρα $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$, και από τα παραπάνω έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

24. Η συνάρτηση $f_n(x) = e^x + nx - 2$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, με $f_n(0) = -1 < 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, άρα υπάρχει μοναδικός $a_n > 0$ τέτοιος ώστε $f_n(a_n) = 0$, δηλαδή $e^{a_n} + na_n = 2$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $na_n < 2$, άρα $0 < a_n < \frac{2}{n} \to 0$, δηλαδή $a_n \to 0$. Τώρα γράφουμε

$$1 - na_n = e^{a_n} - 1 \to e^0 - 1 = 0$$

και συμπεραίνουμε ότι $na_n \to 1$.

25. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$. Δείχνουμε πρώτα ότι $s_n \to +\infty$. Αν όχι, τότε $s_n \to s > 0$, οπότε $a_n \to 0$ και $a_n s_n \to 0 \cdot s = 0 \neq 1$, άτοπο. Άρα, $s_n \to +\infty$ και

$$a_n = (a_n s_n) \cdot \frac{1}{s_n} \to 1 \cdot 0 = 0.$$

Θα δείξουμε ότι $\frac{3n}{s_n^3} \to 1$, οπότε $3na_n^3 \to 1$ και αυτό αποδεικνύει ότι $\sqrt[3]{3n}\, a_n \to 1$. Χρησιμοποιούμε το λήμμα του Stolz: αρκεί να υπολογίσουμε το όριο της

$$\frac{3(n+1) - 3n}{s_{n+1}^3 - s_n^3} = \frac{3}{a_{n+1}(s_{n+1}^2 + s_n s_{n+1} + s_n^2)} = \frac{3}{a_{n+1}s_{n+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + b_n + b_n^2},$$

όπου

$$b_n = \frac{s_n}{s_{n+1}} - 1 = 1 - \frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} \to 1.$$

Αφού $a_{n+1}s_{n+1}^2 \to 1$, βλέπουμε ότι

$$\frac{3}{a_{n+1}s_{n+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + b_n + b_n^2} \to \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$$

και έπεται το ζητούμενο.

26. Θέτουμε $a_n = \frac{1}{n^4}\left(\prod\limits_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)\right)^{1/n}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \log a_n &= -4\log n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log(n^2+k^2) = -4\log n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(2\log n + \log\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right), \end{aligned}$$

όπου $f(x)=\log(1+4x^2)$, $x\in[0,1]$. Έπεται ότι

$$\log a_n \to 2\int_0^1 \log(1+4x^2)\,dx = 2\log 5 - 4 + 2\arctan(2),$$

άρα $a_n \to 25\exp(2\arctan(2)-4)$.

27. Θα δείξουμε ότι η (x_n) συγκλίνει αν και μόνο αν $0\leqslant x_1<1$. Αν $x_1\geqslant 1$ τότε με επαγωγή ως προς n βλέπουμε ότι $x_n\geqslant n$ για κάθε $n\geqslant 1$, άρα $x_n\to+\infty$.

Έστω ότι $0<x_1<1$. Με επαγωγή ως προς n δείχνουμε ότι $x_n<nx_1$ για κάθε $n\geqslant 2$, συνεπώς $x_k<k-1$ για κάποιον $k\geqslant 2$. Αφού

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{x_n/n^2}{x_nx_{n+1}}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)},$$

για $n>k$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_n}=\sum_{i=k}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)<\sum_{i=k}^{n-1}\frac{1}{i(i-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{n-1}<\frac{1}{k-1}.$$

Έπεται ότι

$$0<x_n<\frac{1}{1/x_k-1/(k-1)}$$

για κάθε $n>k$. Αυτό δείχνει ότι η (x_n) είναι άνω φραγμένη. Όμως, η (x_n) είναι επίσης γνησίως αύξουσα, άρα συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

28. Αφαιρώντας κατά μέλη τις $n^2a_{n+1}=2\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k$ και $(n-1)^2a_n=2\sum\limits_{k=1}^{n-1}ka_k$ βλέπουμε ότι $n^2a_{n+1}-(n-1)^2a_n=2na_n$ ή, ισοδύναμα,

$$a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)a_n$$

για κάθε $n\geqslant 1$. Έπεται ότι η (a_n) είναι αύξουσα και ότι

$$a_{n+1}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\leqslant\prod_{k=1}^{n}e^{1/k^2}=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)<e^2$$

για κάθε $n\geqslant 1$. Εφόσον η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

29. Η ακολουθία στο αριστερό μέλος, αφού κάνουμε την αντικατάσταση $y=x^n$ στο ολοκλήρωμα, γράφεται

$$\int_0^1 n\left\{(1+y)^{1/n}-1\right\}y^{-1+\frac{1}{n}}\,dy.$$

Η ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα, για $n\to\infty$, συγκλίνει στο $y^{-1}\log(1+y)$ και είναι απολύτως φραγμένη ομοιόμορφα ως προς n από το 1 (χρησιμοποιούμε την $(1+y)^a\leq 1+ay$ για κάθε $a\in[0,1]$ και $y\geq 0$). Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, η ακολουθία συγκλίνει στο

$$\ell:=\int_0^1\frac{\log(1+y)}{y}\,dy.$$

Σε κάθε διάστημα $[0,r]$ με $r\in(0,1)$, η δυναμοσειρά της $y^{-1}\log(1+y)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και ισούται με

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}y^{k-1}.$$

Επομένως, το ολοκλήρωμά της στο $[0,r]$ ισούται με $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}r^k$. Το όριο αυτής της σειράς για $r\nearrow 1$ ισούται με $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2}$ αφού η σειρά είναι συνεχής συνάρτηση του r στο $[0,1]$.

Έστω $a_k:=(-1)^{k-1}/k^2$ για κάθε θετικό ακέραιο k. Επειδή η $(|a_k|)_{k\geq 1}$ είναι γνησίως φθίνουσα ακολουθία, έχουμε $a_1-a_2<\ell<a_1-a_2+a_3$, που είναι η ζητούμενη.

30. Περίπτωση 1. Αν $a_0, a_1 \geq 0$. Τότε προφανώς η $(a_n)_{n\geq 1}$ είναι αύξουσα. Επιπλέον, η $(a_n/n^2)_{n\geq 2}$ κάτω φραγμένη από το 0 και φθίνουσα διότι, για $n \geq 2$, από την αναδρομική σχέση και το ότι $a_{n-1} \leq a_n$, έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2} \leq \frac{a_n}{(n+1)^2}\left(1+\frac{2}{n+1}\right) = \frac{a_n}{n^2}\frac{n^2(n+3)}{(n+1)^3} \leq \frac{a_n}{n^2}.$$

Περίπτωση 2. a_0, a_1 οποιοιδήποτε πραγματικοί. Έστω $(A_n)_{n\geq 0}$ η ακολουθία που ορίζεται από την αναδρομή με $(A_0, A_1) = (1, 0)$ και $(B_n)_{n\geq 0}$ η ακολουθία που ορίζεται από την αναδρομή με $(B_0, B_1) = (0, 1)$. Τότε, $a_n = a_0 A_n + a_1 B_n$ και το συμπέρασμα έπεται από την περίπτωση 1.

31. Αν θέσουμε $x^{k^2} = u$, τότε $x = u^{\frac{1}{k^2}}$, άρα $dx = \frac{1}{k^2} u^{\frac{1}{k^2}-1} du$. Συνεπώς,

$$0 \leqslant \alpha_k = \int_1^\infty \exp\left(-x^{k^2}\right) dx = \frac{1}{k^2}\int_1^\infty e^{-u} u^{\frac{1}{k^2}-1}\, du = \frac{1}{k^2}\int_1^\infty e^{-u}\frac{u^{1/k^2}}{u}\, du.$$

Όμως, για $u \geqslant 1$ ισχύει ότι $u^{1/k^2} \leqslant u$, άρα

$$\alpha_k \leqslant \frac{1}{k^2}\int_1^\infty e^{-u}\, du = \frac{e^{-1}}{k^2}.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k$ συγκλίνει.

32. Αν $u = kt^2 = u$ τότε $t = \sqrt{\frac{u}{k}}$, και

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \int_0^1 \cos(kt^2)\, dt = \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^k \frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^k (\sqrt{u})' \cos u\, du = \frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{k}\cos k - \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^k \sqrt{u}(\cos u)'\, du \\ &= \cos k + \frac{1}{\sqrt{k}}\int_0^k \sqrt{u}\sin u\, du.\end{aligned}$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_k \in [0, k]$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^k \sqrt{u}\sin u\, du = \sqrt{\xi_k}\int_0^k \sin u\, du.$$

Επομένως,

$$\alpha_k = \cos k + \frac{\sqrt{\xi_k}}{\sqrt{k}}\int_0^k \sin u\, du = \cos k - \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(\cos k - 1) = \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1-\cos k).$$

Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k$ συγκλίνει. Τότε,

$$\alpha_k \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \cos k + \sqrt{\frac{\xi_k}{k}}(1-\cos k) \to 0.$$

Όμως, υπάρχει υπακολουθία (m_k) των φυσικών τέτοια ώστε $\cos m_k \to 1$, και αφού $0 \leqslant \sqrt{\frac{\xi_k}{m_k}} \leqslant 1$, θα ισχύει ότι $\sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1-\cos m_k) \to 0$, άρα

$$\cos m_k + \sqrt{\frac{\xi_{m_k}}{m_k}}(1-\cos m_k) \to 1,$$

άτοπο. Επομένως, η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k$ δεν συγκλίνει.

33. Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$f(n) = \int_n^{n+1} f(x)\, dx - \int_n^{n+1} (n+1-x) f'(x)\, dx.$$

Αυτή μας δίνει, για $n < m$, το φράγμα

$$\left|\sum_{k=n+1}^m f(k)\right| \leqslant \left|\int_{n+1}^{m+1} f(x)\, dx\right| + \sum_{k=n+1}^m \int_k^{k+1} (k+1-x)|f'(x)|\, dx.$$

Εδώ παίρνουμε την

$$f(x)=\frac{\sin(\sqrt{x})}{x}.$$

Έχουμε $f'(x)=\frac{\sqrt{x}\cos(\sqrt{x})-2\sin(\sqrt{x})}{2x^2}$, άρα για $x\geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)|\leqslant\frac{3}{2x^{3/2}}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}(k+1-x)|f'(x)|\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}\frac{3}{2x^{3/2}}\leqslant\frac{3}{2}\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\,dx<\varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο. Για το άλλο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}f(k)\right|=2\left|\int_{\sqrt{n+1}}^{\sqrt{m+1}}\frac{\sin y}{y}\,dy\right|<\varepsilon$$

αν το n είναι μεγάλο (κατά παράγοντες: $\frac{\sin y}{y}=(-\cos y)'\frac{1}{y}$). Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι βασική, και έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

34. Θεωρούμε την $f(x)=\frac{\cos(\log x)}{x}$, $x>0$ και ξεκινάμε πάλι από την

$$\sum_{k=n+1}^{m}f(k)=\int_{n+1}^{m+1}f(x)\,dx+\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)\,dx.$$

Τώρα γράφουμε

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}f(k)\right|\geqslant\left|\int_{n+1}^{m+1}f(x)\,dx\right|-\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}(k+1-x)|f'(x)|\,dx.$$

Έχουμε $f'(x)=\frac{-\sin(\log x)-\cos(\log x)}{x^2}$, άρα για $x\geqslant 1$ παίρνουμε

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2}{x^2}.$$

Τότε,

$$\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}(k+1-x)|f'(x)|\,dx\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\int_k^{k+1}\frac{2}{x^2}\leqslant 2\int_{n+1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\frac{2}{n+1}.$$

Θεωρούμε $s\in\mathbb{N}$, το οποίο θα υποθέσουμε μετά μεγάλο, και τις διαδοχικές ρίζες

$$r_s=e^{s\pi+\pi/2}\quad\text{και}\quad t_s=e^{s\pi+\pi/2}$$

της f. Αν θέσουμε $n(s)=\lfloor r_s\rfloor$ και $m(s)=\lfloor t_s\rfloor-1$,τότε

$$\left|\int_{n(s)+1}^{m(s)+1}f(x)dx\right|\geqslant\left|\int_{r_s}^{t_s}f(x)dx\right|-2e^{-s\pi}=2-2e^{-s\pi}.$$

Άρα,

$$\left|\sum_{n(s)+1}^{m(s)+1}f(k)\right|>2-2e^{-s\pi}-\frac{2}{n(s)+1}>1$$

αν το s είναι αρκετά μεγάλο. Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\log n)}{n}$ δεν είναι βασική, άρα η σειρά αποκλίνει.

35. Για κάθε $n\geqslant 1$ έχουμε ότι

$$\arctan\left(\frac{1}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)=\arctan\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}}{1+\frac{1}{n(n+2)}}\right)=\arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right).$$

Συνεπώς, για κάθε $N \geqslant 2$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=2}^{N} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{N=1} \arctan\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right) = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \arctan\left(\frac{1}{n+2}\right)\right)$$
$$= \arctan(1) + \arctan(1/2) - \arctan(1/N) - \arctan(1/(N+1)) \longrightarrow \arctan(1) + \arctan(1/2)$$

όταν $N \to \infty$. Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \arctan(2) + \sum_{n=2}^{\infty} \arctan\left(\frac{2}{n^2}\right) = \arctan(2) + \arctan(1) + \arctan(1/2)$$
$$= \frac{\pi}{4} + \arctan(2) + \arctan(1/2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

37. Πρώτος τρόπος: Η ζητούμενη σειρά ισούται με

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{n(n+1)} \mathbf{1}_{k \leq n} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{n(n+1)} \mathbf{1}_{k \leq n} \tag{1}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{k} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{2}$$

Στην προτελευταία ισότητα, υπολογίσαμε το άθροισμα της τηλεσκοπικής σειράς $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1/k$.
Δεύτερος τρόπος: Κάνουμε άθροιση κατά μέρη. Θέτουμε $s_0 := 0$. Για κάθε N θετικό ακέραιο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} s_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) s_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} s_n - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} s_{n-1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}(s_n - s_{n-1}) - \frac{1}{N+1} s_N.$$

Το τελευταίο άθροισμα συγκλίνει στο $\pi^2/6$, ενώ $\lim_{N\to\infty} s_N/(N+1) = 0$ αφού $s_N < 1 + \log N$.

38. Υποθέτουμε ότι οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ συγκλίνουν και οι δύο. Ειδικότερα $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Έχουμε ότι $0 < A < \infty$. Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{b_n} \geqslant \frac{1}{A} \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ αποκλίνει, διότι η αρμονική σειρά συγκλίνει, και έτσι οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Για τον ισχυρισμό, έστω ότι $b_n > An$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό του b_n, υπάρχουν b_n φυσικοί αριθμοί k τέτοιοι ώστε $a_k \geqslant \frac{1}{n}$. Τότε,

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \frac{1}{n} \#\{k : a_k \geqslant 1/n\} \geqslant \frac{1}{n} \cdot b_n > \frac{1}{n} \cdot An = A,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\frac{1}{b_n} \geqslant \frac{1}{A} \frac{1}{n}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$.

39. Από την Άσκηση 16 έχουμε ότι $\sqrt{n} a_n \to \sqrt{3}$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{1/n} = 3$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ αποκλίνει.

40. Έστω N θετικός ακέραιος. Θα δείξουμε ότι για το N-οστό μερικό άθροισμα της δοσμένης σειράς ισχύει

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi(n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

[Το όριο του δεξιού μέλους για $N \to \infty$ ισούται με ∞ και έχουμε το συμπέρασμα.] Έστω ότι $\{\pi(n) : n = 1, 2, \ldots, N\} = \{j_1, j_2, \ldots, j_N\}$ με $j_1 < j_2 < \cdots < j_N$. Από την ανισότητα αναδιάταξης,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\pi(n)}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{j_n}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}.$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι $j_n \geq n$ για κάθε n επειδή οι τιμές της π είναι θετικοί ακέραιοι και η π είναι 1-1.

41. Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις υπολογίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{k+1} \frac{a_k}{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(k+1)}{k+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+2},$$

απ' όπου παίρνουμε ότι $e - a_0 = e - a_1$, και συνεπώς $a_0 = a_1$.

Χρησιμοποιώντας ξανά την υπόθεση έχουμε ότι

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=n-2}^{\infty} \frac{a_k}{k+2} - \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{a_k}{k+2} = \frac{a_{n-2}}{n}$$

για κάθε $n \geqslant 2$, και με επαγωγή ως προς n από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ για κάθε $n \geqslant 0$. Τώρα, από την $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ συμπεραίνουμε ότι $a_0 = 1$ και έπεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/3)^n}{n!} = \sqrt[3]{e}.$$

42. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+m}\sqrt{\frac{m}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $t = \sqrt{x/m}$ (οπότε $dx = 2mt\,dt$):

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{m+x}\sqrt{\frac{m}{x}}\,dx = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

45. Για κάθε $n \geqslant 0$ έχουμε ότι $e^{x_n} - x_n \geqslant 1$, άρα ο x_{n+1} είναι καλά ορισμένος και $x_{n+1} \geqslant 0$. Από την $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ παίρνουμε $e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = x_n \geqslant 0$, άρα η ακολουθία (e^{x_n}) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον 1. Έπεται ότι $e^{x_n} \to e^{\ell}$ για κάποιον $\ell \geqslant 0$ (και, φυσικά, $x_n \to \ell$). Επιστρέφοντας στην αναδρομική σχέση $x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n)$ και αφήνοντας το $n \to \infty$, έχουμε ότι $\ell = \ln(e^{\ell} - \ell)$, άρα $e^{\ell} = e^{\ell} - \ell$ και συμπεραίνουμε ότι $\ell = 0$. Τώρα γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (e^{x_k} - e^{x_{k+1}}) = e^{x_1} - e^{x_{n+1}} \to e^{x_1} - e^{\ell} = (e-1) - 1 = e - 2.$$

46. Για το πρώτο άθροισμα, αν δεν θυμόμαστε τη δυναμοσειρά της $\log(1+x)$, θεωρούμε τη συνάρτηση $F_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με $F_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και παράγωγο $F_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$. Άρα $F_1(x) = -\log(1-x)$, και το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $F_1(1/2) = \log 2$.

Για το δεύτερο άθροισμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $F_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ με $F_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^{n+1}$. Όπως πριν, βρίσκουμε ότι $F_2(0) = F_2'(0) = 0$ και για $x \in (-1, 1)$ έχουμε $F_2''(x) = (1-x)^{-1}, F_2'(x) = -\log(1-x)$,

$$F_2(x) = -\int_0^x \log(1-t)\,dt = x + (1-x)\log(1-x),$$

και το ζητούμενο άθροισμα είναι το $F_2(1/2)/(1/2) = 1 - \log 2$.

Για το τρίτο άθροισμα, θεωρούμε τη συνάρτηση $F_3 : (-1,1) \to \mathbb{R}$ με

$$F_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} x^{n+2} = \int_0^x F_2(t)\,dt = -\frac{1}{2}(x-1)^2 \log(1-x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x^2.$$

Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $F_3(1/2)/(1/2)^2 = (2\log 2 - 1)/4$.

47. Για κάθε $t \in [-1,1]$ θέτουμε

$$F(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} t^{4k+4}.$$

Η δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει ομοιόμορφα (σε συνεχή συνάρτηση) στο $[-1,1]$ γιατί

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty.$$

Επομένως $F(1) = \lim_{t\to 1^-} F(t)$, και πιο κάτω θα προσδιορίσουμε την F στο $(-1,1)$. Για κάθε $t \in (-1,1)$ έχουμε

$$F^{(4)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{4k} = \frac{1}{1-t^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}.$$

Τώρα, με ολοκλήρωση θα βρούμε διαδοχικά τις F''', F'', F', F. Η μικρότερη δύναμη του t στη δυναμοσειρά F είναι το t^4, οπότε $F'''(0) = F''(0) = F'(0) = F(0) = 0$.

$$F'''(t) = \int_0^t F^{(4)}(s)\,ds = -\frac{1}{4}\log(1-t) + \frac{1}{4}\log(1+t) + \frac{1}{2}\tan^{-1} t.$$

Αρχικές των $\log x, \tan^{-1}(x)$ (η πρώτη με τιμή 0 στο 1 και η άλλη με τιμή 0 στο 0) είναι οι

$$x\log x - x + 1, x\tan^{-1}(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

(Η πρώτη με τιμή 0 στο 1 και η άλλη με τιμή 0 στο 0.) Αρχικές αυτών είναι οι

$$\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{3x^2}{4} + x - \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}x\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}x^2\tan^{-1}(x) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\tan^{-1}(x).$$

(Η πρώτη με τιμή 0 στο 1 και η άλλη με τιμή 0 στο 0.) Αρχικές αυτών είναι οι

$$\frac{1}{6}x^3\log x - \frac{11x^3}{36} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{x}{4} + \frac{1}{18}, \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x\right)\tan^{-1} x + \frac{1}{12}(1-3x^2)\log(1+x^2) + \frac{5x^2}{12}.$$

(Η πρώτη με τιμή 0 στο 1 και η άλλη με τιμή 0 στο 0.) Ας τις ονομάσουμε $A(x), B(x)$. Η A ορίζεται στο $[0,\infty)$ (στο 0 ως $A(0+)$), η B στο $\mathbb{R}$ και είναι και οι δύο τους συνεχείς. Έπεται ότι για $t \in (-1,1)$ ισχύει

$$F(t) = \frac{1}{4}\{A(1-t) + A(1+t)\} + \frac{1}{2}B(t),$$

και επομένως,

$$F(1-) = \frac{1}{4}\{A(0) + A(2)\} + \frac{1}{2}B(1) = ... = \frac{1}{4}\log 2 - \frac{\pi}{24}.$$

48. Για κάθε n θετικό ακέραιο θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, b_n := a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n$. Επίσης, $b_0 = 0$. Για M θετικό ακέραιο, το M-στο μερικό άθροισμα της δοσμένης σειράς ισούται με

$$\sum_{n=1}^{M} b_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{M} b_n\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{M+1} b_{n-1}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}(b_n - b_{n-1}) - \frac{b_M}{M+1} = s_M - \frac{b_M}{M+1}.$$

Θα δείξουμε ότι $\lim_{M\to\infty} b_M/(M+1) = 0$. Για κάθε $n_0 < M$ θετικό ακέραιο έχουμε

$$0 \le \frac{b_M}{M+1} = \sum_{k=1}^{n_0}\frac{k}{M+1}a_k + \sum_{k=n_0+1}^{M}\frac{k}{M+1}a_k \le \frac{3n_0(n_0+1)}{2(M+1)} + \sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k.$$

Για δοσμένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 ώστε $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k < \varepsilon/2$ και $M_0 > n_0$ ώστε $3n_0(n_+1)/(M_0+1) < \varepsilon/2$. Τότε για κάθε $M \geq M_0$ έχουμε $0 \leq b_M/(M+1) < \varepsilon$. Άρα το άθροισμα της σειράς είναι 3.

49.

50. Έστω $a_{n,k}$ ο k-ος όρος της σειράς. Για την εκτίμηση του $a_{n,k}$, θα χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες

$$\begin{aligned} 1-x &\leq e^{-x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \\ 1-x &\geq e^{-2x} \text{ για κάθε } x \in [0,1/2]. \end{aligned}$$

Έτσι, για κάθε k θετικό ακέραιο, έχουμε

$$(1-2^{-k})^n \geq e^{-n2^{-k+1}} \geq 1 - \frac{n}{2^{k-1}},$$

και επομένως $a_{n,k} \leq n/2^{k-1}$.

Έστω $N_0 := \ulcorner \log_2 n \urcorner$, ο μικρότερος ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του λογαρίθμου του n με βάση το 2. Η σειρά ισούται με $A_n + B_n$ όπου

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{k=1}^{N_0} a_{n,k} \\ B_n &:= \sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_{n,k} \end{aligned}$$

Για το B_n: Από την $a_{n,k} \leq n/2^{k-1}$, παίρνουμε ότι $0 < B_n \leq n2^{-N_0+1} \leq 2$ αφού $N_0 \geq \log_2 n$.
Για το A_n: Για $1 \leq k \leq N_0 (< \log_2 n + 1)$, ισχύει $2^{-k} \geq 1/(2n)$, και άρα

$$1 - e^{-1/2} < 1 - (1-1/(2n))^n \leq a_{n,k} < 1.$$

Άρα το άθροισμα της σειράς είναι σημείο του διαστήματος $[(1-e^{-1/2})N_0, 2+N_0]$, και με χρήση της $\log_2 n \leq N_0 < \log_2 n + 1$ και της $\log_2 n = \log n / \log 2$ παίρνουμε το ζητούμενο με $a := (1-e^{-1/2})/\log 2, b := 4/\log 2$.

