Εξεταστική Περίοδος Σεπτεμβρίου 2008

Αλγεβρική Τοπολογία

Απαντήστε σε όλα τα θέματα

Θέμα 1. Έστω X τοπολογικός χώρος. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1. Κάθε απεικόνιση $f : S^1 \to X$ επεκτείνεται σε $\bar{f} : D^2 \to X$.
2. $\pi_1(X, x_0) = 1$ για κάθε $x_0 \in X$.

Θέμα 2. Υποθέτουμε ότι για τον τοπολογικό χώρο X υπάρχει συστολή παραμόρφωσης σε σημείο $r : X \times I \to X$, $r(x, 1) = x_0$, $\forall x \in X$.

Δείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο απεικονίσεις $Y \to X$ είναι ομοτοπικές. Δείξτε ότι αν ο Y είναι συνεκτικός κατά τόξα τότε και απεικονίσεις $X \to Y$ είναι ομοτοπικές.

Θέμα 3. α) Δείξτε ότι $\pi_1(S^2 - \{x_1, x_2, x_3\}) = F_2$ και $\pi_1(S^3 - \{x_1, x_2, x_3\}) = 1$.

β) Έστω $p : S^2 \to T^2$ συνεχής. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : T^2 \to S^2$ τέτοια ώστε $p \circ f = id_{T^2}$.

γ) Έστω X ο χώρος που προκύπτει στον $\mathbb{R}^3$ από την ένωση της μοναδιαίας σφαίρας S^2 με τους x, y άξονες. Υπολογίστε την $\pi_1(X)$.

Θέμα 4. ι) Δώστε παραδείγματα χώρων X τ.ω.

α) $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_3$.

β) $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}$.

ιι) Έστω X συνεκτικός κατά τόξα με $\pi_1(X) = \mathbb{Z}_3$. Δείξτε ότι οποιεσδήποτε δύο απεικονίσεις $f, g : X \to S^1$ είναι ομοτοπικές.

Θέμα 5.α) Δώστε ένα παράδειγμα ενός χώρου X, μιας απεικόνισης $f : X \to X$ και ενός χώρου επικάλυψης $p : \tilde{X} \to X$ τέτοιου ώστε η f δεν ανυψώνεται σε $\tilde{f} : X \to \tilde{X}$ (δηλ. δεν υπάρχει $\tilde{f}$ τ.ω. $p \circ \tilde{f} = f$).

β) Έστω X συνεκτικός, συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός τοπολογικός χώρος με $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$. Έστω $p : \tilde{X} \to X$ χώρος επικάλυψης του X τ.ω. το $p^{-1}(x_0)$ είναι άπειρο σύνολο. Δείξτε ότι ο $\tilde{X}$ είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης του X.