51. Ορίζουμε μια μερική διάταξη στο $\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ θέτοντας $n \prec m$ αν και μόνο αν $\alpha_m \geqslant \rho^{|n-m|}\alpha_n$. Τότε, το B είναι το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων της $\prec$. Αν $m \in B$ και $m \prec s$ τότε $m = s$. Πράγματι, διαφορετικά θα είχαμε

$$\alpha_s < \rho^{|m-s|}\alpha_m \leqslant \alpha_s,$$

το οποίο είναι άτοπο.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η (α_n) είναι φραγμένη, βλέπουμε ότι δεν μπορεί να υπάρχει άπειρη ακολουθία φυσικών η οποία να είναι αύξουσα ως προς την $\prec$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m(n) \in B$ τέτοιος ώστε $n \prec m(n)$, το οποίο σημαίνει ότι

$$\alpha_n \leqslant \rho^{-|n-m(n)|}\alpha_{m(n)} \leqslant \sum_{m \in B} \alpha_m \rho^{-|n-m|}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in B} \alpha_m \rho^{-|n-m|} = \sum_{m \in B} \alpha_m \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{-|n-m|} \leqslant \sum_{m \in B} \alpha_m \cdot 2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \\ &= \frac{2\rho}{\rho-1} \sum_{m \in B} \alpha_m. \end{aligned}$$

52. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $a = 2$. Κάθε φυσικός n γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_m}$, όπου $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ ακέραιοι αριθμοί. Αν θεωρήσουμε την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}$ με $\varphi(n) = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$ τότε η φ είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί, και για κάθε $A \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι

$$\varphi^{-1}(A) = \sum_{k \in A} 2^k.$$

Αφού η φ είναι 1-1 και επί, έχουμε ότι

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} 2^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k\in\varphi(n)} 2^k} = \sum_{n=1} \frac{1}{n},$$

δηλαδή η σειρά αποκλίνει.

Αν $a < 2$ τότε $\frac{1}{\sum_{k\in A} a^k} \geqslant \frac{1}{\sum_{k\in A} 2^k}$ για κάθε $A\in\mathcal{F}$, άρα

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} a^k} \geqslant \sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} 2^k} = +\infty,$$

δηλαδή η σειρά $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} a^k}$ αποκλίνει.

Έστω τώρα $a > 2$. Για κάθε $n \geqslant 0$ συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_n$ την οικογένεια όλων των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}\cup\{0\}$ που έχουν μέγιστο στοιχείο τον n. Η $\mathcal{F}_n$ περιέχει 2^n σύνολα και $\mathcal{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{F}_n$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} a^k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{A\in\mathcal{F}_n} \frac{1}{\sum_{k\in A} a^k} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{A\in\mathcal{F}_n} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{a}\right)^n < +\infty,$$

δηλαδή η σειρά $\displaystyle\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{1}{\sum_{k\in A} a^k}$ συγκλίνει.

54. Η $\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\phi^2(2^k x)}{2^k}$ σειρά συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ από το κριτήριο του Weierstrass.

Προσπαθούμε αρχικά να την υπολογίσουμε στους ρητούς $x = \frac{m}{2^n}$ με $m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$ (που σχηματίζουν πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$).

Η Φ είναι άρτια, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι και ο m είναι φυσικός. Έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(m/2^n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^{k-n}m)}{2^k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^{k-n}m)}{2^{k-n}} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{\phi^2(2^s m)}{2^s} = \frac{1}{2^n}\Phi(m).\end{aligned}$$

Θεωρούμε τον φυσικό m. Αν r είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $m < 2^r$, τότε

$$\Phi(m) = \sum_{k=1}^{r} 2^k\phi^2(2^{-k}m) + \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{m^2}{2^k} = \sum_{k=1}^{r} 2^k\phi^2(2^{-k}m) + \frac{m^2}{2^r}.$$

Με επαγωγή δείχνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{r} 2^k\phi^2(2^{-k}m) = m - \frac{m^2}{2^r}$$

οπότε $\Phi(m) = m$.

Επαγωγικό βήμα: υποθέτουμε ότι έχουμε την ισότητα για $m < 2^r$ και παίρνουμε $m = 2^r + s$ με $0 \leqslant s < 2^r$. Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{r+1} 2^k\phi^2(2^{-k}m) &= \sum_{k=1}^{r} 2^k\phi^2(2^{-k}s) + 2^{r+1}\phi^2(1/2 + s/2^{r+1}) \\ &= s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r+1}(1/2 - s/2^{r+1})^2 = s - \frac{s^2}{2^r} + 2^{r-1} - s + \frac{s^2}{2^{r+1}} \\ &= 2^{r-1} - \frac{s^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{(m-2^r)^2}{2^{r+1}} = 2^{r-1} - \frac{m^2}{2^{r+1}} + m - 2^{r-1} \\ &= m - \frac{m^2}{2^{r+1}}.\end{aligned}$$

Τελικά $\Phi(m/2^n) = m/2^n$ και λόγω συνέχειας, $\Phi(x) = x$ για $x > 0$. Η Φ είναι άρτια, δηλαδή $\Phi(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

56. (α) Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι $\int_0^1 x^{n-1} \ln x \, dx = -\frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Έστω $n \geqslant 0$. Για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε

$$I_{n,k} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{(n+k)^2}.$$

Από το (α) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= -\int_0^1 x^n (1 - x + \cdots + (-x)^{k-1}) \ln x \, dx = -\int_0^1 x^n \frac{1-(-x)^k}{1+x} \ln x \, dx \\ &= -\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x} \, dx + (-1)^k \int_0^1 \frac{x^{n+k} \ln x}{1+x} \, dx. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \cdots = \lim_{k\to\infty} I_{n,k} = -\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x} \, dx$$

διότι

$$0 \leqslant -\int_0^1 \frac{x^{n+k}}{1+x} \ln x \, dx \leqslant -\int_0^1 x^k \ln x \, dx = \frac{1}{(k+1)^2} \to 0$$

όταν $k \to \infty$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \cdots \right) &= -\sum_{n=0}^{m} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x} \, dx \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \sum_{i=n}^{m} (-x)^n dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x} \frac{1-(-x)^{m+1}}{1+x} \, dx \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx + (-1)^{m+1} \int_0^1 \frac{x^{m+1} \ln x}{(1+x)^2} \, dx. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $m \to \infty$ παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \cdots \right) = -\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx,$$

διότι

$$0 \leqslant -\int_0^1 \frac{x^{m+1}}{(1+x)^2} \ln x \, dx \leqslant -\int_0^1 x^{m+1} \ln x \, dx = \frac{1}{(m+2)^2} \to 0$$

όταν $m \to \infty$. Τέλος, υπολογίζουμε το

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2} \, dx = -\ln 2$$

και τελικά έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} - \cdots \right) = \ln 2.$$

Εναλλακτική λύση για το (β)

Για κάθε n θετικό ακέραιο θέτουμε $a_n := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} (n+k)^{-2}$. Ισχύει $0 < a_n < (n+1)^{-2}$. Για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n_0 έχουμε

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} (-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} (-1)^n \sum_{k=1}^{n_0-n} \frac{(-1)^{k+1}}{(n+k)^2} + \sum_{n=0}^{n_0-1} (-1)^n \sum_{k=n_0-n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(n+k)^2} \tag{3}$$

$$= \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{k=1}^{n_0-n} \frac{(-1)^{n+k+1}}{(n+k)^2} + n_0 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} \tag{4}$$

$$= \sum_{j=1}^{n_0} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} j + n_0 (-1)^{n_0} a_{n_0} \overset{n_0\to\infty}{\to} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \log 2. \tag{5}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $na_n < 1/n$ και την τιμή για την εναλλάσσουσα σειρά.

57. (α) Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε $f(nT) = 0$ και $\lim\limits_{x \to (nT+a)^-} f(x) = +\infty$, άρα η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(nT, nT + a)$. Αν η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ στο $(nT, nT + a)$ έχει δύο ρίζες $x_{n,1} < x_{n,2}$ τότε από το θεώρημα Rolle υπάρχει $r_n \in (x_{n,1}, x_{n,2}) \subset (nT, nT + a)$ τέτοιο ώστε $g'(r_n) = 0$, άρα $f'(r_n) = 1$, το οποίο είναι άτοπο διότι, λόγω περιοδικότητας, έχουμε $f' > 1$ στο $(nT, nT + a)$.

(β) Για κάθε $n \geqslant 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(nT, nT + a)$. Θα δείξουμε ότι η (y_n) είναι φθίνουσα. Έστω ότι $y_n < y_{n+1}$ για κάποιον n. Τότε, $x_{n+1} < T + x_n$ και από τη μονοτονία της f παίρνουμε

$$x_n = f(x_n) = f(x_n + T) > f(x_{n+1}) = x_{n+1},$$

το οποίο είναι άτοπο. Έχουμε επίσης $0 < y_n < a$ για κάθε n, άρα $y_n \to y_0 \in [0, a)$. Έστω ότο $y_0 > 0$. Τότε, $x_n - nT \to a - y_0$ και από τη συνέχεια της f στο $(-T, a)$ βλέπουμε ότι $f(x_n - nT) \to f(a - y_0)$. Όμως, $f(x_n - nT) = f(x_n) = x_n \to +\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς, $y_n \to 0$.

Θα δείξουμε ότι $ny_n \to \frac{1}{T}$, οπότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ αποκλίνει. Παρατηρούμε ότι

$$x_n y_n = f(x_n) y_n = f(nT + a - y_n) y_n = \frac{y_n}{\frac{1}{f(a-y_n)}} = -\frac{(a - y_n) - a}{\frac{1}{f(a-y_n)}}.$$

Όμως, $a - y_n \to a$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a - y_n) - a}{\frac{1}{f(a-y_n)}} = \lim_{x \to a^-} \frac{1}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = -1.$$

Έπεται ότι

$$ny_n = \frac{nT}{Tx_n} \cdot x_n y_n \to \frac{1}{T} \cdot 1 = \frac{1}{T}.$$

Για τη δεύτερη σειρά, παρατηρούμε ότι για κάθε n υπάρχει $t_n \in (0, y_n)$ τέτοιος ώστε $z_n = y_n f(t_n)$. Αφού η f είναι αύξουσα στο $(0, a)$ έχουμε ότι

$$z_n \leqslant y_n f(y_n) = y_n^2 \frac{f(y_n)}{y_n}.$$

Όμως η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $\frac{f(y_n)}{y_n} \to f'(o) \geqslant 0$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{f(y_n)}{y_n} \leqslant M$. Έπεται ότι $0 \leqslant z_n \leqslant My_n^2 \leqslant \frac{M_1}{n^2}$ για κάποια σταθερά $M_1 > 0$, και από το κριτήριο σύγκρισης συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει.

58. Για κάθε $n \geqslant 1$ θέτουμε

$$I_n = \int_0^n |\sin(\pi x)|^x dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)|^x dx.$$

Τότε,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)|^{k+1} dx < I_n < \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\sin(\pi x)|^k dx.$$

Με την αντικατάσταση $t = \pi x - k\pi$ βλέπουμε ότι

$$\int_k^{k+1} |\sin(\pi x)|^m dx = J_m := \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin t)^m dt$$

για κάθε $m \geqslant 0$. Άρα,

$$(*) \qquad \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} J_k < I_n < \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} J_k.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι $J_k = (k-1)J_{k=2} - (k-1)J_k$ για κάθε $k \geqslant 2$, δηλαδή $J_k = \frac{k-1}{k} J_{k-2}$ για κάθε $k \geqslant 2$. Αφού $J_0 = \pi$ και $J_1 = 2$, με επαγωγή βλέπουμε ότι

$$J_{2k} = \pi \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \quad \text{και} \quad J_{2k+1} = 2 \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Παρατηρούμε ότι
$$J_{2k-1}J_{2k} = \frac{2\pi}{2k} \quad \text{και} \quad J_{2k}J_{2k+1} = \frac{2\pi}{2k+1}.$$
Επίσης, η (J_n) είναι φθίνουσα, άρα
$$\frac{2\pi}{2k+1} = J_{2k}J_{2k+1} \leqslant J_{2k}^2 \leqslant J_{2k-1}J_{2k} = \frac{2\pi}{2k},$$
απ' όπου παίρνουμε $\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{2k+1}} = \sqrt{2k}J_{2k} \leqslant \sqrt{2\pi}$, και συνεπώς,
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{2k}J_{2k} = \sqrt{2\pi}.$$
Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{2k+1}{2k+2}} = \sqrt{2k+1}J_{2k+1} \leqslant \sqrt{2\pi}$, άρα
$$\lim_{k\to\infty} \sqrt{2k+1}J_{2k+1} = \sqrt{2\pi}.$$
Έτσι, έχουμε δείξει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}J_n = \sqrt{2\pi}$. Από το λήμμα Cesàro-Stolz έπεται ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{J_1 + \cdots + J_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{J_{n+1}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})J_{n+1} = 2\sqrt{2\pi}.$$
Επιστρέφοντας στην $(*)$ βλέπουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\pi}\cdot 2\sqrt{2\pi} = 2\sqrt{2/\pi}.$$
Από την $a_n = \frac{I_n}{n^p} = \frac{I_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει την ίδια συμπεριφορά με τη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$, δηλαδή συγκλίνει αν και μόνο αν $p > \frac{3}{2}$.

59. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x^n$. Η g είναι συνεχής, $g(0) = f(0) > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 < 0$ (αφού η $f : [0,1] \to [0,1]$ είναι γνησίως φθίνουσα, αναγκαστικά $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$). Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $a_n \in (0,1)$ ώστε $g(a_n) = 0$, δηλαδή $f(a_n) = a_n^n$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $b_n \in (0,1)$, π.χ. $b_n > a_n$ τέτοιος ώστε $f(b_n) = b_n^n$ τότε $f(b_n) = b_n^n > a_n^n = f(a_n)$, το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα (άρα $f(b_n) < f(a_n)$). Συνεπώς, η λύση a_n της εξίσωσης $f(x) = x^n$ στο $(0,1)$ είναι μοναδική.

Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν για κάποιον n έχουμε $a_n \geqslant a_{n+1}$ τότε $a_n^n = f(a_n) \leqslant f(a_{n+1}) = a_{n+1}^{n+1} < a_{n+1}^n$, συνεπώς $a_n < a_{n+1}$ και οδηγούμαστε σε αντίφαση.

Αφού η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 1, υπάρχει $0 < \ell \leqslant 1$ τέτοιος ώστε $a_n \to \ell$. Έστω ότι $\ell < 1$. Τότε, $0 \leqslant f(a_n) = a_n^n \leqslant \ell^n \to 0$, άρα $f(a_n) \to 0$, ενώ από τη συνέχεια της f έχουμε επίσης ότι $f(a_n) \to f(\ell)$. Άρα, $f(\ell) = 0$, το οποίο είναι άτοπο διότι $f(\ell) > f(1) \geqslant 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $a_n \to 1$.

(β) Η F είναι καλά ορισμένη, και από τις υποθέσεις βλέπουμε ότι η F έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Επίσης, $F(1) = 0$, $F'(x) = -f(x)$ άρα $F'(1) = -f(1) = 0$, και $F''(x) = -f'(x)$ άρα $F''(1) = -f'(1) > 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι $F(x) > 0$ για κάθε $0 \leqslant x < 1$. Από το θεώρημα Taylor στο $[a_n, 1]$, για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν $s_n, t_n \in (a_n, 1)$ ώστε
$$F(a_n) = F(1) + F'(1)(a_n - 1) + \frac{F''(s_n)}{2}(a_n-1)^2 = -\frac{f'(s_n)}{2}(a_n-1)^2$$
και
$$f(a_n) = f(1) + f'(t_n)(a_n - 1) = f'(t_n)(a_n - 1).$$
Αφού $s_n \to 1$ και η f' είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n-1)^2}{F(a_n)} = -\frac{2}{f'(1)} > 0.$$
Συνεπώς, για κάθε $p \in \mathbb{R}$ οι σειρές $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(a_n))^p$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-a_n)^{2p}$ έχουν την όδια συμπεριφορά.

Παρατηρούμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} n(1-a_n) = -\lim_{n\to\infty} n\frac{(a_n-1)}{\ln(1+(a_n-1))}\ln a_n = -\lim_{n\to\infty} \ln(a_n^n) = \lim_{n\to\infty}(-\ln(f(a_n))) = +\infty$$

διότι $f(a_n) \to f(1) = 0$. Αυτό δείχνει ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)$ αποκλίνει, άρα για κάθε $p \leqslant \frac{1}{2}$ έχουμε επίσης ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)^{2p}$ αποκλίνει.

Έστω τώρα $p > \frac{1}{2}$. Για κάθε $0 < \gamma < 1$ έχουμε ότι

$$n^\gamma (1 - a_n) = [n(1 - a_n)]^\gamma (1 - a_n)^{1-\gamma} = \lim_{n\to\infty} \left([n(1 - a_n)]^\gamma \left(-\frac{f(a_n)}{f'(t_n)} \right)^{1-\gamma} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(-f'(t_n))^{1-\gamma}} \lim_{n\to\infty} (-\ln(f(a_n)))^\gamma (e^{(1-\gamma)(-\ln(f(a_n)))}).$$

Έχουμε $-f'(t_n) \to -f'(1) > 0$ διότι $t_n \to 1$, και αφού $-\ln(f(a_n)) \to +\infty$ και $\lim_{y\to+\infty} \frac{y^\gamma}{e^{(1-\gamma)y}} = 0$ συμπεραίνουμε ότι $n^\gamma(1 - a) \to 0$. Επιλέγοντας $\epsilon > 0$ ώστε $\gamma := \frac{1+\epsilon}{2p} < 1$, βλέπουμε ότι

$$n^{1+\epsilon}(1 - a_n)^{2p} = n^{2p\gamma}(1 - a_n)^{2p} \to 0,$$

άρα η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - a_n)^{2p}$ συγκλίνει.

Τελικά, η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (F(a_n))^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p > \frac{1}{2}$.

60. Με επαγωγή βλέπουμε ότι $0 < x_n < 1$ για κάθε $n \geqslant 1$. Από την $x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2}{\sqrt{n}}$ έχουμε ότι η (x_n) είναι φθίνουσα λαι

$$0 < 1 - \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Από την αναδρομική σχέση παίρνουμε

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1.$$

Αφού $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \to +\infty$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα Cesàro-Stolz και έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = 1.$$

Πάλι από το λήμμα Cesàro-Stolz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x_n}}{\sqrt{n}} = 2$, άρα για κάθε $p \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^p}{\frac{1}{n^{p/2}}} = \frac{1}{2^p}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p/2}}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 2$.

62. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει, έχουμε ότι η ακολουθία $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ με

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{k} \longrightarrow 0.$$

Προσθέτοντας τις ανισότητες

$$\begin{aligned} r_0 &= \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \\ r_1 &= \sum_{j=2}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \\ \cdots & \quad \cdots \\ r_{n-1} &= \sum_{j=n}^{n} \frac{a_j}{j} + r_n \end{aligned}$$

παίρνουμε

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} = nr_n + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{j} \sum_{k=0}^{j-1} \mathbf{1} = nr_n + (a_1 + \cdots + a_n).$$

Έπεται ότι

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = -r_n + \frac{r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1}}{n} \longrightarrow 0.$$

63. Γράφουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} = \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} \cdot \frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \leqslant 2$ τότε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2 \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)}.$$

Αν $\frac{\log(1/\alpha_n)}{\log n} \geqslant 2$ τότε $\alpha_n \leqslant \frac{1}{n^2}$, άρα

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$\frac{\alpha_n}{\log n} \leqslant 2 \frac{\alpha_n}{\log(1/\alpha_n)} + \frac{1}{n^2 \log n}.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\log(n+1)}$ συγκλίνει.

65. Ελέγχουμε αρχικά ότι $e^{-t} \geqslant e^{-2} - 1 + \frac{1}{t}$ για κάθε $t \geqslant 1$. Από αυτή την ανισότητα έπεται ότι

$$x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \geqslant \frac{x_n}{e^2} - (x_n - x_{n+1})$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} x_n \exp\left(-\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{e^2} + x_{N+1} - x_1 \geqslant -x_1 + \frac{1}{e^2} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε το ζητούμενο λόγω της υπόθεσης ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$.

66. Αποδεικνύουμε αρχικά το έξής: αν $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{C}$ με $|x_j| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$ τότε υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_k x_k| \leqslant \sqrt{3}.$$

Αυτό ελέγχεται εύκολα για $= 1, 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για τον $N - 1 \geqslant 2$ και το δείχνουμε για τον N.

Θεωρούμε τους x_1, x_2, x_3 και παρατηρούμε ότι τουλάχιστον ένας από τους $x_1 \pm x_2, x_1 \pm x_3, x_2 \pm x_3$ έχει μέτρο $\leqslant 1$ (για το σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι αν $a \neq b$ και $|a|, |b| \leqslant 1$ τότε αν $|a \pm b| > 1$ η γωνία aob είναι γνήσια μεταξύ $\pi/3$ και $2\pi/3$). Ας πούμε ότι $|x_1 + \epsilon_2 x_2| \leqslant 1$. Ορίζουμε $y_2 = x_1 + \epsilon_2 x_2$, $y_3 = x_2$ και $y_j = x_j$ για $j \in \{4, \ldots, N\}$. Από την επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε $\delta_j \in \{-1, 1\}$ ώστε

$$\max_{2 \leqslant k \leqslant N} |\delta_2 y_2 + \cdots + \delta_k x_k| \leqslant \sqrt{3}$$

και τότε

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}|\epsilon_1x_1+\cdots+\epsilon_kx_k|\leqslant\sqrt{3},$$

όπου $\epsilon_1=1$ και $\epsilon_k=\delta_k$ για $k\in\{3,\dots,N\}$.

Τώρα χρησιμοποιώντας την $z_n\to 0$ βρίσκουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών N_k ώστε $|z_n|\leqslant\frac{1}{2^k}$ για κάθε $n\geqslant N_k$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για τα $z_{N_k},\dots,z_{N_{k+1}-1}$ βρίσκουμε πρόσημα ϵ_n, $N_k\leqslant n<N_{k+1}$ ώστε

$$\max_{N_k\leqslant m<N_{k+1}}\left|\sum_{n=N_k}^{m}\epsilon_nz_n\right|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2^k}.$$

Από το κριτήριο Cauchy βλέπουμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon_nz_n$ συγκλίνει.

69. Έστω $\phi:=(1+\sqrt{5})/2,\hat{\phi}:=(1-\sqrt{5})/2$. Οι $\phi,\hat{\phi}$ ικανοποιούν τις $\phi+\hat{\phi}=1,\phi\cdot\hat{\phi}=-1$, άρα είναι οι δύο λύσεις της $x^2-x-1=0$. Κατά τα γνωστά από τη θεωρία γραμμικών αναδρομικών ακολουθιών, η ακολουθία (a_n) ικανοποιεί τη σχέση $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ για κάθε $n\geqslant 2$ (αλλά και άμεσα, οι $\phi^n,\hat{\phi}^n$, ικανοποιούν την αναδρομική σχέση εξαιτίας της εξίσωσης που ικανοποιούν οι $\phi,\hat{\phi}$). Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι

$$\prod_{n=1}^{m}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\prod_{n=1}^{m}\frac{(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)}{a_na_{n+1}}=\prod_{n=1}^{m}\frac{a_{n-1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_0a_{m+2}}{a_ma_2}.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty}\prod_{n=1}^{m}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{a_0}{a_2}\lim_{m\to\infty}\frac{a_{m+2}}{a_m}=\frac{a_0}{a_2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Οι a_n ονομάζονται αριθμοί Lucas.

70. Από την ταυτότητα $-\log(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ για $|x|<1$ παίρνουμε

$$g(x):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=-\frac{\log(1-x)}{x}.$$

Έπεται ότι

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}=\frac{g(x)+g(-x)}{2}=\frac{1}{2x}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Από αυτή τη σχέση ελέγχουμε εύκολα τη ζητούμενη συναρτησιακή εξίσωση για την f.

71. (α) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{n}\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n}\prod_{n=2}^{N}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{N}\cdot\frac{N+1}{2}=\frac{N+1}{2N}\longrightarrow\frac{1}{2}.$$

(β) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=2}^{N}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}=\prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n+1}\cdot\prod_{n=2}^{N}\frac{(n+1)^2-(n+1)+1}{n^2-n+1}$$

$$=\frac{2}{N(N+1)}\cdot\frac{(N+1)^2-(N+1)+1}{2^2-2+1}=\frac{2(N^2+N+1)}{3N(N+1)}\longrightarrow\frac{2}{3}.$$

(γ) Έστω $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<1$. Έχουμε ότι

$$\prod_{n=0}^{N}(1+x^{2^k})=\prod_{n=0}^{N}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}}=\frac{1-x^{2^{N+1}}}{1-x}\longrightarrow\frac{1}{1-x}.$$

72. (α) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}=\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}\cdot\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n+2}=(N+1)\frac{2}{N+2}\longrightarrow 2.$$

(β) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=1}^{N} 2^{\frac{(-1)^n}{n}} = 2^{\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n}}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$ και η $x \mapsto 2^x$ είναι συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\prod_{n=1}^{N} 2^{\frac{(-1)^n}{n}} \longrightarrow 2^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}} = 2^{-\ln 2}.$$

(γ) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \prod_{n=1}^{N} \frac{n}{n+1} \cdot \prod_{n=1}^{N} e^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{N+1} e^{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}} = \frac{N}{N+1} e^{\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N}.$$

Γνωρίζουμε ότι $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln N \to \gamma$, όπου γ είναι η σταθερά του Euler, και η $x \mapsto e^x$ είναι συνεχής συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\prod_{n=1}^{N} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow e^{\gamma}.$$

73. (α) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} \longrightarrow 1$$

και

$$\prod_{n=2}^{2N-1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2N-1}{2N-2} \cdot \frac{2N-2}{2N-1} = 1$$

για κάθε $N \geqslant 1$. Άρα, $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$.

(β) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = N+1 \longrightarrow +\infty$$

άρα το απειρογινόμενο $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει στο $+\infty$. (γ) Έχουμε ότι

$$\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{N} \longrightarrow 0$$

άρα το απειρογινόμενο $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει στο 0.

74. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $a_n \geqslant 0$ και $a_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Για αρκετά μεγάλα N έχουμε ότι $\sum_{n=N}^{\infty} a_n < \frac{1}{2}$, άρα

$$\prod_{n=N}^{M} (1-a_n) \geqslant 1 - \sum_{n=N}^{M} a_n > \frac{1}{2}$$

για κάθε $M > N$. Εφόσον

$$P_M = \prod_{n=1}^{M} (1-a_n) = P_{N-1} \prod_{n=N}^{M} (1-a_n),$$

βλέπουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{P_M}{P_{N-1}}\right)_{m=N}^{\infty}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιον $P \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Τότε, $P_M \longrightarrow P_{N-1}P \neq 0$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Αν δεν ισχύει ότι $a_n \to 1$ τότε δεν ισχύει ότι $1-a_n \to 1$, άρα το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ δεν συγκλίνει. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a_n \to 0$, οπότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 \leqslant a_n < 1$ για κάθε $n \geqslant N$. Από την $1 - y \leqslant e^{-y}$ συμπεραίνουμε ότι

$$0 \leqslant \prod_{n=N}^{M}(1-a_n) \leqslant \exp\left(-\sum_{n=N}^{M} a_n\right)$$

για κάθε $M > N$. Όμως, $\lim\limits_{M\to\infty}\sum\limits_{n=N}^{M} a_n = +\infty$, διότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. Έπεται ότι $\lim\limits_{M\to\infty}\prod\limits_{n=N}^{M}(1-a_n) = 0$, άρα το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$ αποκλίνει στο 0.

(α) Γράφουμε $\cos\frac{1}{n} = 1 - \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ και παρατηρούμε ότι $1 \neq 1-\cos\frac{1}{n} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n}$ συγκλίνει διότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} > 0.$$

(β) Με τον ίδιο συλλογισμό βλέπουμε ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ συγκλίνει διότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)$ συγκλίνει (ελέγξτε τις λεπτομέρειες.

(γ) Με τον ίδιο συλλογισμό, αρκεί να εξετάσουμε αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ συγκλίνει. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει, άρα το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

(δ) Όπως πριν, το πρόβλημα ανάγεται στη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$. Όμως, η σειρά αυτή αποκλίνει διότι $\sqrt[n]{n} - 1 \geqslant \frac{1}{n}$ για κάθε $n \geqslant 3$.

(ε) Όπως πριν, το πρόβλημα ανάγεται στη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n^2]{n}-1)$. Αφού $\sqrt[n^2]{n} \to 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\sqrt[n^2]{n}-1}{\frac{\ln n}{n^2}} = \frac{\sqrt[n^2]{n}-1}{\ln(\sqrt[n^2]{n})} \longrightarrow 1.$$

Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$. Η τελεταία σειρά συγκλίνει, άρα το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n^2]{n}$ συγκλίνει.

75. Θα αποδείξουμε κάτι γενικότερο: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε το απειρογικόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει. Κατόπιν, εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα με $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Αφού $a_n^2 = \frac{1}{n}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ αποκλίνει, άρα το απειρογινόμενο $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ αποκλίνει.

Για τον γενικό ισχυρισμό, αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a_n| < 1$. Επίσης, $a_n \to 0$ άρα έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$. Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - \ln(1+a_n))$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, βλέπουμε τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει. Τέλος, παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση του απειρογινομένου $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$.

Σημείωση. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ αποκλίνει τότε από την $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$ έχουμε ότι $a_n - \ln(1+a_n) > a_n^2/4$ για όλους τελικά τους n, άρα $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) = -\infty$, το οποίο συνεπάγεται ότι το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ αποκλίνει στο 0.

76. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^3$ συγκλίνει, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|a_n| < 1$. Επίσης $a_n \to 0$, άρα

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}a_n^2\right|}{|a_n|^3} = \frac{1}{3}.$$

Από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \left(\ln(1+a_n) - a_n + \frac{1}{2}a_n^2\right)$ συγκλίνει απολύτως, και αφού η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \left(a_n - \frac{1}{2}a_n^2\right)$ συγκλίνει κι αυτή, βλέπουμε τώρα ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty \ln(1+a_n)$ συγκλίνει. Τέλος, παρατηρούμε ότι η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^\infty \ln(1+a_n)$ είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση του απειρογινομένου $\prod_{n=1}^\infty (1+a_n)$.

77. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι αν το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty (1+a_n)$ και η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει. Από τον τύπο του Taylor έχουμε ότι αν $|a_n| < \frac{1}{2}$ τότε

$$\ln(1+a_n) = a_n - \theta_n a_n^2$$

για κάποια σταθερά $\frac{1}{10} < \theta_n < 2$. Συνεπώς, αν $N > M$ είναι αρκετά μεγάλοι φυσικοί, έχουμε ότι

$$\sum_{n=M}^N \ln(1+a_n) = \sum_{n=M}^N a_n - \theta_{M,N} \sum_{n=M}^N a_n^2$$

όπου $\frac{1}{10} < \theta_{M,N} < 2$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο Cauchy συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει.

Έστω τώρα ότι τα απειρογινόμενα $\prod_{n=1}^\infty (1+a_n)$ και $\prod_{n=1}^\infty (1-a_n)$ συγκλίνουν. Τότε, το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty (1-a_n^2)$ συγκλίνει κι αυτό. Έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ συγκλίνει, και από το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_n$ συγκλίνει.

78. Για κάθε $n > 1$ έχουμε

$$a_n = \frac{n}{x+n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-k}{x+k} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x-n}{x+n}\right) \prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-k}{x+k} = \frac{1}{2}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{x-k}{x+k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{x-k}{x+k}\right).$$

Άρα,

$$S_n := \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{1+x} + \sum_{k=2}^n a_k = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{x-1}{x+1} - \prod_{k=1}^n \frac{x-k}{x+k} = \frac{1}{2} - \prod_{k=1}^n \frac{x-k}{x+k}.$$

Αν $x \in \mathbb{N}$ τότε για όλους τελικά τους n το παραπάνω γινόμενο μηδενίζεται και έχουμε ότι $S_n = \frac{1}{2}$.

Έστω ότι $x \notin \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι, πάλι, $S_n \to \frac{1}{2}$, δείχνοντας ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^n \frac{x-k}{x+k} = 0$. Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{M}$ τέτοιος ώστε $\left|\frac{x-k}{x+k}\right| = 1 - \frac{2x}{x+k}$ για κάθε $k \geqslant k_0$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=k_0}^\infty \frac{2x}{x+k}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_0}^n \frac{x-k}{x+k} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=k_0}^n \left(1 - \frac{2x}{x+k}\right) = 0,$$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^n \frac{x-k}{x+k} = 0$.

79. Το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^\infty \left(\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$. Η σειρά αυτή συγκλίνει απολύτως, διότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right|}{\frac{x^2}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Το απειρογινόμενο $\prod_{n=1}^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^x \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}$ συγκλίνει διότι

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + a_n(x)$$

όπου $a_n(x) = \frac{x(x-1)}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ και η σειρά $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n(x)$ συγκλίνει.

80. Για $x \in (-1,1)$ γράφουμε

$$\frac{x}{1-|x|} f'(x) = \left(\sum_{k=0}^\infty |x|^k\right) \sum_{n=0}^\infty 2^n x^{2^n},$$

άρα

$$\frac{|x|}{1-|x|}|f'(x)| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty}|x|^k\right)\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2^n} = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{0\leqslant n\leqslant 2^m}2^k\right)|x|^m \leqslant 2\sum_{m=1}^{\infty}m|x|^m = 2\frac{|x|}{(1-|x|)^2}.$$

Έπεται ότι $|f'(x)| \leqslant \dfrac{2}{1-|x|}$.

81. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)e^{-\arctan x}$. Αφού $f(-1) = f(1) = 0$, έχουμε ότι $g(-1) = g(1) = 0$. Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$, δηλαδή

$$f'(\xi)e^{-\arctan\xi} - f(\xi)e^{-\arctan\xi}\cdot\frac{1}{1+\xi^2} = 0.$$

Από αυτήν την ισότητα βλέπουμε αμέσως ότι το ξ ικανοποιεί την $f(\xi) = (1+\xi^2)f'(\xi)$.

82. Από τον τύπο της f και από την υπόθεση για τους c_i είναι φανερό ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c_i \neq 0$ για κάθε $i = 1,\dots,n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \log f(x)$ στο διάστημα $(-\delta,\delta)$ όπου $\delta = \min\{1/|c_1|,\dots,1/|c_n|\}$. Στο διάστημα αυτό έχουμε $f(x) > 0$, άρα η g είναι καλά ορισμένη. Παρατηρήστε επίσης ότι $f(0) = 1$.

Έχουμε $g(x) = -\sum_{i=1}^{n}\log(1-c_i x)$, άρα

$$g^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(k-1)!c_i^k}{(1-c_i x)^k}$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Ειδικότερα, για $x = 0$ παίρνουμε

$$g^{(k)}(0) = c_1^k + c_2^k + \cdots + c_n^k > 0.$$

Δηλαδή, όλες οι παράγωγοι της g στο $x = 0$ είναι θετικές. Τώρα, παρατηρούμε ότι η k-οστή παράγωγος της συνάρτησης $f = e^g$ εκφράζεται συναρτήσει των παραγώγων της g ως εξής:

$$f^{(k)} = (e^g)^{(k)} = e^g\cdot\sum a_{(r_1,m_1),\dots,(r_s,m_s)}(g^{(r_1)})^{m_1}(g^{(r_2)})^{m_2}\cdots(g^{(r_s)})^{m_s}$$

όπου το άθροισμα έχει πεπερασμένους το πλήθος όρους, οι r_j, m_j και οι συντελεστές $a_{(r_1,m_1),\dots,(r_s,m_s)}$ είναι φυσικοί αριθμοί. Αυτό ελέγχεται εύκολα με επαγωγή. Για παράδειγμα, $f' = e^g\cdot g'$, $f'' = e^g((g')^2 + g'')$, και ούτω καθεξής.

Έπεται τώρα ότι, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$f^{(k)}(0) = \sum a_{(r_1,m_1),\dots,(r_s,m_s)}(g^{(r_1)}(0))^{m_1}(g^{(r_2)}(0))^{m_2}\cdots(g^{(r_s)}(0))^{m_s} > 0.$$

87. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε $\left|f(x) + \frac{f'(x)}{x}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x > a$. Θεωρούμε $x > a$ και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g, h : [a,x] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{x^2/2}f(x)$ και $h(x) = e^{x^2/2}$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy υπάρχει $\xi \in (a,x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(\xi)}{h'(\xi)} = f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{\xi}.$$

Συνεπώς,

$$\left|f(x) - f(a)e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)}\right| = \left|f(\xi) + \frac{f'(\xi)}{\xi}\right|\cdot\left|1 - e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)}\right|$$

και έπεται ότι

$$|f(x)| \leqslant \left|f(a)e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left|1 - e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)}\right| \leqslant |f(a)|e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)} = 0$, υπάρχει $b > a$ τέτοιος ώστε $|f(a)|e^{\frac{1}{2}(a^2-x^2)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x > b$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|f(x)| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x > b$, άρα $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

90. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1/f(x)$, $x \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} < 0 \quad \text{και} \quad g''(x) = \frac{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f(x))^3} \geqslant 0$$

για κάθε $x \geqslant 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $g'(x) \to 0$ όταν $x \to +\infty$. Η g' είναι αύξουσα και παίρνει αρνητικές τιμές στο $[0,+\infty)$, άρα υπάρχει το όριο $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} g'(x)$ και ισχύει ότι $\ell \leqslant 0$. Αν υποθέσουμε ότι $\ell < 0$, τότε $g'(x) \leqslant \ell$ για κάθε $x \geqslant 0$, άρα $g(x) \leqslant \ell \cdot x + g(0)$ ια κάθε $x \geqslant 0$, δηλαδή $g(x) < 0$ για μεγάλα x, σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $g(x) = 1/f(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$. Άρα, $\ell = 0$.

91. Έστω $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) \geqslant f(x+f(x))$ για κάθε $x > 0$. Τότε, $f'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Ειδικότερα,

$$f'(x) \geqslant f(x+f(x)) > f(x) \geqslant f(1) > 0$$

για κάθε $x \geqslant 1$, άρα $f(x) \geqslant f(1) + f(1)(x-1)$ για κάθε $x \geqslant 1$ και έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geqslant 1$ για κάθε $x \geqslant \alpha$. Τότε, για κάθε $x \geqslant \alpha$ έχουμε ότι

$$f'(x) \geqslant f(x+f(x)) > f(x+1) \geqslant f(\alpha+1).$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε

$$f(\alpha+1) - f(\alpha) = f'(\xi) > f(\alpha+1),$$

άρα $f(\alpha) < 0$ και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

92. Όταν παραγωγίζουμε δύο φορές τη συνάρτηση $f_n(x) = \cos x \cos 2x \cdots \cos nx$, προκύπτουν όροι στους οποίους έχουμε παραγωγίσει από μία φορά δύο διαφορετικούς παράγοντες $\cos kx$ και $\cos mx$ με παραγώγους $-k\sin kx$ και $-m\sin mx$ αντίστοιχα ή όροι στους οποίους έχουμε παραγωγίσει δύο φορές τον ίδιο όρο $\cos kx$ με παράγωγο $-k^2\cos kx$. Συνεπώς, όταν υπολογίζουμε την τιμή $f_n''(0)$ οι όροι του πρώτου είδους θα μηδενιστούν διότι $\sin 0 = 0$ ενώ οι όροι του δεύτερου είδους θα έχουν τιμή $-k^2$. Έτσι βλέπουμε ότι $f_n''(0) = -\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, άρα

$$|f''(0)| = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Η ακολουθία $|f_n''(0)|$ είναι αύξουσα και $|f_{17}''(0)| = 1785$ ενώ $|f_{18}''(0)| = 2109$. Άρα, ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο ισχύει $|f_n''(0)| > 2023$ είναι ο $n = 18$.

93. Θεωρούμε την $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ για $x \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n}+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\frac{k^2}{n^2}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Όμως,

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_0^1 (\log(t^2+1))'dt = \frac{\log 2}{2},$$

άρα τελικά

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{\log 2}{2}.$$

94. Έστω P_n το γινόμενο. Τότε

$$\log P_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\log(1+\frac{k}{n})}{k/n} \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx.$$

Με βάση τη λύση της Άσκησης 29, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\sum_{k=1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = \sum_{k\ \text{περιττός}} \frac{1}{k^2} - \sum_{k\ \text{άρτιος}} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - 2\sum_{k\ \text{άρτιος}}\frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

95. Ισχύει γενικά
$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right).$$
Εδώ,
$$\left(\int_0^1 \sqrt[n]{e^{x^2}}dx\right)^n \to \exp\left(\int_0^1 x^2 dx\right) = e^{1/3}.$$
Σημείωση: Για την απόδειξη της
$$\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp\left(\int_0^1 \log|f|\right)$$
δείξτε πρώτα ότι: αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι κυρτή και $g:[0,1]\to(a,b)$, g συνεχής, τότε
$$F\Big(\int_0^1 g(t)\,dt\Big) \leqslant \int_0^1 (F\circ g)(t)\,dt.$$
[*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $F(g(x)) - F(t_0) \geqslant F'(t_0)(g(x)-t_0)$ όπου $t_0 = \int_0^1 g(t)\,dt$ και ολοκληρώστε.]

Τώρα, αποδείξτε ότι:

(α) $\log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} \geqslant \int_0^1 \log|f|$ για κάθε $p>0$, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο για την $F(t)=e^t$.

(β) $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \geqslant \log\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$ και $(\int_0^1 |f|^p - 1)/p \to \int_0^1 \log|f|$ όταν $p\to 0^+$.

(γ) $\lim_{p\to 0^+}\left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p} = \exp(\int_0^1 \log|f|)$.

96. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $F(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)\,dt$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(x)F(x)\to 1$ όταν $x\to+\infty$, ή ισοδύναμα $F'(x)F^2(x)\to 1$ όταν $x\to+\infty$.

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε $|F'(x)F^2(x)-1|\leqslant\varepsilon$ για κάθε $x\geqslant M$. Τότε, για κάθε $x\geqslant M$ έχουμε ότι
$$F^3(M) - 3(x-M)(1-\varepsilon) \leqslant F^3(x) = F^3(M) + \int_M^x 3F'(x)F^2(x)\,dx \leqslant F^3(M) + 3(x-M)(1+\varepsilon).$$
Έπεται ότι
$$\frac{F^3(M)}{3x} - \frac{x-M}{x}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{F^3(x)}{3x} \leqslant \frac{F^3(M)}{3x} + \frac{x-M}{x}(1+\varepsilon),$$
άρα
$$1-\varepsilon \leqslant \liminf_{x\to+\infty}\frac{F^3(x)}{3x} \leqslant \limsup_{x\to+\infty}\frac{F^3(x)}{3x} \leqslant 1+\varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{F^3(x)}{3x} = 1$, άρα
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{3x}f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{F^3(x)}\right)^{1/3}(F(x)f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x}{F^3(x)}\right)^{1/3}\cdot\lim_{x\to+\infty}(F(x)f(x)) = 1.$$

97. (α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής γράφουμε
$$\begin{aligned} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) &= n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,dx\right) \\ &= n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)dx \\ &= n\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k(x))\left(\frac{k}{n}-x\right)dx. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $m_k = \inf\left\{f'(x) : \frac{k-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k}{n}\right\}$ και $M_k = \sup\left\{f'(x) : \frac{k-1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{k}{n}\right\}$ για $k = 1, \dots, n$, τότε

$$\frac{m_k}{2n^2} = m_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k(x)) \left(\frac{k}{n} - x\right) dx \leqslant M_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = \frac{M_k}{2n^2}$$

άρα

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n m_k \leqslant n \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f'(\xi_k(x)) \left(\frac{k}{n} - x\right) dx \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n M_k.$$

Η f' είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n m_k \to \int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}$$

και, όμοια,

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n M_k \to \int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(x)\,dx\right) = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

(β) Εφαρμόζοντας το (α) για την $f(x) = x^k$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1^k - 0^k}{2} = \frac{1}{2}.$$

98. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_{1-x}^1 f(t)\,dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$F(0) = 0 \quad \text{και} \quad F(1) = 2\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Αφού η F είναι συνεχής στο $[0,1]$, υπάρχει $\theta(n)$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)\,dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)\,dx.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχουν $0 \leqslant \xi_1(n) \leqslant \theta(n)$ και $1-\theta(n) \leqslant \xi_2(n) \leqslant 1$ ώστε

$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)\,dx = \theta(n)\big(f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))\big).$$

Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι

$$n\theta(n) = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))} \longrightarrow \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{f(0)+f(1)}.$$

99.

100. Έστω I το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος. Τότε, επειδή $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, έχουμε

$$I = \int_0^1 f(x)\int_0^x f'(t)\,dtdx = \int_0^1\int_0^x f(x)f'(t)\,dtdx,$$
$$-I = \int_0^1 f(x)\int_x^1 f'(t)\,dtdx = \int_0^1\int_x^1 f(x)f'(t)\,dtdx.$$

Άρα

$$2I \leq \int_0^1\int_0^1 |f(x)f'(t)|\,dtdx = \int_0^1 |f'(t)|\,dt \int_0^1 |f(x)|dx.$$

101. Αρχικά, έχουμε ότι
$$\int_0^\infty [x]^n e^{-x}dx \leqslant \int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!.$$
Από την άλλη πλευρά
$$\int_0^\infty [x]^n e^{-x}dx > \int_n^{n+1} [x]^n e^{-x}dx = n^n \int_n^{n+1} e^{-x}dx = \frac{n^n}{e^n}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$
Έπεται ότι
$$\frac{1}{e}\sqrt[n]{1-1/e} \leqslant \frac{1}{n}\left(\int_0^\infty [x]^n e^{-x}dx\right)^{1/n} \leqslant \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$
και το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$
που είναι, για παράδειγμα, συνέπεια του τύπου του Stirling.

102. Γράφουμε
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \{x\}^n e^{-x}dx &= \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} \{x\}^n e^{-x}dx = \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} (x-k)^n e^{-x}dx \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 y^n e^{-(k+y)}dy = \sum_{k=0}^\infty e^{-k}\int_0^1 y^n e^{-y}dy = \frac{e}{e-1}\int_0^1 y^n e^{-y}dy.\end{aligned}$$
Παρατηρούμε τώρα ότι $e^{-1} \leqslant e^{-y} \leqslant 1$ στο $[0,1]$, άρα
$$\frac{1}{e(n+1)} \leqslant \int_0^1 y^n e^{-y}dy \leqslant \frac{1}{n+1}$$
για κάθε $n \geqslant 1$. Άρα,
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 y^n e^{-y}dy\right)^{1/n} = 1$$
και έπεται ότι
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty \{x\}^n e^{-x}dx\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}}{\sqrt[n]{e-1}}\cdot \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 y^n e^{-y}dy\right)^{1/n} = 1.$$

103. Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε το διάστημα $I_k = \left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ και δίνουμε εκτίμηση για το ολοκλήρωμα $\int_{I_k} \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,dx$. Η συνάρτηση $|\sin x|$ είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi\right]$ και $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, άρα $|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x-k\pi|$ για κάθε $x \in I_k$. Επίσης, $1-\frac{1}{x} < 1-\frac{1}{(k+1)\pi}$ και $f(x) \leqslant f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)$ για κάθε $x \in I_k$. Συνεπώς,
$$|\sin x|^{1-\frac{1}{x}} \geqslant |\sin x|^{1-\frac{1}{(k+1)\pi}} \geqslant \left(\frac{2}{\pi}|x-k\pi|\right)^{1-\frac{1}{(k+1)\pi}} \geqslant \frac{2}{\pi}|x-k\pi|^{1-\frac{1}{(k+1)\pi}}$$
και
$$\frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}} \leqslant \frac{\pi}{2} f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{|x-k\pi|^{1-\frac{1}{(k+1)\pi}}}$$
για κάθε $x \in I_k$. Άρα,
$$\begin{aligned}\int_{I_k} \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,dx &\leqslant \frac{\pi}{2} f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\int_{I_k}\frac{1}{|x-k\pi|^{1-\frac{1}{(k+1)\pi}}}\,dx = \frac{\pi}{2} f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |x|^{\frac{1}{(k+1)\pi}-1}\,dx \\ &= \pi f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)(k+1)\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{(k+1)\pi}} \leqslant \frac{\pi^3}{2} f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)(k+1).\end{aligned}$$
Έπεται ότι
$$\int_1^\infty \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,dx \leqslant \int_1^{\pi/2} \frac{f(x)}{|\sin x|^{1-\frac{1}{x}}}\,dx + \frac{\pi^3}{2}\sum_{k=1}^\infty f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)(k+1).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε $k \geqslant 4$ ισχύει ότι

$$f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)(k+1)\pi \leqslant 2f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \int_{I_{k-1}} xf(x)\,dx,$$

απ' όπου βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)(k+1)$ συγκλίνει, διότι το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} xf(x)\,dx$ συγκλίνει.

104. (α) Αφού $0 \leqslant g \leqslant 1$ έχουμε ότι $0 \leqslant s \leqslant b-a$, άρα $a+s, b-s \in [a,b]$. Για την αριστερή ανισότητα γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \int_{b-s}^b f(x)\,dx &= \int_a^{b-s} f(x)g(x)\,dx + \int_{b-s}^b f(x)(g(x)-1)\,dx \\
&\geqslant \int_a^{b-s} f(x)g(x)\,dx + f(b-s)\left(\int_{b-s}^b g(x)\,dx - s\right) \\
&= \int_a^{b-s} f(x)g(x)\,dx + f(b-s)\left(\int_{b-s}^b g(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx\right) \\
&= \int_a^{b-s} f(x)g(x)\,dx - f(b-s)\int_a^{b-s} g(x)\,dx \\
&= \int_a^{b-s} g(x)(f(x) - f(x-s))\,dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

(β) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_0^1 g(x)\,dx > 0$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen

$$\varphi\left(\frac{1}{\int_0^1 g(x)\,dx}\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right) \leqslant \frac{1}{\int_0^1 g(x)\,dx}\int_0^1 \varphi(f(x))g(x)\,dx$$

για την κυρτή συνάρτηση $\varphi(x) = x^p$, παίρνουμε

$$\left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)6p \leqslant \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1}\int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx.$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1}\int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx \leqslant \int_0^s (f(x))^p dx.$$

Θέτουμε

$$t = \left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^{p-1}$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^s (f(x))^p dx - t\int_0^1 (f(x))^p g(x)\,dx &= \int_0^s (f(x))^p(1 - tg(x))\,dx - t\int_s^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&\geqslant (f(s))^p \int_0^s (1 - tg(x))\,dx - t\int_s^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&= (f(s))^p\left(s - t\int_0^s g(x)\,dx\right) - t\int_s^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&= (f(s))^p\left(\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right)^p - t\int_0^s g(x)\,dx\right) - t\int_s^1 (f(x))^p g(x)\,dx \\
&= t\left((f(s))^p\int_s^1 g(x)\,dx - \int_s^1 (f(x))^p g(x)\,dx\right) \\
&= t\int_s^1 g(x)((f(s))^p - (f(x))^p)\,dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

105. Θέτουμε $g(x)=\int_0^x |f'(t)|^q dt$. Τότε, $g'(x)=|f'(x)|^q$ και αφού $f(0)=0$ έχουμε επίσης

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_0^x |f'(t)|\,dt\right)^p.$$

Έστω ότι $q>1$ και έστω q' ο συζυγής εκθέτης του q. Από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι

$$|f(x)|^p \leqslant \left(\int_0^x |f'(t)|^q dt\right)^{p/q} a^{p/q'}$$

για κάθε $0\leqslant x\leqslant a$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_0^a |f(x)|^p\,|f'(x)|^q dx &\leqslant a^{p/q'}\int_0^x |f'(x)|^q\left(\int_0^x |f'(t)|^q dt\right)^{p/q} dx\\ &= a^{p/q'}\int_0^a g'(x))g(x))^{p/q}dx = a^{p/q'}\frac{q}{p+q}g(a)^{\frac{p}{q}+1}\\ &= \frac{q}{p+q}a^{p/q'}\left(\int_0^a |f'(x)|^q dx\right)^{\frac{p}{q}+1}\\ &\leqslant \frac{q}{p+q}a^p\int_0^a |f'(x)|^{p+q}dx,\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε πάλι την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f'(x)|^q$ και $\mathbf{1}$. Για την περίπτωση $q=1$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο.

106. Για κάθε $f\in\mathcal{A}$ και κάθε $t\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι

$$(2+3t)^2=\left(\int_0^1 f(x)(x+t)\,dx\right)^2\leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 (x+t)^2dx,$$

άρα

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geqslant \frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1}.$$

Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $t\in\mathbb{R}$, έπεται ότι

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx\geqslant \max\left\{\frac{3(2+3t)^2}{3t^2+3t+1} : t\in\mathbb{R}\right\}=12.$$

Για τη συνάρτηση $f_0(x)=6x$ έχουμε ισότητα (και $f_0\in\mathcal{A}$).

107. Από την υπόθεση έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί την

$$(*)\qquad f'(x)=n\left(f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\geqslant 2$. Έπεται τώρα ότι η f' είναι παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x,x+1/n]$ βλέπουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $n\geqslant 2$ υπάρχει $\xi_n=\xi_n(x)$ τέτοιο ώστε $x<\xi_n<x+1/n$ και $f'(x)=f'(\xi_n)$. φαρμόζοντας το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[x,\xi_n]$ βρίσκουμε $\zeta_n=\zeta_n(x)$ τέτοιο ώστε $x<\zeta_n<\xi_n<x+1/n$ και $f''(\zeta_n)=0$. Όμως, $\zeta_n\to x$ όταν $n\to\infty$ και η f'' είναι συνεχής στο x, άρα $f''(x)=0$. Εφόσον $f''\equiv 0$, συμπεραίνουμε ότι η f είναι της μορφής $f(x)=ax+b$ για κάποιους $a,b\in\mathbb{R}$. Από την

$$n^2\int_x^{x+\frac{1}{n}}(at+b)\,dt=n(ax+b)+1$$

παίρνουμε $a=2$, άρα η f είναι της μορφής $f(x)=2x+b$, $b\in\mathbb{R}$.

108. (α) Για κάθε $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\sum_{k,j=1}^n\frac{x_kx_j}{\alpha_k^2+\alpha_j^2}=\sum_{k,j=1}^n x_kx_j\int_0^1 t^{\alpha_k^2+\alpha_j^2-1}dt=\int_0^1\left(\sum_{k,j=1}^n t^{\alpha_k^2-1/2}x_kt^{\alpha_j^2-1/2}x_j\right)dt.$$

Όμως,

$$\sum_{k,j=1}^{n} t^{\alpha_k^2-1/2}x_k t^{\alpha_j^2-1/2}x_j = \left(\sum_{k=1}^{n} t^{\alpha_k^2-1/2}x_k\right)^2 \geqslant 0$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Επιστρέφοντας στο ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι

$$\sum_{k,j=1}^{n} \frac{x_k x_j}{\alpha_k^2+\alpha_j^2} \geqslant 0.$$

Το ζητούμενο είναι ειδική περίπτωση: παίρνουμε $x_k = \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$.

(β) Συμβολίζουμε με χ_A τη δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε ότι $\chi_{D_i \cap D_j} = \chi_{D_i}\chi_{D_j}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$, οπότε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\chi_{D_i\cap D_j}(y)\,dy\right)x_ix_j = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_{D_i\cap D_j}(y)\,x_ix_j\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\chi_{D_i}(y)\chi_{D_j}(y)\,x_ix_j\right)dy = \int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\chi_{D_i}(y)\,x_i\right)^2 dy \geqslant 0\end{aligned}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

110. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $1 \leqslant a < b$ έχουμε

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b \mathbf{1}\,dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx\right).$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_1^b f(x)\,dx \leqslant cb^2.$$

Συνεπώς,

$$(b-a)^2 \leqslant cb^2 \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $a = 2^k$, $b = 2^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, παίρνουμε

$$\int_1^\infty \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2^{k+1}-2^k)^2}{2^{2(k+1)}} = \frac{n}{4c}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται το ζητούμενο.

111. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(nx)\,dx &= \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 f(x+k)\,dx = \frac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

Αφού $a_n \to 0$ γνωρίζουμε ότι οι μέσοι όροι $\dfrac{a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}}{n} \to 0$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,dx = 0.$$

112. Παρατηρούμε ότι $f(x)+f(1-x) \geqslant 2\sqrt{f(x)f(1-x)} = 2$. Ολοκληρώνοντας στο $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ παίρνουμε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_0^{1/2} f(1-x)\,dx = \int_0^{1/2}(f(x)+f(1-x))\,dx \geqslant \int_0^{1/2} 2\,dx = 1.$$

Άλλος τρόπος: Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx.$$

Τώρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \geqslant \left(\int_0^1 \mathbf{1}\,dx\right)^2 \geqslant 1.$$

Το αποτέλεσμα έπεται αφού $f > 0$ και συνεπώς $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$.

113. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 1$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ για κάθε $x, y \in [0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} f(n) > 0$. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon \in (0,1)$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\sqrt{n} f(n) \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$.

Παρατηρούμε ότι αν $n \geqslant n_0$ και $x \in \left[n, n + \frac{\varepsilon}{2M\sqrt{n}}\right]$ τότε

$$f(x) \geqslant f(n) - |f(x) - f(n)| \geqslant f(n) - M|x-n| \geqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} - M\frac{\varepsilon}{2M\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0}^\infty \int_n^{n+\frac{\varepsilon}{2M\sqrt{n}}} f(x)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0}^\infty \frac{\varepsilon}{2M\sqrt{n}}\,\frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon^2}{4M}\sum_{n=n_0}^\infty \frac{1}{n} = +\infty$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Αναγκαστικά, $\liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} f(n) = 0$.

114. Ορίζουμε $F(x) = \int_a^x \sqrt{f(t)}\,dt$ και $G(x) = \int_a^x \sqrt{g(t)}\,dt$. Οι F και G είναι κυρτές συναρτήσεις, και από την υπόθεση έχουμε ότι $F(a) = G(a) = 0$, $F(b) = G(b)$ και $F(x) \leqslant G(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2}\,dt \geqslant \int_a^b \sqrt{1 + (G'(t))^2}\,dt.$$

Θεωρούμε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ του $[a,b]$ και τα κυρτά πολύγωνα $A_{P,F}$ και $A_{P,G}$ με κορυφές

$$y_0 = (a, F(a)), y_1 = (t_1, F(t_1)), \ldots, y_{n-1} = (t_{n-1}, F(t_{n-1})), y_n = (b, F(b))$$

και

$$z_0 = (a, G(a)), z_1 = (t_1, G(t_1)), \ldots, z_{n-1} = (t_{n-1}, G(t_{n-1})), z_n = (b, G(b))$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $y_0 = z_0$, $y_n = z_n$ και $A_{P,G} \subseteq A_{P,F}$, άρα η περίμετρος του $A_{P,G}$ είναι μικρότερη από την περίμετρο του $A_{P,F}$ που μας δίνει

$$\sum_{i=0}^{n-1}((t_{i+1} - t_i)^2 + (G(t_{i+1}) - G(t_i))^2)^{1/2} \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}((t_{i+1} - t_i)^2 + (G(t_{i+1}) - G(t_i))^2)^{1/2}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2}\,dt &= \sup_P \sum_{i=0}^{n-1}((t_{i+1} - t_i)^2 + (G(t_{i+1}) - G(t_i))^2)^{1/2}\\ &\geqslant \sup_P \sum_{i=0}^{n-1}((t_{i+1} - t_i)^2 + (G(t_{i+1}) - G(t_i))^2)^{1/2} = \int_a^b \sqrt{1 + (F'(t))^2}\,dt.\end{aligned}$$

115. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x |f'(t)|dt$. Έχουμε $g(0) = 0$ και $g'(t) = |f'(t)|$ για κάθε $t \in [0,a]$. Επίσης,

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \Big|\int_0^x f'(t)dt\Big| \leqslant \int_0^x |f'(t)|dt = g(x)$$

για κάθε $x \in [0,a]$, άρα

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|dt \leqslant \int_0^a g(t)g'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^a [g^2(t)]'dt = \frac{1}{2}g^2(a).$$

Τέλος,
$$\frac{1}{2}g^2(a)=\frac{1}{2}\left(\int_0^a g'(t)dt\right)^2\leqslant\frac{a}{2}\int_0^x (g'(t))^2dt=\frac{a}{2}\int_0^a |f'(t)|^2dt$$
από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την $g'(t)=|f'(t)|$.

116. Ορίζουμε $G(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$. Αφού η g είναι συνεχής και παίρνει γνησίως θετικές τιμές, η G είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα, με $G(0)=0$ και $G(1)=1$. Συνεπώς, ορίζεται η $G^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ και είναι συνεχής.

Θεωρούμε τον μοναδικό $a\in(0,1)$ για τον οποίο $G(a)=1/2$ και ορίζουμε $L:[0,a]\to\mathbb{R}$ με $L(x)=G^{-1}\left(G(x)+\frac{1}{2}\right)$. Η L είναι συνεχής και
$$\int_x^{L(x)} g(t)\,dt=\frac{1}{2}$$
για κάθε $x\in[0,a]$. Ορίζουμε $H(x)=\displaystyle\int_x^{L(x)} f(t)\,dt$ για $x\in[0,a]$. Από τη συνέχεια της H, το γεγονός ότι
$$H(0)+H(a)=\int_0^a f(t)\,dt+\int_a^1 f(t)\,dt=\int_0^1 f(t)\,dt=1$$
και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, έπεται ότι υπάρχει $x_0\in[0,a]$ τέτοιο ώστε $H(x_0)=1/2$. ν θέσουμε $c=x_0$ και $d=L(x_0)$, βλέπουμε ότι
$$\int_c^d g(t)\,dt=\int_c^d f(t)\,dt=\frac{1}{2}.$$

117. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p(0)\neq 0$. Έστω $z_1,\dots,z_n$ οι ρίζες του p στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (αν μια ρίζα έχει πολλαπλότητα $s>1$ τότε την παίρνουμε s φορές). Επιλέγουμε $\varepsilon=\frac{1}{4n}$ και θεωρούμε τους δίσκους $D(z_i,\varepsilon)$. Καθένας από αυτούς τους δίσκους, αν τέμνει το $[-1,1]$ το τέμνει σε διάστημα μήκους το πολύ ίσου με $\frac{1}{2n}$. Υπάρχει λοιπόν τουλάχιστον ένα διάστημα $I\subseteq[-1/2,1/2]$ το οποίο έχει μήκος τουλάχιστον ίσο με $\frac{1}{n+1}$ και είναι ξένο προς όλους τους δίσκους $D(z_i,\varepsilon)$. Ειδικότερα, αν $x\in I$ τότε $|x-z_i|\geqslant\varepsilon$ για κάθε $i=1,\dots,n$. Αφού $p(0)=\prod_{i=1}^n z_i$, μπορούμε να γράψουμε
$$\int_{-1}^1\frac{|p(x)|}{|p(0)|}\,dx\geqslant\int_I\frac{|p(x)|}{|p(0)|}\,dx=\int_I\prod_{i=1}^n\frac{|x-z_i|}{|z_i|}\,dx.$$
Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x\in I$, αν $|z_i|\leqslant 1$ τότε $\frac{|x-z_i|}{|z_i|}\geqslant\varepsilon$, ενώ αν $|z_i|>1$ τότε
$$\frac{|x-z_i|}{|z_i|}=\left|1-\frac{x}{z_i}\right|\geqslant 1-\left|\frac{x}{z_i}\right|\geqslant\frac{1}{2}>\varepsilon.$$
Έπεται ότι
$$\int_{-1}^1\frac{|p(x)|}{|p(0)|}\,dx\geqslant\int_I\frac{|p(x)|}{|p(0)|}\,dx\geqslant\frac{\varepsilon^n}{n+1}=\frac{1}{(4n)^n(n+1)}.$$

118. Έστω ότι $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Από την υπόθεση έχουμε ότι
$$\int_0^1(p(x))^2dx=\sum_{k=0}^n a_k\int_0^1 x^kp(x)\,dx=a_0\int_0^1 p(x)\,dx.$$
Πάλι από την υπόθεση, για κάθε $k=1,\dots,n$ έχουμε ότι
$$\frac{a_n}{n+k+1}+\cdots+\frac{a_1}{k+2}+\frac{a_0}{k+1}=\int_0^1 x^kp(x)\,dx=0.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\frac{a_n}{x+n+1}+\cdots+\frac{a_1}{x+2}+\frac{a_0}{x+1}=\frac{q(x)}{(x+1)\cdots(x+n+1)}$$
όπου $q(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n. Πολλαπλασιάζοντας αυτήν την ισότητα με $x+1$ παίρνουμε
$$\frac{a_n(x+1)}{x+n+1}+\cdots+\frac{a_1(x+1)}{x+2}+a_0=\frac{q(x)}{(x+2)\cdots(n+x+1)}$$

και για $x = -1$ βλέπουμε ότι
$$a_0 = \frac{q(-1)}{n!}.$$
Αφού $q(k) = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, υπάρχει σταθερά $b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $q(x) = b(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$. Για $x = -1$ παίρνουμε
$$a_0 = \frac{q(-1)}{n!} = \frac{b(-1)^n(n+1)!}{n!} = b(-1)^n(n+1).$$
Επίσης, για $x = 0$ παίρνουμε $q(0) = b(-1)^n n!$. Συνεπώς,
$$\int_0^1 p(x)\,dx = \frac{a_n}{n+1} + \cdots + \frac{a_1}{2} + a_0 = \frac{q(0)}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{b}{n+1} = \frac{a_0}{(n+1)^2}.$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι
$$\int_0^1 (p(x))^2 dx = a_0 \int_0^1 p(x)\,dx = (n+1)^2 \left(\int_0^1 p(x)\,dx \right)^2.$$

119. Από την υπόθεση ότι οι f και g είναι αύξουσες, ελέγχουμε εύκολα ότι $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geqslant 0$ για κάθε $x, y \in [0,1]$. Συνεπώς,
$$I := \int_0^1 \int_0^1 (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,dy\,dx \geqslant 0.$$
Όμως,
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(x)\,dy\,dx - \int_0^1 \int_0^1 f(x)g(y)\,dy\,dx - \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(x)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^1 f(y)g(y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)g(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(y)\,dy\right) - \left(\int_0^1 f(y)\,dy\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) + \int_0^1 f(y)g(y)\,dy \\ &= 2\int_0^1 f(x)g(x)\,dx - 2\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right) \end{aligned}$$
και έπεται το ζητούμενο.

120. Υποθέτουμε για απλότητα ότι η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα και συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι η $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής. Αν $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$, τότε
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b f(x)G'(x)\,dx = f(b)G(b) - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx.$$
Έχουμε $h(x) := -f'(x) \geqslant 0$ στο $[a,b]$, άρα υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε
$$-\int_a^b f'(x)G(x)\,dx = \int_a^b h(x)G(x)\,dx = G(\xi)\int_a^b h(x)\,dx = G(\xi)(f(a)-f(b)).$$
Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)G(b) + G(\xi)(f(a)-f(b)) = f(a)\big((1-t)G(\xi) + tG(b)\big)$$
όπου $t = f(b)/f(a) \in [0,1]$ (αν $f(a) = 0$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, αφού τότε $f \equiv 0$). Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την G βλέπουμε ότι υπάρχει $u \in [a,b]$ ώστε
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)G(u) = f(a)\int_a^u g(x)\,dx.$$
Έπεται το ζητούμενο.

121. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την ανισότητα Chebyshev (βλέπε Άσκηση 109) έχουμε ότι αν η $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ είναι αύξουσα συνεχής, όχι ταυτοτικά μηδενική, και ικανοποιεί την

$$\int_0^1 x(f(x))^2dx = c\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2$$

τότε

$$\begin{aligned} c\int_0^1 (f(x))^2dx &\geqslant c\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = \int_0^1 x(f(x))^2dx \\ &\geqslant \left(\int_0^1 x\,dx\right)\left(\int_0^1 (f(x))^2dx\right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (f(x))^2dx\right), \end{aligned}$$

άρα $c\geqslant \frac{1}{2}$, αφού $\int_0^1 (f(x))^2dx>0$.

Κάθε $c\geqslant\frac{1}{2}$ ικανοποιεί το ζητούμενο, αφού αν θεωρήσουμε την $f(x)=x^{2c-1}$ τότε

$$\int_0^1 x(f(x))^2dx = \int_0^1 x^{4c-1}dx = \frac{1}{4c} \quad \text{και} \quad c\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 = c\left(\int_0^1 x^{2c-1}\,dx\right)^2 = c\left(\frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c}.$$

122. Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής: αν $g:[0,1]\to[0,+\infty)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_0^1 g(x)\,dx=1$ τότε

$$\int_0^1 f^2(x)g(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Πράγματι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για κάθε $\gamma\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_0^1 f^2(x)g(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x)-\gamma)^2 g(x)\,dx$$

και επιλέγοντας $\gamma=\frac{a+b}{2}$ έχουμε $|f(x)-\gamma|\leqslant\frac{b-a}{2}$ για κάθε $x\in[0,1]$, οπότε

$$\int_0^1 (f(x)-\gamma)^2 g(x)\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$G(\lambda)=\log\left(\int_0^1 e^{\lambda f(x)}dx\right), \qquad \lambda>0.$$

Με παραγώγιση ως προς λ βλέπουμε ότι

$$G''(\lambda) = \frac{\int_0^1 f^2(x)e^{\lambda f(x)}dx}{\int_0^1 e^{\lambda f(x)}dx} - \left(\frac{\int_0^1 f(x)e^{\lambda f(x)}dx}{\int_0^1 e^{\lambda f(x)}dx}\right)^2 = \int_0^1 f^2(x)g_\lambda(x)\,dx - \left(\int_0^1 f(x)g_\lambda(x)\,dx\right),$$

όπου $g_\lambda(x)=e^{\lambda f(x)}/\int_0^1 e^{\lambda f(x)}dx$. Από τον αρχικό ισχυρισμό συμπεραίνουμε ότι $G''(\lambda)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}$ για κάθε $\lambda>0$. Παρατηρούμε ότι $G'(0)=\int_0^1 f(x)\,dx$, άρα $G'(0)=0$ από την υπόθεση. Συνεπώς, $G'(\lambda)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}\lambda$ για κάθε $\lambda>0$. Παρατηρούμε επίσης ότι $G(0)=0$, άρα, τελικά, $G(\lambda)\leqslant\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}$ για κάθε $\lambda>0$, το οποίο είναι ακριβώς το ζητούμενο.

123. Θεωρούμε την $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Τότε, $F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\geqslant 0$ και η υπόθεση μας δίνει ότι υπάρχει $\ell\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x\to\infty}(F'(x)+F(x))=\ell.$$

Τώρα, αποδεικνύουμε το εξής: αν η $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x)+g'(x))=0$ τότε $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. Πράγματι, θεωρούμε τυχόν $\epsilon>0$ και βρίσκουμε $M>0$ τέτοιο ώστε $|g(x)+g'(x)|\leqslant\epsilon$ για κάθε $x\geqslant M$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy για τις $e^xg(x)$ και e^x, για κάθε $x>M$ βρίσκουμε $\xi_x\in(M,x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{e^xg(x)-e^Mg(M)}{e^x-e^M} = g(\xi_x)+g'(\xi_x).$$

Συνεπώς, για κάθε $x > M$ έχουμε ότι

$$\left|\frac{g(x) - e^{M-x}g(M)}{1 - e^{M-x}}\right| \leqslant \epsilon$$

απ' όπου παίρνουμε

$$|g(x)| \leqslant \epsilon(1 - e^{M-x}) + |g(M)|e^{M-x} \leqslant \epsilon + (|g(M)|e^{M})e^{-x} \leqslant 2\epsilon$$

αν το x είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι, αν θεωρήσουμε την $g(x) = F(x) - \ell$ τότε $g'(x) = F'(x)$, άρα ικανοποιείται η $\lim\limits_{x\to\infty}(g(x) + g'(x)) = 0$. Έπεται ότι $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x) - \ell) = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \ell$. Επιστρέφοντας στην $\lim\limits_{x\to\infty}(F'(x) + F(x)) = \ell$ παίρνουμε τελικά ότι

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} F'(x) = 0.$$

125. Υπάρχει πολυώνυμο $p(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^1 x^k p(x)\,dx = 1 \quad \text{για κάθε } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Έπεται ότι, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\int_0^1 x^k (f(x) - p(x))\,dx = 0,$$

άρα

$$\int_0^1 p(x)(f(x) - p(x))\,dx = 0.$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx &= \int_0^1 f(x)(f(x) - p(x))\,dx \\ &= \int_0^1 f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\int_0^1 x^k f(x)\,dx,\end{aligned}$$

και αφού το πρώτο ολοκλήρωμα είναι μη αρνητικό συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Οι συντελεστές $a_1, \ldots, a_n$ του p ικανοποιούν την

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Από τον ορισμό του p έχουμε ότι

$$\frac{a_1}{k+1} + \frac{a_2}{k+2} + \cdots + \frac{a_n}{k+n} = 1, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Ισοδύναμα, η συνάρτηση

$$r(x) = \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \cdots + \frac{a_n}{x+n} - 1$$

έχει ρίζες τους $0, 1, \ldots, n-1$. Γράφουμε την r στη μορφή

$$r(x) = \frac{q(x) - (x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)},$$

όπου q είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο q ισούται με $a_1+a_2+\cdots+a_n$. Επίσης, ο αριθμητής έχει ρίζες τους $0, 1, \ldots, n-1$, και αφού $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = -1$ πρέπει να έχουμε

$$q(x) = (x+1)(x+2)\cdots(x+n) - x(x-1)\cdots(x-(n-1)).$$

Αυτή η έκφραση για το q δείχνει ότι ο συντελεστής του x^{n-1} στο q είναι ίσος με $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2}$. Έπεται ότι

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n^2.$$

126. (α) Το ολοκλήρωμα ισούται με[1]

$$B(n+k+1, n+1) = \frac{\Gamma(n+k+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+k+2)} = \frac{(n+k)!n!}{(2n+k+1)!}.$$

Αναζητούμε το όριο της ποσότητας

$$\frac{(2n+1)!}{n!}\frac{(n+k)!}{(2n+k+1)!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{(2n+1+1)(2n+1+2)\cdots(2n+1+k)} \overset{n\to\infty}{\to} \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(β) Ονομάζουμε $L_n(f)$ την ποσότητα της οποίας το όριο αναζητούμε. Το μέρος (α) της άσκησης δίνει ότι, όταν η f είναι πολυώνυμο, έχουμε $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = f(1/2)$. Θα δείξουμε το ίδιο για κάθε συνεχή συνάρτηση. Έστω f όπως στην εκφώνηση και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει πολυώνυμο P ώστε $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| \le \varepsilon$ (Θεώρημα Weirstrass). Έτσι,

$$|L_n(f) - f(1/2)| \le |L_n(f) - L_n(P)| + |L_n(P) - P(1/2)| + |P(1/2) - f(1/2)| \le L_n(\varepsilon) + |L_n(P) - P(1/2)| + \varepsilon.$$

Το όριο του δεξιού μέλους της δεύτερης ανισότητας είναι 2ε, άρα για όλα τα μεγάλα n θα ισχύει $|L_n(f) - f(1/2)| < 3\varepsilon$. Άρα $\lim_{n\to\infty} |L_n(f) - f(1/2)| = 0$.

127. Το ζητούμενο προκύπτει εφαρμόζοντας την ανισότητα Chebyshev (Άσκηση 119) για τις $f(x)$ και $g(x) = x^n$. Αν για κάποια αύξουσα και συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = (n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx$, τότε ισχύει ότι

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 x^n dx\right)$$

και από την υπόδειξη στην Άσκηση 119 βλέπουμε ότι

$$\int_0^1\int_0^1 (f(x) - f(y))(x^n - y^n)\,dy\,dx = 0.$$

Η συνάρτηση $h(x,y) = (f(x) - f(y))(x^n - y^n)$ είναι συνεχής και μη αρνητική, άρα $h(x,y) = 0$ για κάθε $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή.

128. Θα εκτιμήσουμε κατ' αρχήν τη διαφορά $I - L_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$I - L_n = \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)dx.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor για πολυώνυμο δεύτερης τάξης έχουμε ότι για κάθε $x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, για $k = 0, \ldots, n-1$, υπάρχουν $\theta_k^x \in \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ τέτοια ώστε

$$I - L_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f'\left(\frac{k}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right) + \frac{f''(\theta_k^x)}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2\right)dx = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + r_n\,,$$

όπου

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \frac{f''(\theta_k^x)}{2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 dx.$$

Αφού η f'' είναι συνεχής έχουμε ότι

$$|r_n| \leqslant \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3n^3} = \frac{c_1}{n^2}$$

[1] Υπενθυμίζεται ότι, για $a, b > 0$, έχουμε $B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. Η πρώτη ισότητα είναι ο ορισμός της συνάρτησης Βήτα.

και συνεπώς $r_n = O(\frac{1}{n^2})$. Οπότε,

$$I - L_n = \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) + O(\frac{1}{n^2})\,. \tag{6}$$

Από την άλλη μεριά, εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα Taylor (αυτή τη φορά για πολυώνυμο πρώτης τάξης για την f' σε κάθε υποδιάστημα $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$) και αφού η f'' είναι συνεχής έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 f'(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f'(x) - f'(\frac{k}{n})\right)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f''(\overline{\theta}_k^x)\left(x - \frac{k}{n}\right)dx \\ &\leqslant \max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n^2} = \frac{c_2}{n}\end{aligned}$$

και άρα

$$\int_0^1 f'(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό στην (6) έχουμε

$$\begin{aligned}I - L_n &= \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f'(x)\,dx\right) + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{f(1)-f(0)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Έπεται ότι, για αρκετά μεγάλα n, ισχύουν οι

$$I - \left(L_n + \frac{1}{3}(U_n - L_n)\right) = \frac{f(1)-f(0)}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$$

και

$$L_n + \frac{2}{3}(U_n - L_n) - I = \frac{f(1)-f(0)}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0.$$

Άρα,

$$L_n + \frac{1}{3}(U_n - L_n) < I < L_n + \frac{2}{3}(U_n - L_n)$$

για αρκετά μεγάλα n.

129. Λύνουμε μόνο το (β). Έστω I_n η ποσότητα μέσα στο όριο. Η αντικατάσταση $y = nx$ δίνει

$$I_n = \int_0^n \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k\,dy = \int_0^\infty \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]}\,dy.$$

Για σταθερό $y > 0$, ο ολοκληρωτέος συγκλίνει στο $e^{-2y}y^k$ αφού

$$\left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} = \left(1 - \frac{2y}{n+y}\right)^n \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \to e^{-2y}$$

Επίσης, φράσσουμε τον ολοκληρωτέο ως εξής

$$0 \le \left(\frac{n-y}{n+y}\right)^n y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-\frac{2yn}{n+y}} y^k \mathbf{1}_{y\in[0,n]} \le e^{-2y}y^k =: g(y).$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την $1 + x \le e^x$, ενώ στη δεύτερη το ότι $y \in [0,n]$ για τα y που το αριστερό μέλος είναι θετικό. Η g έχει $\int_0^\infty g(x)\,dx < \infty$, οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης εφαρμόζεται και δίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^\infty y^k e^{-2y}\,dy = 2^{-k-1}\Gamma(k+1) = k!2^{-k-1}.$$

130. Κάνοντας την αντικατάσταση $t = y^3$ γράφουμε

$$\frac{2}{3}\int_1^8 f(t)\,dt = 2\int_1^2 y^2 f(y^3)\,dy = 2\int_1^2 t^2 f(t^3)\,dt.$$

Τότε, η υπόθεση γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\int_1^2 \left(f^2(t^3) + (t^2-1)^2 + 2f(t^3) - 2t^2 f(t^3)\right) dt = 0.$$

Όμως,

$$f^2(t^3) + (t^2-1)^2 + 2f(t^3) - 2t^2 f(t^3) = (f(t^3))^2 + (1-t^2)^2 + 2(1-t^2)f(t^3) = (f(t^3)+1-t^2)^2 \geqslant 0$$

για κάθε $t \in [1,2]$, άρα

$$\int_1^2 (f(t^3)+1-t^2)^2 dt = 0.$$

Λόγω συνέχειας, συμπεραίνουμε ότι $f(t^3) = t^2 - 1$ για κάθε $t \in [1,2]$, δηλαδή $f(x) = x^{2/3} - 1$ για κάθε $x \in [1,8]$.

131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(t) = \int_0^t |f'(s)|^2 ds.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$|f(t)| \leqslant \int_0^t |f'(s)|\, ds \leqslant \sqrt{t} \left(\int_0^t |f'(s)|^2 ds\right)^{1/2} = \sqrt{t}\sqrt{g(t)},$$

άρα

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t)|^2 |f(t)| \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt &\leqslant \int_0^1 \sqrt{g(t)} g'(t)\, dt = \frac{2}{3}\big(g(1)^{3/2} - g(0)^{3/2}\big) \\ &= \frac{2}{3}\left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{3/2} \leqslant \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Θεωρώντας την $f(t) = t$ βλέπουμε ότι το φράγμα $\frac{2}{3}$ είναι βέλτιστο.

132. (α) Ονομάζουμε I_n την ποσότητα της οποίας το όριο αναζητούμε. Έχουμε

$$I_n = \int_0^\infty \frac{\arctan(x/n)}{x/n} \frac{1}{x^2+1} \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\, dx \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\, dx = \arctan x|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, την ανισότητα $|\arctan(y)/y| \leq 1$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$, και την $\lim_{y\to 0} \arctan(y)/y = 1$.

(β) Αυτό το ερώτημα εξετάζει πόσο κοντά είναι το I_n στο όριό του, το $\pi/2$. Έχουμε

$$n(I_n - \pi/2) = n\int_0^n \left(\frac{\arctan(x/n)}{x/n} - 1\right) \frac{1}{x^2+1}\, dx + n\left(\int_0^n \frac{1}{1+x^2}\, dx - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ο δεύτερος προσθεταίος ισούται με $n(\arctan n - \pi/2)$ και έχει όριο -1 (π.χ., με χρήση de l' Hospital). Στον πρώτο προσθεταίο, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x/n$, και έχουμε ότι ισούται με

$$\int_0^1 \left(\frac{\arctan(y)}{y} - 1\right) \frac{1}{y^2} \frac{n^2y^2}{n^2y^2+1}\, dy \overset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 \left(\frac{\arctan(y)}{y} - 1\right) \frac{1}{y^2}\, dy.$$

Για το πέρασμα του ορίου μέσα στο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης λειτουργεί επίσης). Κυριαρχούσα συνάρτηση είναι η $\{1 - y^{-1}\arctan(y)\}y^{-2}$, η οποία είναι φραγμένη από το 1, άρα ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Για τον υπολογισμό του παραπάνω ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τη δυναμοσειρά της arctan, και βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} y^{2n-2}\, dy &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} - 2\arctan(1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα του Abel... Επομένως, $\lim_{n\to\infty} n(I_n - \pi/2) = -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Σχόλιο: Το ότι η $(\arctan(y)/y - 1)y^{-2}$ διατηρεί πρόσημο (είναι αρνητική για $y \in (0,1]$) και έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα, όπως υπολογίσαμε, συνεπάγεται ότι η κυριαρχούσα συνάρτηση που αναφέραμε πιο πάνω είναι ολοκληρώσιμη, δεν είναι απαραίτητο να δείξουμε ότι είναι φραγμένη στο $[0,1]$.

133. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (\cos y)^2}\, dy - \sqrt{x^2 + (\sin x)^2}.$$

Η παράγωγος της g στο $x \in (0,1)$ είναι ίση με

$$g'(x) = \sqrt{1 + (\cos x)^2} - \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{\sqrt{x^2 + (\sin x)^2}}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $(x + \sin x \cdot \cos x)^2 \leqslant (1 + (\cos x)^2)(x^2 + (\sin x)^2)$, άρα $g'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και η g είναι αύξουσα. Έχουμε επίσης $g(0) = 0$, άρα για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι $g(x) \geqslant 0$, το οποίο μας δίνει την

$$\sqrt{x^2 + (\sin x)^2} \leqslant \int_0^x \sqrt{1 + (\cos y)^2}\, dy \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + (\cos y)^2}\, dy$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

134. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = x - \frac{\pi}{2} + 1$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και την αλλαγή $t = \sin x$ στο δεύτερο. Στη συνέχεια κάνουμε χρήση της μονοτονίας της f και της στοιχειώδους ανισότητας

$$t + \frac{\pi}{2} - 1 \geqslant \arcsin t \geqslant t\,, \text{ για κάθε } t \in [0,1]\,.$$

Επειδή η ανισότητα αυτή είναι γνήσια, ισότητες ισχύουν μόνο αν η f είναι σταθερή.

Δείτε και την Άσκηση 104(α) για ένα πιο γενικό αποτέλεσμα.

135. Παρατηρούμε αρχικά ότι $I_n \to 0$. Πράγματι, $f_n(x) = \frac{arctan x}{(1+x^2)^n} \to 0$ για κάθε $x > 0$ και $|f_n(x)| \leqslant f(x) = \arctan x$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε τον ισχυρισμό.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για τις $f(x) = \frac{\arctan x}{(1+x^2)^n}$ και $g(x) = x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^{n+1}}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{x - 2nx^2 \arctan x}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}\, dx + 2n \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \arctan x\, dx \\
&= \frac{1}{2n(1+x^2)^n}\Big|_0^\infty + 2n \int_0^\infty \left(\frac{\arctan x}{(1+x^2)^n} - \frac{\arctan x}{(1+x^2)^{n+1}} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2n} + 2n(I_n - I_{n+1}),
\end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{I_n}{n} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^\infty (I_1 - I_{n+1}) = -\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{6} + 2I_1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $I_n \to 0$. Υπολογίζουμε το

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}(\arctan x)^2\Big|_0^\infty = \frac{\pi^2}{8}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{I_n}{n} = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi στο τέλος, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \arctan x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx &= -\int_0^\infty \arctan x \cdot \ln\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \int_0^\infty \arctan x \cdot \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\frac{1}{(1+x^2)^n}\right) dx \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}\int_0^\infty \arctan x \cdot \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{I_n}{n} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

136. Θεωρούμε την $p:[0,4]\to[0,4]$ με $p(x)=x(x-3)^2$. Η p είναι αύξουσα στο $J_1=[0,1]$, φθίνουσα στο $J_2=[1,3]$ και αύξουσα στο $J_3=[3,4]$ και παίρνει ελάχιστη τιμή 0 στα σημεία $0,3$ και μέγιστη τιμή 4 στα σημεία $1,4$. Αν ονομάσουμε p_k τον περιορισμό της p στο J_k, τότε η p_k είναι επί του $[0,4]$ και αν $q_k:[0,4]\to J_k$ είναι η p_k^{-1} τότε οι p_1,q_1 είναι γνησίως αύξουσες, οι p_2,q_2 είναι γνησίως φθίνουσες και οι p_3,q_3 είναι γνησίως αύξουσες. Με την αλλαγή μεταβλητής $p_k(x)=y$ παίρνουμε

$$\int_{J_k} f(p(x))\, dx = \int_0^4 f(y)|q_k'(y)|\, dy, \qquad k=1,2,3.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $y\in[0,4]$, οι $q_1(y),q_2(y),q_3(y)$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $p(x)=y$ δηλαδή της $x^3-6x^2+9x-y=0$. Άρα $q_1(y)+q_2(y)+q_3(y)=6$ και έπεται ότι $q_1'(y)+q_2'(y)+q_3'(y)=0$ για κάθε $y\in(0,4)$. Αφού $q_1',q_3'\geqslant 0$ και $q_2'\leqslant 0$, έχουμε ότι $|q_1'(y)|-|q_2'(y)|+|q_3'(y)|=0$ για κάθε $y\in(0,4)$. Άρα,

$$\int_0^4 f(p(x))\, dx - \int_1^3 f(p(x))\, dx = \int_0^1 f(p(x))\, dx + \int_3^4 f(p(x))\, dx = \int_1^3 f(p(x))\, dx$$

και έτσι βλέπουμε ότι

$$\int_0^4 f(x(x-3)^2)\, dx = \int_0^4 f(p(x))\, dx = 2\int_1^3 f(p(x))\, dx = 2\int_1^3 f(x(x-3)^2)\, dx.$$

137. (α) Αν θέσουμε $I_n=\int_0^1(1-t)^n e^t dt$ τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βλέπουμε ότι $\frac{I_n}{n!}=-\frac{1}{n!}+\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$, άρα

$$\frac{I_n}{n!} = I_0 - \frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!} = e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}$$

δηλαδή

$$I_n = n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots-\frac{1}{n!}\right)$$

για κάθε $n\geqslant 0$.

(β) Παρατηρούμε ότι $x_n=\sum_{m=k}^n \binom{m}{k}\frac{I_m}{m!}$, άρα η $(x_n)_{n\geqslant k}$ είναι γνησίως αύξουσα. Για το όριο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} x_n &= \sum_{m=k}^\infty \frac{I_m}{k!(m-k)!} = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^\infty \frac{I_{k+m}}{m!} \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\int_0^1 (1-t)^{k+m}e^t dt = \frac{1}{k!}\int_0^1\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{(1-t)^{k+m}}{m!}\right)e^t dt \\ &= \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{(1-t)^m}{m!}\right)e^t dt = \frac{1}{k!}\int_0^1 (1-t)^k e^{1-t}e^t dt = \frac{e}{(k+1)!}.\end{aligned}$$

138. Για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε $2f(x)\leqslant f^2(x)+1$, άρα $2\int_0^1 f(x)\, dx \leqslant \int_0^1 (f^2(x)+1)\, dx$ και για κάθε $x\in[0,1]$ έχουμε $xf^2(x)\leqslant f^2(x)$, άρα $\int_0^1 xf^2(x)\, dx\leqslant \int_0^1 f^2(x)\, dx$. Όλα τα ολοκληρώματα είναι γνησίως θετικά, διότι $f>0$. Πολλαπλασιάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε

$$\left(2\int_0^1 xf^2(x)\, dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leqslant \left(\int_0^1 (f^2(x)+1)\, dx\right)\left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right)$$

και έπεται ότι

$$\frac{2\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 (f^2(x)+1)\,dx} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}.$$

139. Παρατηρούμε ότι

$$0 \leqslant \int_0^1 (f(t)-t)^2 dt = \int_0^1 (f(t))^2 dt - 2\int_0^1 tf(t)\,dt + \int_0^1 t^2 dt,$$

άρα

$$\int_0^1 (f(t))^2 dt \geqslant 2\int_0^1 tf(t)\,dt - \int_0^1 t^2 dt = 2\int_0^1 tf(t)\,dt - \frac{1}{3}.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx \leqslant \int_0^1 \left(\int_x^1 f(t)\,dt\right) dx = \int_0^1 f(t)\left(\int_0^t \mathbf{1}\,dx\right) dt = \int_0^1 tf(t)\,dt.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx \geqslant 2\int_0^1 \frac{1-x^2}{2}\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

140. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = xf(x) - \frac{x^2}{2}$. Τότε, $g'(x) = f(x) + xf'(x) - x$ και $g''(x) = 2d'(x) + xf''(x) - 1 \geqslant 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$ (από την υπόθεση), άρα η g είναι κυρτή. Συνεπώς, αν θέσουμε $a = g'(0)$ τότε $g(x) \geqslant g(0) + g'(0)x = ax$, και βλέπουμε ότι

$$\int_{-1}^1 xf(x)\,dx = \int_{-1}^1 \left(g(x) + \frac{x^2}{2}\right) dx \geqslant \int_{-1}^1 \left(ax + \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{1}{3}.$$

142. Υποθέτουμε πρώτα ότι $L \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \geqslant m$. Θέτουμε $\alpha = \int_0^m f(y)\,dy$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > m$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(nx)\,dx - L\right| &= \left|\frac{1}{n}\int_0^n f(y)\,dy - L\right| = \left|\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{n}\int_m^n f(y)\,dy - \frac{n-m}{n}L - \frac{m}{n}L\right| \\ &\leqslant \frac{|\alpha|}{n} + \frac{1}{n}\int_m^n |f(y) - L|\,dy + \frac{m}{n}L \leqslant \frac{|\alpha| + mL}{n} + \frac{n-m}{n}\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_0^1 f(nx)\,dx - L\right| \leqslant \varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο.

Έστω τώρα ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Έστω $M > 0$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f(x) \geqslant M$ για κάθε $x \geqslant m$. Θέτουμε $\alpha = \int_0^m f(y)\,dy$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > m$ γράφουμε

$$\int_0^1 f(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(y)\,dy = \frac{1}{n}\int_m^n f(y)\,dy + \frac{\alpha}{n} \geqslant \frac{1}{n}\int_m^n f(y)\,dy + \frac{\alpha}{n} \geqslant \frac{n-m}{n}M + \frac{\alpha}{n}.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx \geqslant M$$

και αφού το $M > 0$ ήταν τυχόν έχουμε το ζητούμενο. Για την περίπτωση $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο.

143. Θέτουμε $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ και με αντικατάσταση βλέπουμε ότι

$$I = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)\,\sin t\,dt = \int_0^{\pi/2} f(\sin t)\,\cos t\,dt.$$

Από την υπόθεση, για κάθε $t \in [0, \pi/2]$ έχουμε $f(\cos t)\, \sin t + f(\sin t)\, \cos t \leqslant 1$. Συνεπώς,

$$2\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \big(f(\cos t)\, \sin t + f(\sin t)\, \cos t\big)\, dt \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathbf{1}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ικανοποιεί την υπόθεση: για κάθε $x, y \in [0,1]$ έχουμε ότι

$$xf(y) + yf(x) x\sqrt{1-y^2} + \sqrt{1-x^2}y \leqslant \left(x^2 + (1-x^2)\right)^{1/2} \left((1-y^2) + y^2\right)^{1/2} = 1$$

από την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Επίσης,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Συνεπώς, η σταθερά $\frac{\pi}{4}$ στην ανισότητα που ζητάει η άσκηση είναι βέλτιστη.

144. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_0^1 (f(x)-a)^2 dx = \int_0^1 |f(x)|^2 dx - 2a\int_0^1 f(x)\,dx + a^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx + a^2 \geqslant \int_0^1 |f(x)|^2.$$

Επιλέγοντας $a = f(0)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|^2 dx &\leqslant \int_0^1 (f(x)-f(0))^2 dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f'(t)\,dt\right) dx \\ &\leqslant \int_0^1 x\left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right) dx = \int_0^1 |f'(t)|^2 \left(\int_t^1 x\,dx\right) dt \\ &= \int_0^1 |f'(t)|^2 \frac{1-t^2}{2}\, dt \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(t)|^2 dt.\end{aligned}$$

145. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο τότε υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $x_n \to +\infty$ τέτοια ώστε: είτε $f(x_n) > (1+\varepsilon)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή $f(x_n) < (1-\varepsilon)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}\,dx &\geqslant \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{f(x_n)-x}{x^2}\,dx \geqslant \int_{x_n}^{(1+\varepsilon)x_n} \frac{(1+\varepsilon)x_n - x}{x^2}\,dx \\ &= \int_1^{1+\varepsilon} \frac{(1+\varepsilon)-y}{y^2}\,dy,\end{aligned}$$

που είναι μια θετική ποσότητα ανεξάρτητη από το n, και έτσι οδηγούμαστε σε άτοπο. Στην δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}\,dx &\leqslant \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{f(x_n)-x}{x^2}\,dx \leqslant \int_{(1-\varepsilon)x_n}^{x_n} \frac{(1-\varepsilon)x_n - x}{x^2}\,dx \\ &= \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{(1-\varepsilon)-y}{y^2}\,dy,\end{aligned}$$

που είναι μια αρνητική ποσότητα ανεξάρτητη από το n, και έτσι οδηγούμαστε πάλι σε άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι φθίνουσα, θεωρούμε πάλι προς άτοπο ότι υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και ακολουθία $x_n \to +\infty$ τέτοια ώστε: είτε $f(x_n) > (1+\varepsilon)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ή $f(x_n) < (1-\varepsilon)x_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην πρώτη περίπτωση θεωρούμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{x_n/2}^{x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}\,dx$ ενώ στη δεύτερη το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{x_n}^{2x_n} \frac{f(x)-x}{x^2}\,dx$.

146. Αν η f είναι άνω φραγμένη στο $[0, +\infty)$, δηλαδή $0 < f(x) < M$ για κάθε $x \geqslant 0$, τότε

$$\frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)} \geqslant \frac{1}{M}$$

για κάθε $x \geqslant 0$ και το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι άνω φραγμένη και θεωρούμε ακολουθία (x_n) στο $[0,+\infty)$ τέτοια ώστε $x_n \to \infty$ και $f(x_n) \to \infty$. Γράφουμε

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)}\,dx \geqslant \int_0^{x_n} \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)}\,dx \geqslant \int_0^{x_n} \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x_n) - \ln f(0) \longrightarrow \infty$$

και έχουμε πάλι το ζητούμενο.

147. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)|\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|\,dx &\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x+t)|+|f(x)|-2\min\{|f(x+t)|,|f(x)|\})\,dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx - 2\int_{-\infty}^{\infty} \min\{|f(x+t)|,|f(x)|\}\,dx \\
&\geqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx - 2\int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\,dx - 2\int_{-t/2}^{\infty} |f(x+t)|\,dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx - 2\int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\,dx - 2\int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\,dx
\end{aligned}$$

για κάθε $t > 0$. Παρατηρώντας ότι

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{-t/2} |f(x)|\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{t/2}^{\infty} |f(x)|\,dx = 0$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\liminf_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t)-f(x)|\,dx \geqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx$$

και έπεται το ζητούμενο.

148. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τις $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Παρατηρούμε ότι

$$e^x(f(x)e^{-x})' = f'(x) - f(x).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,dx &= \int_0^1 e^x|(f(x)e^{-x})'|\,dx \geqslant \int_0^1 |(f(x)e^{-x})'|\,dx \\
&\geqslant \int_0^1 (f(x)e^{-x})'dx = \frac{f(1)}{e} - \frac{f(0)}{1} = \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,dt : f \in \mathcal{C}\right\} \geqslant \frac{1}{e}.$$

Για να δούμε ότι αυτό είναι το infimum θεωρούμε $\delta \in (0,1)$, το οποίο θα πάρουμε να τείνει στο 0, και μια συνάρτηση $f = f_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

1. $f(x) = e^{x-1}$ στο $[\delta,1]$,
2. f γνησίως αύξουσα στο $[0,\delta]$, με $f(0)=0$, $f(\delta)=e^{\delta-1}$ και $f'(\delta)=e^{\delta-1}$ (της μορφής $f(x)=\alpha_\delta x + b_\delta x^2$).

Αφού $f'-f=0$ στο $[\delta,1]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(x)-f(x)|\,dx &= \int_0^\delta |f'(x)-f(x)|\,dx \\
&\leqslant \int_0^\delta f'(x)dx + \int_0^\delta f(x)dx \leqslant f(\delta) + \delta f(\delta) = (1+\delta)e^{\delta-1}.
\end{aligned}$$

Άρα,
$$\inf\left\{\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,dt : f\in\mathcal{C}\right\} \leqslant \lim_{\delta\to 0}(1+\delta)e^{\delta-1} = \frac{1}{e}.$$

149. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ τότε
$$\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \pi\int_0^1 f(t)\,dt.$$
Πράγματι, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και μετά κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s=-1+2\frac{x-t}{1-t}$ βλέπουμε ότι
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x}} &= \int_0^1 f(t)\left(\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{(x-t)(1-x)}}\right)dt\\ &= \int_0^1 f(t)\left(\int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{(1+s)(1-s)}}\right)dt = \pi\int_0^1 f(t)\,dt.\end{aligned}$$
Τώρα, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ικανοποιεί την $\left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right|\leqslant 1$ για κάθε $x\in(0,1]$, γράφουμε
$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right|\frac{dx}{\sqrt{1-x}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi},$$
άρα
$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| \leqslant \frac{2}{\pi}.$$
Για τη συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x}}$ βλέπουμε ότι
$$\int_0^x \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(x-t)}} = 1.$$
Αν λοιπόν θεωρήσουμε τις $f_n(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{x+1/n}}$, τότε $f_n\in\mathcal{F}$ και $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}$. Αυτό δείχνει ότι
$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| = \frac{2}{\pi}.$$

150. Έστω $x\in(0,1]$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Chebyshev για τις αύξουσες συναρτήσεις f και g/f στο $[0,x]$ γράφουμε
$$\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)\left(\frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\,dt\right) \geqslant \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt,$$
δηλαδή έχουμε
$$\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \leqslant \frac{x}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}}\,dt$$
για κάθε $x\in(0,1]$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι
$$\left(\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\,dt\right)\left(\int_0^x \frac{t^2f(t)}{g(t)}\,dt\right) \geqslant \left(\int_0^x t\,dt\right)^2 = \frac{x^2}{4},$$
άρα
$$\frac{1}{\int_0^x \frac{g(t)}{f(t)}\,dt} \leqslant \frac{4}{x^2}\int_0^x \frac{t^2f(t)}{g(t)}\,dt$$
για κάθε $x\in(0,1]]$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι
$$\frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \leqslant \frac{4}{x^2}\int_0^x \frac{t^2f(t)}{g(t)}\,dt$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα ως προς $x \in (0,1]$ και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\,dx &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_t^1 \frac{4t^2 f(t)}{x^3 g(t)}\,dx\right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{4t^2 f(t)}{g(t)} \left(\int_t^1 \frac{dx}{x^3}\right) dt = \int_0^1 \frac{4t^2 f(t)}{g(t)} \left(\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2}\right) dt \\ &= 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}(1-t^2)\,dt \leqslant 2\int_0^1 \frac{f(t)}{g(t)}\,dt.\end{aligned}$$

Θεωρώντας τις συναρτήσεις $f(t)=1$ και $g_\epsilon(t)=t+\epsilon$, όπου $\epsilon \to 0^+$, βλέπουμε ότι η σταθερά 2 της παραπάνω ανισότητας είναι βέλτιστη.

151. Ορίζουμε $G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$ για $x>0$ και $G(0)=f(0)$. Αφού η f είναι συνεχής στο 0, η G είναι συνεχής στο 0. Για κάθε $b>a>0$ γράφουμε

$$\int_a^b (G(x))^2 dx = \left(-\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2\right)\Big|_a^b + 2\int_a^b \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Αφήνοντας το $a \to 0^+$ παίρνουμε

$$\int_0^b (G(x))^2 dx = -\frac{1}{b}\left(\int_0^b f(t)\,dt\right)^2 + 2\int_0^b \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$\left|\int_0^b \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right) f(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_0^b (G(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^b (f(x))^2 dx\right)^{1/2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_0^b (G(x))^2 dx &\leqslant -\frac{1}{b}\left(\int_0^b f(t)\,dt\right)^2 + 2\int_0^b \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| \left|\frac{f(x)}{x}\right| dx \\ &\leqslant 2\int_0^b \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right| |f(x)|\,dx \\ &\leqslant 2\left(\int_0^b (G(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^b (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant 2\left(\int_0^\infty (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^b (G(x))^2 dx\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Από την

$$\int_0^b (G(x))^2 dx \leqslant 2\left(\int_0^\infty (f(x))^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^b (G(x))^2 dx\right)^{1/2}$$

βλέπουμε ότι

$$\int_0^b (G(x))^2 dx \leqslant 4\int_0^\infty (f(x))^2 dx,$$

και αφήνοντας το $b \to +\infty$ παίρνουμε το ζητούμενο.

152. Αν η f μηδενίζεται σε μια μικρή περιοχή του $\frac{1}{2}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx &= (n+1)\int_0^1 \frac{1}{2x-1}(x-(1-x))\left(\sum_{k=0}^{n}x^k(1-x)^{n-k}\right)f(x)\,dx\\ &= (n+1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}-(1-x)^{n+1}}{2x-1}f(x)\,dx\\ &= (n+1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2x-1}f(x)\,dx-(n+1)\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{2x-1}f(x)\,dx\\ &= (n+1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2x-1}f(x)\,dx+(n+1)\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2x-1}f(1-x)\,dx\\ &= (n+1)\int_0^1 x^n\frac{x}{2x-1}(f(x)+f(1-x))\,dx.\end{aligned}$$

Στην απάντηση της Άσκησης 9 είδαμε ότι

$$(n+1)\int_0^1 x^n g(x)\,dx \longrightarrow g(1)$$

για κάθε συνεχή $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, άρα

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx \longrightarrow f(0)+f(1).$$

Έστω τώρα τυχούσα συνεχής $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Θεωρούμε συνεχή $f_1:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία μηδενίζεται στο $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ και είναι ίση με την f στα $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ και $\left[\frac{3}{4},1\right]$.

Έστω $\varepsilon>0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \max_{\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}}|f(x)|<\varepsilon.$$

για κάθε $n\geqslant n_0$. Τότε,

$$\left|(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx-(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f_1(x)\,dx\right|$$
$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} x^k(1-x)^{n-k}|f(x)|\,dx\leqslant(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n \max_{\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}}|f(x)|<\varepsilon$$

Όμως, για την f_1 μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αρχικό μας συλλογισμό και παίρνουμε

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f_1(x)\,dx \longrightarrow f_1(0)+f_1(1)=f(0)+f(1).$$

Έπεται ότι

$$\left|(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx-(f(0)+f(1))\right|<2\varepsilon$$

για όλους τελικά τους $n\in\mathbb{N}$, άρα

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}f(x)\,dx \longrightarrow f(0)+f(1).$$

153. Έστω $y>e$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι

$$\left(\int_e^y \frac{1}{f'(x)}\,dx\right)\left(\int_e^y \frac{f'(x)}{(x\log x)^2}\,dx\right)\geqslant\left(\int_e^y \frac{1}{x\log x}\,dx\right)^2=(\log(\log y))^2.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_e^y \frac{f'(x)}{(x\log x)^2}\,dx &= \frac{f(x)}{(x\log x)^2}\Big|_e^y + 2\int_e^y \frac{f(x)}{(x\log x)^3}(\log x+1)\,dx \\
&= \frac{f(y)}{(y\log y)^2} - \frac{f(e)}{e^2} + 2\int_e^y \frac{f(x)}{(x\log x)^3}(\log x+1)\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{\log y} - \frac{f(e)}{e^2} + 2\int_e^y \frac{x^2\log x}{(x\log x)^3}(\log x+1)\,dx \\
&= \frac{1}{\log y} - \frac{f(e)}{e^2} + 2\int_e^y \left(\frac{1}{x\log x} + \frac{1}{x(\log x)^2}\right)dx \\
&= \frac{1}{\log y} - \frac{f(e)}{e^2} + 2\log(\log y) + 2 - \frac{2}{\log y} \\
&\leqslant 2\log(\log y) + 2 - \frac{f(e)}{e^2}.
\end{aligned}$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα το ολοκλήρωμα $\int_e^y \frac{f'(x)}{(x\log x)^2}\,dx$ είναι γνησίως θετικό. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\int_e^y \frac{1}{f'(x)}\,dx \geqslant \frac{\left(\int_e^y \frac{1}{x\log x}\,dx\right)^2}{\int_e^y \frac{f'(x)}{(x\log x)^2}\,dx} \geqslant \frac{(\log(\log y))^2}{2\log(\log y)+2-\frac{f(e)}{e^2}} \longrightarrow +\infty$$

όταν το $y\to+\infty$. Συνεπώς,

$$\int_1^\infty \frac{1}{f'(x)}\,dx \geqslant \int_e^\infty \frac{1}{f'(x)}\,dx = \lim_{y\to\infty}\int_e^y \frac{1}{f'(x)}\,dx = +\infty.$$

154. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), x>0$, βρίσκουμε ότι για k μη αρνητικό ακέραιο ισχύει

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k)!}{k!4^k}\Gamma(1/2).$$

Έτσι, η δοσμένη ποσότητα ισούται με

$$\frac{2^{2k+1}}{\pi}\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma(1/2)(2k)!\Gamma(1/2)}{k!4^k(k+1)!} = \frac{(2k)!}{(k+1)!k!} = \frac{(2k)!\{(k+1)-k\}}{(k+1)!k!} = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k+1},$$

που είναι ακέραιος. Εναλλακτικά, το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας γράφεται $\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$, που είναι ο k αριθμός Catalan, που από θεωρία είναι ακέραιος.

Για τη ζητούμενη ανισότητα, εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Δηλαδή

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{(k-1)/2}e^{-x/2}x^{k/2}e^{-x/2}\,dx < \sqrt{\Gamma(k)}\sqrt{\Gamma(k+1)} = \sqrt{k}\Gamma(k).$$

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$.

155. Πρώτος τρόπος. Το ολοκλήρωμα ορίζεται γιατί ο ολοκληρωτέος είναι συνεχής στο $(0,1)$ και έχει πεπερασμένο όριο στο 0 και στο 1. Με την αλλαγή μεταβλητής $y = -\log x$ μετασχηματίζεται στο

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-y}}{y}e^{-y}\,dy$$

το οποίο ισούται με $\lim_{M\to\infty}\int_0^M y^{-1}(1-e^{-y})e^{-y}\,dy$. Για $M>0$ και $k\in\mathbb{N}$, θέτουμε

$$\begin{aligned}
I_M &:= \int_0^M y^{-1}(1-e^{-y})e^{-y}\,dy \text{ και} \\
a_k(M) &:= \frac{1}{k!}\int_0^M y^{k-1}e^{-y}\,dy < \frac{1}{k!}\Gamma(k) = \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Τότε

$$
\begin{aligned}
I_M &:= \int_0^M \sum_{k=1}^\infty \frac{(-y)^{k-1}}{k!} e^{-y}\,dy = \sum_{k=1}^\infty \int_0^M \frac{(-y)^{k-1}}{k!} e^{-y}\,dy = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} a_k(M) \\
&= \sum_{r=0}^\infty \{a_{2r+1}(M) - a_{2r+2}(M)\}.
\end{aligned}
$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Fubini. Η τελευταία ισότητα (η ομαδοποίηση) είναι ισχύει γιατί $\lim_{k\to\infty} a_k(M) = 0$. Ολοκλήρωση κατά μέρη δίνει ότι

$$
a_k(M) - a_{k+1}(M) = \frac{a_k(M)}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} M^k e^{-M}.
$$

Άρα

$$
I_M = \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{2r+2} a_{2r+1}(M) + e^{-M} \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{(2r+2)!} M^{2r+1}.
$$

Σε αυτή την ισότητα παίρνουμε $M\to\infty$. Ο δεύτερος όρος ισούται με $M^{-1}e^{-M}(e^M + e^{-M} - 2)/2 \overset{M\to\infty}{\to} 0$. Στον πρώτο όρο μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης αφού για κάθε $M > 0$ έχουμε $|a_{2r+1}(M)/(2r+2)| < 1/\{(2r+2)(2r+1)\}$ και $\sum_{r=0}^\infty \{(2r+2)(2r+1)\}^{-1} < \infty$. Επίσης, $\lim_{M\to\infty} a_{2r+1}(M) = 1/(2r+1)$. Άρα

$$
\lim_{M\to\infty} I_M = \sum_{r=0}^\infty \frac{1}{(2r+2)(2r+1)} = \sum_{r=0}^\infty \left(\frac{1}{2r+1} - \frac{1}{2r+2}\right) = \log 2.
$$

Δεύτερος τρόπος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $I : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\log x}\,dx$. Έχουμε $I(0) = 0$ και ζητάμε το $I(1)$. Ισχυρισμός 1: Η I είναι διαφορίσιμη στο $(0,1)$ με παράγωγο

$$
I'(t) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \frac{x^t - 1}{\log x}\,dx = \int_0^1 x^t\,dx = \frac{1}{t+1}. \tag{7}
$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$
f(x,t) := \begin{cases} \frac{x^t-1}{\log x} & \text{για κάθε } (x,t) \in (0,1)\times[0,1] \\ 0 & \text{για } x = 0, t \in [0,1], \\ t & \text{για } x = 1, t\in[0,1]. \end{cases}
$$

Έστω t_1, t_2 με $0 < t_1 < t < t_2 < 1$. Η παράγωγος της f ως προς t υπάρχει και είναι συνεχής στο $[0,1]\times[t_1,t_2]$ (ισούται με x^t εκεί). Με βάση το θεώρημα 7.40 στο Apostol Mathematical Analysis, Second Edition, η I είναι διαφορίσιμη στο (t_1,t_2) με παράγωγο όπως δίνεται στην (7). Επειδή τα t_1, t_2 ήταν αυθαίρετα, έπεται το συμπέρασμα για τη διαφορισιμότητα στο $(0,1)$.

Ισχυρισμός 2: Η I είναι συνεχής στα $0,1$. Αυτό έπεται με εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης ή με επίκληση του Θεωρήματος 7.39 από το Apostol Mathematical Analysis, Second Edition εφόσον η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Η (7) δίνει ότι $I(t) = \log(1+t) + C$ για κάθε $t \in (0,1)$, όπου C είναι κατάλληλη σταθερά. Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της I στα 0 και 1, παίρνουμε $C = 0$ και $I(1) = \log 2$.

156. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ τότε

$$
A(x_1,\dots,x_n) := \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n |x_i + x_j| - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |x_i| \geqslant 0. \tag{8}
$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς το πλήθος d των διαφορετικών μη μηδενικών τιμών που παίρνουν οι $|x_i|$. Προφανώς, αν $d = 0$ τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα. Αν $d = 1$ τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 = \cdots = x_k = s > 0$, $x_{k+1} = \cdots = x_{k+m} = -s$ και $x_{k+m+1} = \cdots = x_n - 0$ για κάποιους $k, m \geqslant 0$ με $k + m = 0$. Τότε,

$$
A(x_1,\dots,x_n) = \frac{s}{n^2}(2k^2 + 2m^2 + (k+m)(n-k-m)) - \frac{s}{n}(k+m) = \frac{s}{n^2}(k^2 - 2km + m^2) \geqslant 0.
$$

Έστω τώρα ότι $d \geqslant 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, για κάποιον $s > 0$ και κάποιους $k, m \geqslant 0$ με $k + m > 0$ έχουμε ότι $x_1 = \cdots = x_k = s$, $x_{k+1} = \cdots = x_{k+m} = -s$ και αν $i > k + m$ τότε είτε $x_i = 0$ ή $|x_i| > s$. Θεωρούμε την

$V(t) := A(t,\dots,t,-t,\dots,-t,x_{k+m+1},\dots,x_n)$, όπου k συντεταγμένες είναι ίσες με t και m συντεταγμένες είναι ίσες με $-t$. Η V είναι γραμμική ανάμεσα στο 0 και τον μικρότερο μη μηδενικό $t\in\{|x_{k+m+1}|,\dots,|x_n|\}$, άρα παίρνει ελάχιστη τιμή σε ένα από αυτά τα δύο σημεία. Μπορούμε λοιπόν να πετύχουμε μικρότερο πλήθος μη μηδενικών τιμών των $|x_i|$ χωρίς να αυξηθεί η A. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι $V(s)\geqslant 0$.

Έστω τώρα $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Από την (8), για κάθε $x_1,\dots,x_n\in[0,1]$ έχουμε

$$\frac{2}{n^2}\sum_{q\leqslant i<j\leqslant n}|f(x_i)+f(x_j)|+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n|f(x_i)|\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|f(x_i)|.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα στο $[0,1]^n$ παίρνουμε

$$\frac{n(n-1)}{n^2}\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\,dy\,dx+\frac{2}{n}\int_0^1|f(x)|\,dx\geqslant\int_0^1|f(x)|\,dx,$$

δηλαδή

$$\int_0^1\int_0^1|f(x)+f(y)|\,dy\,dx\geqslant\frac{n-2}{n-1}\int_0^1|f(x)|\,dx.$$

Η ανισότητα προκύπτει αν αφήσουμε το $n\to\infty$.

158. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(t)=\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{1-e^{-txy}}{xy}\right)^2e^{-x^2-y^2}dx\,dy.$$

Γράφοντας $f(t,x,y)=\frac{1-2e^{-txy}+e^{-2txy}}{(xy)^2}E^{-x^2-y^2}$ έχουμε

$$f_1(t,x,y)=\frac{\partial}{\partial t}f(t,x,y)=\frac{2e^{-txy}-2e^{-2txy}}{xy}e^{-x^2-y^2}\quad\text{και}\quad f_2(t,x,y)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,x,y)=(-2e^{-txy}+4e^{-2txy})e^{-x^2-y^2}.$$

Έχουμε $F(t)=\iint_{\mathbb{R}^2}f(t,x,y)\,dx\,dy$ και ορίζουμε

$$F_1(t)=\iint_{\mathbb{R}^2}f_1(t,x,y)\,dx\,dy\quad\text{και}\quad F_2(t)=\iint_{\mathbb{R}^2}f_2(t,x,y)\,dx\,dy.$$

Για κάθε $t\in[0,1-\epsilon]$, όπου $0<\epsilon<1$, έχουμε ότι

$$|f_2(t,x,y)|\leqslant 6e^{2t|xy|-x^2-y^2}=6e^{-t(x-y)^2-(1-t)(x^2+y^2)}\leqslant g_\epsilon(x,y):=6e^{-\epsilon(x^2+y^2)}$$

Η g_ϵ είναι ολοκληρώσιμη και λόγω της $f(0,x,y)=f_1(0,x,y)$ παίρνουμε ότι $|f_2|\leqslant g_\epsilon$ και $|f|\leqslant g_\epsilon$ για $t\in[0,1-\epsilon]$. Αυτό δείχνει ότι η F_2 είναι συνεχής, $F_1(t)=\int_0^t f_2(s,x,y)\,ds$ και $F(t)=\int_0^t f_1(s,x,y)\,ds$ για κάθε $t\in[0,1)$, άρα $F_1=F'$ και $F_2=F_1'$. Τώρα, υπολογίζουμε το

$$F_2(t)=\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f(t,x,y)=\iint_{\mathbb{R}^2}(-2e^{-txy}+4e^{-2txy})e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Χρησιμοποιώντας τις

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-2txy-y^2}dx\,dy&=\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-(x+ty)^2-(1-t^2)y^2}dx\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2}du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(1-t^2)y^2}dy\\&=\sqrt{\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}\end{aligned}$$

και

$$\iint_{\mathbb{R}^2}e^{-x^2-txy-y^2}dx\,dy=\frac{\pi}{\sqrt{1-t^2/4}}$$

που αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο, βλέπουμε ότι

$$F_2(t)=\frac{4\pi}{\sqrt{1-t^2}}-\frac{2\pi}{\sqrt{1-t^2/4}}.$$

Εφόσον $F_1(0)=0$, βλέπουμε τώρα ότι

$$F_1(t)=\int_0^t F_2(s)\,ds = 4\pi\arcsin t - 4\pi\arcsin(t/2).$$

Εφόσον $F(0)=0$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^t f_1(s)\,ds = 4\pi\int_0^t(\arcsin s-\arcsin(s/2))\,ds\\ &=4\pi\left(t\arcsin t+\sqrt{1-t^2}-t\arcsin(t/2)-\sqrt{4-t^2}+1\right).\end{aligned}$$

Τέλος, δείχνουμε ότι η F είναι συνεχής στο σημείο 1. Η συνάρτηση $\frac{1}{u}(1-e^{-u})$ είναι φραγμένη για $|u|\leqslant 1$, άρα στο χωρίο $|xy|\leqslant 1$ έχουμε $f(t,x,y)\leqslant C_1e^{-x^2-y^2}$. Στο χωρίο $|x|\geqslant 1, |y|\geqslant 1$ έχουμε

$$f(t,x,y)\leqslant\left(\frac{1+e^{t|xy|}}{|xy|}\right)^2e^{-x^2-y^2}\leqslant\left(\frac{2e^{|xy|}}{|xy|}\right)^2e^{-2|xy|}=\frac{4}{|xy|}.$$

Στο χωρίο $|xy|\geqslant 1, |x|\leqslant 1$ έχουμε

$$f(t,x,y)\leqslant(1+e^{t|y|})^2e^{-y^2}\leqslant C_3e^{(|y|-2)^2},$$

και όμοια στο χωρίο $|xy|\geqslant 1, |y|\leqslant 1$ έχουμε

$$f(t,x,y)\leqslant C_3e^{(|y|-2)^2}.$$

Αφού η f φράσσεται από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση του (x,y), από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε ότι η $t\mapsto F(t)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$. Άρα,

$$F(1)=\lim_{t\to 1^-}F(t)=4\pi\left(\arcsin 1-\arcsin(1/2)-\sqrt{3}+1\right)=\frac{4\pi^2}{3}-4(\sqrt{3}-1)\pi.$$

159. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι, για κάθε $m>0$,

$$h(m):=\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-mt}}{t}\,dt=\log m.$$

Πράγματι, έχουμε $h(1)=0$ και $h'(m)=\int_0^\infty e^{-mt}=\frac{1}{m}$, άρα $h(m)=\int_1^m\frac{ds}{s}=\log m$. Τώρα, υπολογίζουμε τα

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\left(\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-(x+y)t}}{t}\,dt\right)dx\,dy=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\log(x+y)\,dx\,dy,\\ &\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\left(\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-(x+\frac12)t}}{t}\,dt\right)dx\,dy=\int_a^b\int_0^\infty f(x)\frac{e^{-t}-e^{-(x+\frac12)t}}{t}\,dt\,dx\cdot\int_a^b f(y)\,dy=0,\\ &\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\left(\int_0^\infty\frac{e^{-t}-e^{-(y+\frac12)t}}{t}\,dt\right)dx\,dy=\int_a^b\int_0^\infty f(y)\frac{e^{-t}-e^{-(y+\frac12)t}}{t}\,dt\,dy\cdot\int_a^b f(x)\,dx=0,\end{aligned}$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\log(x+y)\,dx\,dy&=\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\left(\int_0^\infty\frac{e^{-t}+e^{-(x+\frac12)t}+e^{-(y+\frac12)t}-e^{-(x+y)t}}{t}\,dt\right)dx\,dy\\ &=-\int_0^\infty\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)\frac{(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-xt})(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-yt})}{t}\,dx\,dy\,dt\\ &=-\int_0^\infty\left(\int_a^b f(x)(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-xt})\,dx\right)^2\frac{dt}{t}\leqslant 0.\end{aligned}$$

160. Για κάθε $n \geqslant 1$ θέτουμε

$$I_n = \int\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1.$$

Επιλέγουμε φυσικό αριθμό k αρκετά μεγάλο ώστε $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{k}}^{1/\sqrt{k}} f(x)\,dx \leqslant \frac{1}{2}$. Αν $n > k$ και $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1$ τότε υπάρχουν το πολύ k δείκτες i τέτοιοι ώστε $|x_i| \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$. Συνεπώς η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται στην ένωση των $\binom{n}{k}$ χωρίων

$$A(i_1,\dots i_{n-k}) := \left\{x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_{i_j}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}},\ j = 1,\dots,n-k\right\}$$

όπου $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \leqslant n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} I_n &\leqslant \binom{n}{k}\int\int\cdots\int_{\max\{|x_1|,\dots,|x_{n-k}|\}\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}} f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)\,dx_n\cdots dx_2\,dx_1 \\ &= \binom{n}{k}\left(\int_{-1/\sqrt{k}}^{1/\sqrt{k}} f(x)\,dx\right)^{n-k}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)^{k} \leqslant \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \leqslant \frac{(2n)^k}{2^n k!} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

161. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = xy$, $s = y$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}dx\,dy = \int_0^1\left(\int_t^1 t^t\frac{1}{s}\,ds\right)dt = \int_0^1 t^t(-\ln t)\,dt = \int_0^1 t^t dt - \int_0^1 t^t(1+\ln t)\,dt$$

Όμως, $(t^t)' = t^t(1+\ln t)$. Άρα,

$$\int_0^1 t^t(1+\ln t)\,dt = t^t\Big|_0^1 = 0.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1\int_0^1 (xy)^{xy}dx\,dy = \int_0^1 t^t dt = \int_0^1 x^x dx.$$

163. Έστω $m = \min(f/g)$ και $s = \min(g/f)$. Λόγω συμμετρίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m \leqslant s$. Υπάρχει $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = mg(x_1)$. Τότε, $g(y) \geqslant sf(y) \geqslant mf(y)$ για κάθε $y \in [0,1]$, και

$$0 = f(x_1) - mg(x_1) = \int_0^1 (g(y) - mf(y))T(x_1,y)\,dy \geqslant 0$$

αφού $g - mf \geqslant 0$ και $T \geqslant 0$. Δείξαμε ότι

$$\int_0^1 (g(y) - mf(y))T(x_1,y) = 0.$$

Όμως, η $y \mapsto T(x_1,y)$ είναι γνησίως θετική και η $g - mf$ είναι συνεχής. Αναγκαστικά, $g = mf$. Ειδικότερα, $g(x_1) = mf(x_1) = m^2 g(x_1)$, το οποίο δείχνει ότι $m = 1$. Τώρα, η $g = mf$ μας δίνει το ζητούμενο.

164. Για $x,y \in [0,1]$ και $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|F(x) - F(y)| \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}|f_n(x) - f_n(y)| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}|f_n(x) - f_n(y)| \tag{9}$$

$$N|x-y| + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{2}{n^2} \leq N|x-y| + \frac{2}{N}. \tag{10}$$

[Χρησιμοποιήσαμε την $\sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-2} < \int_N^{\infty} x^{-2}\,dx = 1/N$.] Η ανισότητα ισχύει για κάθε N και θα επιλέξουμε κατάλληλο. Υποθέτουμε ότι $x \neq y$ και θέτουμε $a := |x-y| \in (0,1]$. Η συνάρτηση $(z \mapsto za + \frac{2}{z})$ ορισμένη στο $(0,\infty)$ παίρνει ελάχιστη τιμή όταν $z_0 = \sqrt{2}/\sqrt{a} > 1$. Βέβαια το N πρέπει να είναι θετικός ακέραιος, οπότε επιλέγουμε ως N τον εγγύτερο ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του z_0, δηλαδή $N = \ulcorner\sqrt{2}/\sqrt{a}\urcorner$ (η επιλογή $N = [\sqrt{2}/\sqrt{a}]$ λειτουργεί επίσης, απλώς δίνει μεγαλύτερη σταθερά C). Τότε $\sqrt{2}/\sqrt{a} \leq N < 1 + \sqrt{2}/\sqrt{a}$ και επομένως

$$Na + \frac{2}{N} < \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} + 1\right) a + \sqrt{2}\sqrt{a} \leq (2\sqrt{2}+1)\sqrt{|x-y|}.$$

Η ζητουμενη δείχθηκε με $C = 2\sqrt{2}+1$.

165. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως στην προηγούμενη άσκηση. Για δεδομένο N θετικό ακέραιο, έχουμε

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda^{ak}} \lambda^k h + 2\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{ak}} = h\lambda^{1-a}\frac{\lambda^{(1-a)N}-1}{\lambda^{1-a}-1} + \frac{2\lambda^{-a(N+1)}}{1-\lambda^{-a}} \tag{11}$$

$$\leq h\frac{\lambda^{(1-a)(N+1)}}{\lambda^{1-a}-1} + \frac{2\lambda^{-a(N+1)}}{1-\lambda^{-a}} \tag{12}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι άθροισμα δύο συναρτήσεων του N που η μια είναι αύξουσα και η άλλη φθίνουσα. Επειδή δεν μας ενδιαφέρει η καλύτερη σταθερά C που μπορούμε να έχουμε αλλά μόνο η τάξη μεγέθους, λειτουργεί το εξής τέχνασμα[2]. Επιλέγουμε το N ώστε οι δύο ποσότητες να είναι ίσες (σωστότερα, ανάλογες). Ζητάμε δηλαδή $h\lambda^{(1-a)(N+1)} = \lambda^{-a(N+1)}$. Άρα $h = \lambda^{-N-1}$. Αυτή η σχέση καθορίζει έναν N που δεν είναι απαραίτητα ακέραιος. Επιλέγουμε λοιπόν N έτσι ώστε $N+1 = \ulcorner -\log h/\log\lambda\urcorner$, οπότε $\lambda^{-N-1} \leq h < \lambda^{-N}$. Τέτοιο N υπάρχει για $h \in [0, 1/\lambda]$, και τότε παίρνουμε

$$|f(t+h) - f(t)| \leq h^a \left(\frac{\lambda^{1-a}}{\lambda^{1-a}-1} + \frac{2}{1-\lambda^{-a}}\right).$$

Για $h \in [1/\lambda, 1]$, χρησιμοποιούμε το φράγμα $|f(t+h) - f(t)| \leq 2\lambda^{-a}/(1-\lambda^{-a} \leq h^a 2/(1-\lambda^{-a})$. Επομένως επιλέγοντας ως C την παράσταση στην πιο πάνω παρένθεση, έχουμε το ζητούμενο.

166. Αν $\|f_n\|_\infty \not\to 0$ τότε περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\delta \in (0,1)$ και $x_n, x_0 \in [0,1]$ τέτοια ώστε $|f_n(x_n)| \geqslant \delta$ και $x_n \to x_0$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $f_n(x_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε

$$f_n(x_0) = f_n(x_n) - \int_{x_0}^{x_n} f_n'(t)\,dt \geqslant \delta - \|f_n'\|_\infty |x_n - x_0| \geqslant \delta - |x_n - x_0|,$$

και αφού $x_n \to x_0$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $f_n(x_0) \geqslant \delta/2$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $x \in [a,b] := [x_0 - \delta/4, x_0 + \delta/4] \cap [0,1]$ έχουμε ότι

$$f_n(x) = f_n(x_0) - \int_x^{x_0} f_n'(t)\,dt \geqslant \delta/2 - \|f_n'\|_\infty |x - x_0| \geqslant \delta/4.$$

Παρατηρούμε ότι $b - a \geqslant \delta/4$ (ανεξάρτητα από τη θέση του x_0). Θεωρούμε $0 < t < \delta/16$ και τη μη αρνητική συνεχή κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση που είναι ίση με 0 έξω από το $[a,b]$ και ίση με 1 στο $[a+t, b-t]$. Τότε,

$$\int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx \geqslant \int_{a+t}^{b-t} f_n(x)g(x)\,dx \geqslant \frac{\delta}{4}(b-a-2t) \geqslant \frac{\delta^2}{32}$$

για κάθε $n \geqslant n_0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)g(x)\,dx \to 0$ από την υπόθεση.

168. (α) Η f_0 είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Τότε,

$$|f_1(x)| \leqslant \int_0^x |f_0(t)|\,dt \leqslant Mx$$

και επαγωγικά, αν υποθέσουμε ότι $|f_{n-1}(x)| \leqslant M\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, τότε

$$|f_n(x)| \leqslant \int_0^x |f_{n-1}(t)|\,dt \leqslant \int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = M\frac{x^n}{n!}$$

[2]Βασίζεται στην εξής απλή άσκηση. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις με $I \subset \mathbb{R}$, f αύξουσα, g φθίνουσα, $h := f + g$, η h παίρνει ελάχιστη τιμή σε ένα $x_m \in I$, το $x_0 \in I$ ικανοποιεί $f(x_0) = g(x_0)$. Τότε $(1/2)h(x_0) \leq h(x_m) \leq h(x_0)$. Δηλαδή τα $h(x_m), h(x_0)$ είναι ίδιας τάξης μεγέθους.

για κάθε $x \in [0,1]$. Έπεται ότι $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{M}{n!}$ και από το κριτήριο του Weierstrass η σειρά $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty f_n(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt = \int_0^x f_0(t)\,dt + \int_0^x \sum_{k=1}^\infty f_k(t)\,dt = \int_0^x f_0(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε $f'(x) = f_0(x) + f(x)$, άρα

$$(e^{-x}f(x))' = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}f_0(x).$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $f(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^\infty f_n(x) = f(x) = e^x \int_0^x (e^{-x}f_0(x))\,dx.$$

176. Θέτουμε $f_n(x) = \frac{x+1}{x}\frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}$. Για κάθε $x \in [1,2]$ έχουμε $\frac{e^{nx}}{w^{nx}+1} = \frac{1}{1+e^{-nx}} \to 1$, άρα $f_n(x) \to f(x) := \frac{x+1}{x}$. Επίσης, $|f_n(x)| \leqslant f(x)$ και η f είναι ολοκληρώσιμη. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x}\frac{e^{nx}}{e^{nx}+1}\,dx \longrightarrow \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = 1+\ln 2.$$

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, αφού η (f_n) είναι αύξουσα.

177. Ορίζουμε $g_n(x) = (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}$. Παρατηρούμε ότι $(1+x^2)^n \geqslant 1+nx^2$ από την ανισότητα Bernoulli, άρα $g_n(x) \leqslant g(x) := 1$ στο $[0,1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρούμε επίσης ότι, αν $x \in (0,1]$ και $n \geqslant 2$ τότε

$$(1+x^2)^n \geqslant 1+nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^4 > \frac{n(n-1)}{2}x^4,$$

άρα

$$g_n(x) \leqslant 2\frac{1+nx^2}{n(n-1)x^4} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n}\,d\lambda(x) \to 0.$$

179. Παρατηρούμε ότι $1+\frac{1}{n^2x} \leqslant \left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right)^2$, άρα

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2x}\right) \leqslant 2n\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}},$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την $\ln\left(1+\frac{1}{n\sqrt{x}}\right) \leqslant \frac{1}{n\sqrt{x}}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τις $g_n(x) = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2x}\right)$, έχουμε $|g_n(x)| \leqslant g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in (0,1]$. Παρατηρούμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης,

$$|g_n(x)| = n\ln\left(1+\frac{1}{n^2x}\right) \leqslant n\frac{1}{n^2x} = \frac{1}{nx} \to 0$$

για κάθε $x \in (0,1]$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_0^1 n\ln\left(1+\frac{1}{n^2x}\right)dx = \int_0^1 g_n(x)dx \to 0.$$

180. Ορίζουμε $f_n(x) = (1+(x/n))^{-n}\sin(x/n)$, $x \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+n\frac{x}{n} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2} = 1+x+\frac{n-1}{2n}x^2 \geqslant 1+x+\frac{x^2}{4} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,$$

άρα
$$|f_n(x)| = |(1+(x/n))^{-n}\sin(x/n)| \leqslant \frac{1}{(1+(x/2))^2}|\sin(x/n)| \leqslant g(x) := \frac{1}{(1+(x/2))^2}.$$
Επίσης,
$$f_n(x) = (1+(x/n))^{-n}\sin(x/n) \to e^{-x}\cdot 0 = 0$$
καθώς το $n\to\infty$. Η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\infty)$, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και παίρνουμε
$$\int_0^\infty (1+(x/n))^{-n}\sin(x/n)\,dx \to 0.$$

181. Ορίζουμε $f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)(x(1+x^2)^{-1})$. Από την $|\sin(x/n)|\leqslant x/n$ που ισχύει για κάθε $x>0$ και $n\geqslant 1$, βλέπουμε ότι $|f_n(x)|\leqslant f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x>0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη και
$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$
Για κάθε $x>0$ έχουμε ότι
$$f_n(x) = n\sin\left(\frac{x}{n}\right)(x(1+x^2)^{-1}) \longrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
διότι $\lim\limits_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y} = 1$ και $\frac{x}{n}\to 0^+$ για κάθε $x>0$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty \sin\left(\frac{x}{n}\right)(x(1+x^2)^{-1})\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

182. Έχουμε ότι
$$\begin{aligned} n^{p+1}\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{e^{(n+1)x}-e^{nx}} &= n^{p+1}\int_0^\infty \frac{x^p\sin x\, e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}\,dx \\ &= -n^{p+1}\int_0^1 \frac{(-\log t)^k\sin(\log t)t^n}{1-t}\,dt \\ &= \int_0^1 (-\log y)^{p+1}\frac{\sin\big(\log(\sqrt[n]{y})\big)}{\log(\sqrt[n]{y})}\,\sqrt[n]{y}\,\frac{1}{n(1-\sqrt[n]{y})}\,dy. \end{aligned}$$
Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(y) = (-\log y)^{p+1}\frac{\sin\left(\log(\sqrt[n]{y})\right)}{\log(\sqrt[n]{y})}\,\sqrt[n]{y}\,\frac{1}{n(1-\sqrt[n]{y})}$ στο $[0,1]$. Παρατηρούμε ότι $f_n(y)\to(-\log y)^p$ για κάθε $0<y<1$ και
$$|f_n(y)|\leqslant \frac{(-\log y)^{p+1}}{1-y}$$
διότι $|\sin x/x|\leqslant 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\frac{1}{n(1-\sqrt[n]{y})}\leqslant\frac{1}{1-y}$ για κάθε $n\geqslant 1$ και $0<y<1$. Υπολογίζουμε το
$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(-\log y)^{p+1}}{1-y}\,dy &= \int_0^\infty \frac{t^{p+1}e^{-t}}{1-e^{-t}}\,dt = \int_0^\infty t^{p+1}e^{-t}\left(\sum_{m=0}^\infty e^{-mt}\right)dt \\ &= \sum_{m=0}^\infty\int_0^\infty t^{p+1}e^{-(m+1)t}\,dt = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{(m+1)^{p+2}}\int_0^\infty x^{p+1}e^{-x}dx \\ &= \Gamma(m+2)\sum_{m=1}^\infty \frac{1}{m^{p+2}} < +\infty \end{aligned}$$
διότι $p+2>1$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι
$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1}\int_0^\infty \frac{x^p\sin x}{e^{(n+1)x}-e^{nx}}\,dx = \int_0^1 (-\log y)^p dy = \int_0^\infty t^p e^{-t}dt = \Gamma(p+1).$$

183. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $f \equiv 1$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right)^2 dx &= \int_0^1 \sum_{j,k=n}^{\infty} \frac{x^j x^k}{jk}\, dx = \sum_{j,k=n}^{\infty} \frac{1}{jk(j+k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j(j+k+1)} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{r=0}^{k} \frac{1}{n+r} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n+r} \sum_{k=\max\{r,n\}}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} \cdot \frac{1}{\max\{r,n\}} = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+r} + \sum_{r=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+r} \cdot \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{n+r} + \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{n+s} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n+r}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$n \int_0^1 \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right)^2 dx = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{r}{n}} \longrightarrow 2\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx = 2\log 2.$$

Στη γενική περίπτωση, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε $\delta \in (0,1)$ έχουμε ότι $\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x^k}{k}\right)^2 \to 0$ ομοιόμορφα στο $[0, 1-\delta]$ αποδείξτε ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με $(2\log 2)f(1)$.

184. Από το θεώρημα Weierstrass έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο [0,1]. Αφού η f είναι φραγμένη, έχουμε ότι $fp_n \to f^2$ ομοιόμορφα. Άρα,

$$\int_0^1 (f(x))^2\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 p_n(x) f(x)\, dx.$$

Όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\int_0^1 p_n(x)f(x)\, dx$ είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των $\int_0^1 x^k f(x)\, dx$ τα οποία είναι ίσα με μηδέν από την υπόθεση. Άρα, $\int_0^1 p_n(x)f(x)\, dx = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\int_0^1 f^2 = 0$. Από την τελευταία σχέση έπεται ότι $f \equiv 0$ (εξηγήστε γιατί).

185. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(nx)\, dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)g(nx)\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(x) - f(x_k))g(nx)\, dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x_k)g(nx)\, dx\end{aligned}$$

όπου $x_k = (k-1)/n$. Παρατηρούμε ότι, από την ομοιόμορφη συνέχεια της f, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε αν $n \geqslant n_0$ τότε για κάθε $k = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\left| \int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(x) - f(x_k))g(nx)\, dx \right| \leqslant \max(|g|) \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(x_k)|\, dx \leqslant \frac{\max(|g|)\cdot\varepsilon}{n},$$

δηλαδή

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} (f(x) - f(x_k))g(nx)\, dx \right| \leqslant \max(|g|)\cdot\varepsilon.$$

Από την άλλη πλευρά, με την αλλαγή μεταβλητής $y = nx$ παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{n} \int_{k-1}^{k} g(y)\, dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{n} \int_{k-1}^{k} g(y)\, dy = \sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{n} \left(\int_0^1 g(y)\, dy \right).$$

Αφού

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k)}{n} \to \int_0^1 f(x)\, dx,$$

έχουμε ότι
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}\int_{k-1}^{k}g(y)\,dy\to\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right).$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

186. Για κάθε $x\in f([0,1])=[a,b]$ θεωρούμε $y\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y)=x$ και ορίζουμε $G(x)=g(y)$. Η G είναι καλά ορισμένη: αν $y_1\in[0,1]$ και $f(y_1)=x=f(y)$ τότε $g(y_1)=g(y)$ από την υπόθεση.

Παρατηρούμε ότι αν $x_n\to x$ στο $[a,b]$ τότε $G(x_n)\to G(x)$, δηλαδή η G είναι συνεχής. Πράγματι, αν $G(x_n)\not\to G(x)$ τότε περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος ώστε $|G(x_n)-G(x)|\geqslant\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Θεωρούμε $y_n\in[0,1]$ με $f(y_n)=x_n$ και, περνώντας πάλι σε υπακολουθία υποθέτουμε ότι $y_n\to y\in[0,1]$. Τότε, λόγω της συνέχειας των f και g έχουμε ότι $x_n=f(y_n)\to f(y)$, άρα $f(y)=x$, και $G(x_n)=g(y_n)\to g(y)=G(x)$, το οποίο είναι άτοπο.

Από το θεώρημα Weierstrass υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων (p_n) τέτοια ώστε $\|p_n-G\|_\infty\to 0$. Τότε, για κάθε $y\in[0,1]$, θέτοντας $x=f(y)$ έχουμε
$$|p_n(f(y))-g(y)|=|p_n(x)-G(x)|\leqslant\|p_n-G\|_\infty,$$
άρα $\|p_n\circ f-g\|_\infty\leqslant\|p_n-G\|_\infty\to 0$. Δηλαδή, $p_n\circ f\to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.

187. Για κάθε $k\geqslant 1$, το σύνολο $\mathcal{P}_k$ όλων των συναρτήσεων της μορφής $p(x^k)$, όπου p πολυώνυμο, είναι πυκνό στο σύνολο $\mathcal{F}_0:=\{f\in C[0,1]:f(0)=0\}$. Θεωρούμε ένα πυκνό υποσύνολο $\{g_n:n\in\mathbb{N}\}$ του $\mathcal{F}_0$ και ορίζουμε μια ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ως εξής: Επιλέγουμε πολυώνυμο p_1 τέτοιο ώστε $\|g_1-p_1\|_\infty\leqslant\frac{1}{2}$ και αν έχουν οριστεί τα $p_1,\dots,p_n$ θέτουμε $d_{n+1}=1+\max\{\deg(p_i):1\leqslant i\leqslant n\}$ και επιλέγουμε πολυώνυμο p_{n+1} τέτοιο ώστε $|g_{n+1}(x)-p_1(x)-p_2(x^{d_2})-\cdots-p_{n+1}(x^{d_{n+1}})|\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$ για κάθε $x\in[0,1]$. Τότε, η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n(x^{d_n})$ είναι μια δυναμοσειρά της μορφής $\sum\limits_{m=1}^{\infty}a_mx^m$. Αν θεωρήσουμε τυχούσα $f\in\mathcal{F}_0$ τότε υπάρχει υπακολουθία (g_{k_n}) της (g_n) τέτοια ώστε $\|f-g_{k_n}\|_\infty\to 0$, και η ακολουθία $\left\|f-\sum\limits_{m=1}^{k_n}a_mx^m\right\|_\infty\to 0$ όταν $n\to\infty$.

188. Αν η (x_n) είναι ακολουθία Devin τότε, για κάθε $k\geqslant 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τη συνάρτηση $f_k(x)=x^k$ βλέπουμε αμέσως ότι
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f_k(x_i)=\in_0^1 f_k(x)\,dx=\int_0^1 x^kdx=\frac{1}{k+1}.$$
Αντίστροφα, η υπόθεση μας δίνει ότι για κάθε πολυώνυμο $p(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^k$ ισχύει ότι
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)=\sum_{k=0}^{m}a_k\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k\right)\longrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k+1}=\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\right)dx=\int_0^1 p(x)\,dx.$$
Έστω $f\in C[0,1]$ και $\epsilon>0$. Από το θεώρημα Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $|f(x)-p(x)|\leqslant\epsilon$ για κάθε $x\in[0,1]$. Γράφουμε
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right|&\leqslant\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 p(x)\,dx\right|+\left|\int_0^1 p(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right|\\&\leqslant\int_0^1|f(x)-p(x)|\,dx+\left|\int_0^1 p(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\right|+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|p(x_i)-f(x_i)|\\&\leqslant\epsilon+\left|\int_0^1 p(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\right|+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\epsilon\\&=2\epsilon+\left|\int_0^1 p(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(x_i)\right|.\end{aligned}$$
Αφήνοντας το $n\to\infty$ παίρνουμε
$$\limsup_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right|\leqslant 2\epsilon$$

και, αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \to \int_0^1 f(x), dx.$$

189. Αφού η f είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Επίσης, η f είναι κοίλη, αύξουσα και παραγωγίσιμη, άρα η f' είναι φθίνουσα και μη αρνητική συνάρτηση.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $y \geqslant M$ να έχουμε $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(y) \leqslant \ell$. Τότε, για κάθε $x \geqslant 2M$ έχουμε $f(x) - f(x/2) \leqslant \ell - (\ell - \varepsilon/2) = \varepsilon/2$ και από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi_x \in (x/2, x)$ τέτοιο ώστε $f(x) - f(x/2) = (x - x/2)f'(\xi_x) \geqslant \frac{x}{2}f'(x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, για κάθε $x \geqslant 2M$ παίρνουμε

$$0 \leqslant xf'(x) \leqslant 2(f(x) - f(x/2)) = 2\,(\varepsilon/2) = \varepsilon.$$

Από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

191. Παραγωγίζοντας τη σχέση της υπόθεσης παίρνουμε $f(x) = f'(x) + f(x)f'(x)$, άρα $f'(x) = \dfrac{f(x)}{1+f(x)} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και δύο φορές παραγωγίσιμη, με

$$f''(x) = \frac{f'(x)}{(1+f(x))^2} > 0$$

για κάθε $x > 0$, οπότε η f είναι κυρτή. Αφού είναι και γνησίως αύξουσα, αναγκαστικά έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, και εφαρμόζοντας τον κανόνα του l' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{1+f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{1+f(x)}\right) = 1.$$

192. Η $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι κοίλη, άρα η ακολουθία $a_n = f(n+1) - f(n)$ είναι φθίνουσα. Αν $a_{n_0} \leqslant 0$ για κάποιον $n_0 \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \leqslant 0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Όμως τότε, η ακολουθία $(f(n))$ είναι τελικά φθίνουσα και οδηγούμαστε σε άτοπο λόγω της υπόθεσης ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Άρα, $a_n \geqslant 0$ για κάθε $n \geqslant 1$ και, αφού είναι και φθίνουσα, η (a_n) συγκλίνει. Δηλαδή, υπάρχει $a \geqslant 0$ τέτοιος ώστε

$$a_n = f(n+1) - f(n) \to a.$$

Από το λήμμα Cesàro-Stolz έπεται ότι $\frac{f(n)}{n} \to a$, και από την υπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} =$ συμπεραίνουμε ότι $a = 0$. Δηλαδή, $f(n+1) - f(n) \to 0$.

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$f(n) < f(n+1) < f(n) + \varepsilon.$$

Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ με $N > f(n_0)$. Αφού $f(n) \to +\infty$, υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός $n_1 > n_0$ με την ιδιότητα ότι $f(n_1) \geqslant N$. Τότε, $N - \varepsilon \leqslant f(n_1) - \varepsilon < f(n_1 - 1) < N$, δηλαδή $\{f(n_1 - 1)\} > 1 - \varepsilon$. Έπεται ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\} > 1 - \varepsilon$, και αφού το $\varepsilon \in (0,1)$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}}\{f(n)\} = 1$.

193. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = 1$ (σύνθεση κυρτής συνάρτησης με γραμμική είναι κυρτή). Για κάθε $k \geqslant 0$ γράφουμε

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{2\pi} f(2k\pi + y)\cos y\,dy.$$

Η $f_k(y) = f(2k\pi + y)$ είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ και

$$\int_0^{2\pi} f_k(y)\cos y\,dy = \int_0^{\pi} f_k(y)\cos y\,dy + \int_0^{\pi} f_k(2\pi - z)\cos z\,dz = \int_0^{\pi}[f_k(y) + f_k(2\pi - y)]\cos y\,dy.$$

Από το λήμμα των τριών χορδών, αν $0 \leqslant y < z \leqslant \pi$ τότε $f_k(2\pi - y) - f_k(z) \geqslant f_k(2\pi - z) - f_k(y)$, δηλαδή $f_k(y) + f_k(2\pi - y) \geqslant f_k(z) + f_k(2\pi - z)$. Δηλαδή, η $g_k(y) = f_k(y) + f_k(2\pi - y)$ είναι φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Η $\cos y$ είναι επίσης φθίνουσα στο $[0,\pi]$, άρα η ανισότητα του Chebyshev δίνει

$$\int_0^{\pi} g_k(y)\cos y\,dy \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g_k(y)\,dy \cdot \int_0^{\pi}\cos y\,dy = 0.$$

Τώρα βλέπουμε ότι αν

$$A(x) = \int_0^x f(x)\cos x\, dx, \qquad x > 0$$

έχουμε

$$A(2n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f_k(y)\cos y\, dy \geqslant 0$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας και την $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^\infty f(x)\cos x\, dx = \lim_{x\to\infty} A(x) \geqslant 0.$$

194. Με αλλαγές μεταβλητής ώστε όλα τα ολοκληρώματα να είναι στο $[0,1]$, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\frac{2}{5}\int_0^1 f(x)\, dx + \frac{2}{5}\int_0^1 f\left(\frac{3x}{5}\right) dx \geqslant \frac{4}{5}\int_0^1 f\left(\frac{4x}{5}\right) dx.$$

Όμως, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε ότι $\frac{1}{2}\left(x + \frac{3x}{5}\right) = \frac{4x}{5}$, και αφού η f είναι κυρτή έχουμε ότι

$$f(x) + f\left(\frac{3x}{5}\right) \geqslant 2f\left(\frac{4x}{5}\right).$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ παίρνουμε το ζητούμενο.

196. (α) Έστω $0 \leqslant x < y \leqslant \frac{1}{2}$. Από το λήμμα των τριών χορδών έχουμε ότι

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leqslant \frac{g(1-x) - g(1-y)}{(1-x) - (1-y)},$$

άρα $g(y) - g(x) \leqslant g(1-x) - g(1-y)$. Συνεπώς, $\phi(y) = g(y) + g(1-y) \leqslant g(x) + g(1-x) = \phi(x)$.
(β) Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x) = f(1-x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = 1-y$ στο $[1/2, 1]$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x)\, dx &= \int_0^{1/2} f(x)g(x)\, dx + \int_{1/2}^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)g(x)\, dx + \int_0^{1/2} f(1-y)g(1-y)\, dy \\ &= \int_0^{1/2} f(x)(g(x) + g(1-x))\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\phi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Αφού η f είναι αύξουσα στο $[0,1/2]$ και η ϕ είναι φθίνουσα στο $[0,1/2]$, από την ανισότητα Chebyshev παίρνουμε

$$\int_0^{1/2} f(x)\phi(x)\, dx \leqslant 2\int_0^{1/2} f(x)\, dx \cdot \int_0^{1/2} \phi(x)\, dx.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$2\int_0^{1/2} f(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx + \int_{1/2}^1 f(1-x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx$$

χρησιμοποιώντας πάλι αλλαγή μεταβλητής και την $f(x) = f(1-x)$, ενώ

$$\int_{0/1}^2 \phi(x)\, dx = \int_0^{1/2} g(x)\, dx + \int_0^{1/2} g(1-x)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx.$$

Τελικά,

$$\int_0^1 f(x)g(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\phi(x)\, dx \leqslant 2\int_0^{1/2} f(x)\, dx \cdot \int_0^{1/2} \phi(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx \cdot \int_0^1 g(x)\, dx.$$

200. (α) Έστω ότι υπάρχουν σταθερές $a > 0$ και $b > 0$ τέτοιες ώστε $f(x) \neq ax$ για κάθε $x \in [b, \infty)$. Αφού η f είναι συνεχής, παίρνουμε δύο πιθανές περιπτώσεις:

1.) $f(x) > ax$ για κάθε $x \in [b, \infty)$. Ορίζουμε

$$c = \min_{x\in[1,b]} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Τότε, για κάθε $x \in [1, \infty)$ πρέπει να έχουμε

$$f(x) > \frac{\min(a, c)}{2} x,$$

το οποίο είναι άτοπο.

2.) $f(x) < ax$ για κάθε $x \in [b, \infty)$. Ορίζουμε

$$C = \max_{x\in[1,b]} \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_0)}{x_0}.$$

Τότε,

$$f(x) < 2 \max(a, C)x$$

για κάθε $x \in [1, \infty)$, το οποίο είναι πάλι άτοπο.

(β) Επιλέγουμε μια ακολουθία $1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots$ τέτοια ώστε η ακολουθία $y_k = 2^{k\cos k\pi} x_k$ να είναι κι αυτή αύξουσα. Στη συνέχεια ορίζουμε $f(x_k) = y_k$ και επεκτείνουμε την f γραμμικά σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$: δηλαδή, θέτουμε $f(x) = a_k x + b_k$ για κατάλληλους a_k, b_k. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια αύξουσα συνεχή συνάρτηση f, για την οποία $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_{2n})}{x_{2n}} = \infty$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_{2n-1})}{x_{2n-1}} = 0$. Έπεται τώρα ότι η συνεχής συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ παίρνει κάθε θετική τιμή στο $[1, \infty)$.

201. Έστω a_n ο συντελεστής του x^n στο ανάπτυγμα Taylor της $(1 - x + x^2)e^x$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ και $a_2 = \frac{1}{2}$. Για $n \geqslant 3$ έχουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} = \frac{1 - n + n(n-1)}{n!} = \frac{n-1}{n(n-2)!}.$$

Έστω $\frac{x}{y}$ η ανάγωγη μορφή του a_n. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x = 1$ ή ο x είναι πρώτος αριθμός. Αν ο $n-1$ είναι πρώτος, τότε έχουμε $x = 1$ ή $x = n - 1$. Ισχύει μάλιστα το δεύτερο, διότι ο $n - 1$ είναι σχετικά πρώτος προς τον n και τον $(n-2)!$. Αν ο $n - 1$ δεν είναι πρώτος, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $n - 1 = ab$ όπου $a \neq b$, τότε οι a και b διαιρούν τον $(n-2)!$, άρα $x = 1$.
2. Διαφορετικά, έχουμε $n - 1 = p^2$ για κάποιον πρώτο p (εξηγήστε γιατί). Τότε, $p \leqslant \sqrt{n-1} < n - 2$, άρα ο p διαιρεί τον $(n-2)!$, συνεπώς $x = 1$ ή $x = p$. Μάλιστα, αν $p \neq 2$ τότε παρατηρούμε ότι ο p αλλά και ο $2p$ διαιρούν τον $(n-2)!$, οπότε αναγκαστικά έχουμε ότι $x = 1$.

202. Από την υπόθεση, η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 + f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1 + f(x_2) & f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & 1 + f(x_3) & \dots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) & \dots & 1 + f(x_n) \end{pmatrix}$$

είναι ίση με 0, άρα υπάρχει $\vec{0} \neq \vec{t} = (t_1, \dots, t_n)$ τέτοιο ώστε $A(\vec{t}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε $\langle A(\vec{t}), e_i \rangle = 0$, δηλαδή

$$t_i + \sum_{j=1}^{n} f(x_j)t_j = 0.$$

Τότε, $t_1 = \cdots = t_n = t := -\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)t_j$ και, αναγκαστικά, $t \neq 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = -1.$$

Η σχέση αυτή συνεπάγεται ότι η f παίρνει αρνητικές τιμές, ενώ από τη σχέση $f(2013)+f(2014)=1$ βλέπουμε ότι η f παίρνει επίσης θετικές τιμές. Αν η f ήταν συνεχής τότε, από το θεώρημα Bolzano, θα υπήρχε $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=0$, όμως από την υπόθεση η f δεν μηδενίζεται πουθενά. Άρα, η f δεν είναι συνεχής.

203. Θεωρούμε τον $n\times n$ πίνακα

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & \dots & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ 1/n & 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}.$$

Συμβολίζοντας με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα του $x\in\mathbb{R}^n$, θέλουμε να δείξουμε ότι $\|A(x)\|_2^2\leqslant(3+2\sqrt{2})\|x\|_2^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Για κάθε $n\times n$ πίνακα Q θεωρούμε τη νόρμα $\|Q\|=\sup\{\|Q(x)\|_2:\|x\|_2\leqslant 1\}$. Με αυτόν τον ορισμό θέλουμε να δείξουμε ότι $\|A\|\leqslant 1+\sqrt{2}$. Παρατηρούμε ότι $AA^t=A+A^t-J$, όπου J είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $1,1/2,\dots,1/n$ στην κύρια διαγώνιο. Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\|AA^t\|\leqslant\|A\|+\|A^t\|+1.$$

Από την $\|Q\|=\|Q^t\|=\|QQ^t\|^{1/2}$ που ικανοποιεί η νόρμα $\|\cdot\|$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|A\|^2\leqslant 2\|A\|+1,$$

απ' όπου έπεται ότι $\|A\|\leqslant 1+\sqrt{2}$.

204. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνάρτηση με περιόδους $\tau_1,\tau_2>0$ τότε για κάθε $p,q\in\mathbb{Z}$ ο αριθμός $q\tau_1-p\tau_2$ είναι περίοδος της f (τετριμμένα αν είναι ίσος με 0). Στην περίπτωσή μας, η f έχει περιόδους $\tau_1=\sqrt{2}$ και $\tau_2=1$, άρα ο $q\sqrt{2}-p$ είναι περίοδος της f για κάθε $p,q\in\mathbb{Z}$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Dirichlet: Αν ξ είναι ένας άρρητος πραγματικός αριθμός, τότε υπάρχουν άπειροι το πλήθος ρητοί αριθμοί p/q, όπου $p\in\mathbb{Z}$ και $q\in\mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}.$$

Αφού ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και θετικός, μπορούμε να βρούμε $p_n,q_n\in\mathbb{N}$ ώστε $q_n\sqrt{2}-p_n>0$ και $q_n\sqrt{2}-p_n\to 0$.

Χρησιμοποιώντας και τη συνέχεια της f θα δείξουμε ότι $f(x)=f(0)$ για κάθε $x\neq 0$, οπότε η f είναι σταθερή. Υποθέτουμε αρχικά ότι $x>0$. Για τυχόν $\varepsilon>0$ υπάρχει $0<\delta<x$ τέτοιος ώστε: αν $|y-x|<\delta$ τότε $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Θεωρούμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $t_n:=q_n\sqrt{2}-p_n<\delta$. Θεωρούμε τον μεγαλύτερο φυσικό k για τον οποίο $kt_n\leqslant x$. Τότε, για τον $y=kt_n$ έχουμε $y\leqslant x<y+t_n<y+\delta$, άρα $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Όμως, ο $kt_n=(kq)\sqrt{2}-(kp)$ είναι περίοδος της f, άρα $f(y)=f(kt_n)=f(0)$. Έπεται ότι $|f(0)-f(x)|<\varepsilon$, και αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι $f(x)=f(0)$. Για την περίπτωση $x<0$ δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο.

205. Από την υπόθεση $f(x)f(2x)\cdots f(nx)\leqslant Cn^k$ έχουμε ότι $\sum\limits_{s=1}^n\log f(sx)\leqslant\ln C+k\log n$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $n\geqslant 1$. Θεωρούμε $y>0$ και θέτοντας $x=\frac{y}{n}$ παίρνουμε

$$\sum_{s=1}^n\log f\left(\frac{sy}{n}\right)\leqslant\log C+k\log n,$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{s=1}^n\frac{y}{n}\log f\left(\frac{sy}{n}\right)\leqslant\frac{y\log y+ky\log n}{n}.$$

Η $\log f$ είναι συνεχής και μη αρνητική στο $[0,y]$, διότι η f παίρνει τιμές στο $[1,\infty)$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{s=1}^n\frac{y}{n}\log f\left(\frac{sy}{n}\right)\longrightarrow\int_0^y\log f(t)\,dt.$$

Άρα,

$$0\leqslant\int_0^y\log f(t)\,dt\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{y\log y+ky\log n}{n}=0.$$

Από την $\int_0^y \log f(t)\,dt = 0$ συμπεραίνουμε ότι $\log f(t) = 0$ για κάθε $t \in [0, y]$, και ειδικότερα $f(y) = 1$. Άρα, $f(y) = 1$ για κάθε $y > 0$ και $f(0) = 1$ διότι η f είναι συνεχής. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(y) < 1$ για κάθε $y < 0$, άρα τελικά $f \equiv 1$.

206. Παρατηρούμε πρώτα ότι η f είναι 1-1: αν $f(x) = f(y)$ τότε $f(f(x)) = f(f(y))$, άρα $x = 3f(x) - 2f(f(x)) = 3f(y) - 2f(f(y)) = y$. Αφού η f είναι και συνεχής, έπεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη, άρα η $x \mapsto f(f(x))$ είναι γνησίως αύξουσα και έπεται ότι η $f(x) = \frac{1}{3}(2f(f(x)) + x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρούμε τυχόν $x_0 \in \mathbb{R}$ και την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geqslant 0$. Από τη σχέση της υπόθεσης παίρνουμε την αναδρομική σχέση $2x_{n+2} = 3x_{n+1} - x_n$, από την οποία βλέπουμε ότι $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)$ και τελικά παίρνουμε $x_n = \frac{a}{2^n} + b$, όπου $a = 2x_0 - 2f(x_0)$ και $b = 2f(x_0) - x_0$.

Έχουμε $x_n \to b$ και από τη συνέχεια της f και την αναδρομική σχέση $2f(x_{n+1}) = 3f(x_n) - x_n$ παίρνουμε $b = f(b)$. Δηλαδή, η f έχει σταθερό σημείο το $2f(x_0) - x_0$. Αφού το $x_0 \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $2f(x) - x \in A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x\}$. Θα δείξουμε ότι το A είναι μη τετριμμένο διάστημα. Έστω $y, z \in A$ και $w \in (y, z)$. Η συνάρτηση $g(x) = 2f(x) - x - z$ είναι συνεχής και $h(y)h(z) = (y - w)(z - w) < 0$. Άρα, υπάρχει $x \in (y, z)$ τέτοιο ώστε $w = g(x) = 2f(x) - x$, το οποίο σημαίνει ότι $w \in A$.

Θέτουμε $\alpha = \inf A$ και $\beta = \sup A$. Αν $\alpha = -\infty$ και $\beta = +\infty$, τότε $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τη σχέση της υπόθεσης). Αν $\beta < +\infty$ τότε για κάθε $x_0 > \beta$ έχουμε $2f(x_0) - x_0 \leqslant \beta < x_0$, άρα $2f(x_0) - x_0 \in A$. Αφού $a = 2x_0 - 2f(x_0) > 0$ και, όπως είδαμε παραπάνω, $x_n = \frac{a}{2^n} + b$ όπου $b = 2f(x_0) - x_0$, η ακολουθία (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και $x_n \to c = 2f(x_0) - x_0 \in A$. Αν $c \neq \beta$ τότε για μεγάλα k έχουμε $x_k \in [c, \beta) \subseteq A$, άρα $x_k \in A$ και συνεπώς η (x_n) είναι τελικά σταθερή, το οποίο είναι άτοπο αφού η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα, $c = \beta$ και συμπεραίνουμε ότι $f(x_0) = \frac{x_0 + \beta}{2}$ για κάθε $x_0 > \beta$. Με τον ίδιο τρόπο, αν $\alpha > -\infty$ θεωρούμε τυχόν $x_0 < \alpha$ και δείχνουμε ότι $f(x_0) = \frac{x_0 + \alpha}{2}$.

Τελικά, οι συναρτήσεις που ικανοποιούν τη σχέση της υπόθεσης είναι εκείνες για τις οποίες υπάρχουν $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$ τέτοιοι ώστε: $f(x) = \frac{x + \alpha}{2}$ στο $(-\infty, \alpha]$, $f(x) = x$ στο (α, β), και $f(x) = \frac{x + \beta}{2}$ στο $(\beta, +\infty)$.

207. Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_i + a_j - 2\min\{a_i, a_j\}) x_i x_j \leqslant 0.$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i x_i x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = 0 \quad \text{και} \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_j x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right) = 0,$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i, a_j\} x_i x_j \geqslant 0.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{[0,a_i]}(t)\,dt \right)^2 dt = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty \chi_{[0,a_i]}(t) \chi_{[0,a_i]}(t)\,dt \right) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty \chi_{[0,\min\{a_i,a_j\}]}(t)\,dt \right) x_i x_j$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} \min\{a_i, a_j\} x_i x_j$$

και το ζητούμενο έπεται διότι, προφανώς,

$$\int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{[0,a_i]}(t)\,dt \right)^2 dt \geqslant 0.$$

208. Υποθέτουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n} = \frac{a}{b}$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{N}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\displaystyle\frac{k_{n+1}}{k_1 k_2 \cdots k_n} > 3b$ και $\displaystyle\frac{k_{i+1}}{k_i} > 3$ για κάθε $i \geqslant n$. Γράφουμε

$$a k_1 k_2 \cdots k_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{b k_1 k_2 \cdots k_n}{k_i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b k_1 k_2 \cdots k_n}{k_i}.$$

Από τον ορισμό του n έχουμε ότι

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{bk_1k_2\cdots k_n}{k_i} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3^m} = \frac{1}{2}.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι οι αριθμοί $ak_1k_2\cdots k_n$ και $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{bk_1k_2\cdots k_n}{k_i}$ είναι φυσικοί.

209. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt{k_{n+1}}}{k_1k_2\cdots k_n} = +\infty.$$

Αν όχι, υπάρχουν $C>0$ και $m\in\mathbb{N}$ ώστε $k_{n+1} \leqslant (Ck_1\cdots k_n)^2$ για κάθε $n\geqslant m$. Θέτοντας $A = Ck_1\cdots k_n$ βλέπουμε ότι $k_{m+t} \leqslant A^{2^t}$ για κάθε $t\in\mathbb{N}$ ή, ισοδύναμα, $k_n \leqslant A^{2^{n-m}}$ για κάθε $n>m$. Όμως τότε, $\sqrt[2^n]{k_n} \leqslant A^{1/2^m}$ για κάθε $n>m$, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

Δείχνουμε επίσης ότι υπάρχουν $B>0$ και $N\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{B}{\sqrt{k_{m+1}}}$$

για κάθε $m\geqslant N$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ώστε $k_n > e^n$ για κάθε $n>N$. Τότε, για κάθε $m\geqslant N$ γράφουμε

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k_n} < \sum_{n=m+1}^{\log k_{m+1}} \frac{1}{k_n} + \sum_{n>\log k_{m+1}} \frac{1}{k_n}$$

και παρατηρούμε ότι το πρώτο άθροισμα φράσσεται από

$$\frac{\log k_{m+1}}{k_{m+1}} \leqslant \frac{B}{\sqrt{k_{m+1}}}$$

διότι η $\frac{1}{k_n}$ είναι φθίνουσα και μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο k_{m+1} είναι αρκετά μεγάλος ώστε $\log k_{m+1} < \sqrt{k_{m+1}}$, ενώ το δεύτερο άθροισμα φράσσεται από

$$\sum_{n>\log k_{m+1}} \frac{1}{e^n} < \frac{1}{\sqrt{k_{m+1}}} \sum_{n>\log k_{m+1}} \frac{1}{e^{n/2}} < \frac{B}{\sqrt{k_{m+1}}}$$

διότι $k_{m+1} < e^n < k_n$ αν $n > \log k_{m+1}$.

Υποθέτουμε ότι ο $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_n}$ είναι ρητός και για κάθε $m\in\mathbb{N}$ γράφουμε το μερικό άθροισμα $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k_n}$ σε ανάγωγη μορφή $\frac{p_m}{q_m}$. Τότε, $q_m \leqslant k_1k_2\cdots k_m$ και από τον δεύτερο ισχυρισμό παίρνουμε

$$0 < |q_mx - p_m| = q_m \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{Bk_1\cdots k_m}{\sqrt{k_{m+1}}}$$

για όλους τελικά τους $m\in\mathbb{N}$. Από τον πρώτο ισχυρισμό βλέπουμε ότι

$$\liminf_{m\to\infty} |q_mx - p_m| = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο x είναι άρρητος. Αν ήταν ρητός, θα υπήρχε $c>0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $p\in\mathbb{Z}$ και $q\in\mathbb{N}$ με $x\neq p/q$ να ισχύει ότι $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q}$ (εξηγήστε γιατί).

210. Χρησιμοποιούμε την τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης άσκησης. Αν $x\in\mathbb{Q}$ τότε υπάρχει $c>0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $p\in\mathbb{Z}$ και $q\in\mathbb{N}$ με $x\neq p/q$ ισχύει ότι $\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q}$.

Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ θέτουμε $p_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{k^{n^2-m^2}}$ και $q_m = k^{m^2}$. Τότε,

$$0 < x - \frac{p_m}{q_m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^{n^2}} = \frac{1}{k^{(m+1)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(n-1)(2m+n+1)}} < \frac{1}{k^{(m+1)^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{k^{2m+1}q_m}.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο x είναι ρητός, τότε υπάρχει $c>0$ τέτοιος ώστε $c \leqslant \frac{1}{k^{2m+1}}$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $k\geqslant 2$.