Σημειώσεις Αλγεβρικής Τοπολογίας

Π. Παπάζογλου

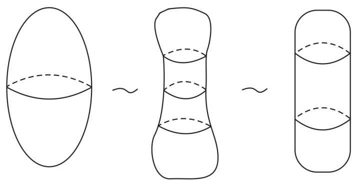
Μαθηματικό Τμήμα
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2008

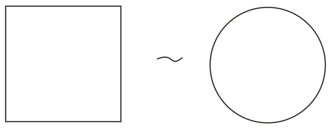
Περιεχόμενα

Εισαγωγή

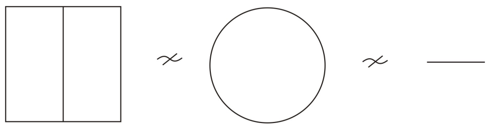
Η Αλγεβρική Τοπολογία μελετά γεωμετρικά αντικείμενα αλλά ενδιαφέρεται μόνο για τις «ποιοτικές» ιδιότητες τους. Μπορούμε να πούμε ότι είναι μία γεωμετρία που μελετά αντικείμενα από λάστιχο. Δύο τοπολογικοί χώροι είναι 'ίδιοι' για την τοπολογία αν είναι ομοιομορφικοί.

Παραδείγματα ομοιομορφικών χώρων:





Ενώ οι παρακάτω χώροι δεν είναι ομοιομορφικοί:



Η Αλγεβρική Τοπολογία είναι η βάση κάθε είδους γεωμετρίας, της Διαφορικής, της Αλγεβρικής κ.τ.λ. Για παράδειγμα, στη Διαφορική Γεωμετρία οι «τοπικές γεωμετρικές ιδιότητες», όπως η καμπυλότητα, σχετίζονται με την τοπολογία.

Διαχωρίζουμε χώρους που δεν είναι ομοιομορφικοί μεταξύ τους χρησιμοποιώντας αλγεβρικές αναλλοίωτες. Οι κυριότερες απ' αυτές είναι οι ομάδες ομοτοπίας και οι ομάδες ομολογίας ενός τοπολογικού χώρου.

Σ' αυτό το μάθημα θα επικεντρωθούμε στην πρώτη ομάδα ομοτοπίας (θεμελιώδη ομάδα) τοπολογικών χώρων.

Αυτές οι πρόχειρες σημειώσεις παραδόσεων βασίζονται στο εξαιρετικό βιβλίο 'Algebraic Topology' του A.Hatcher και τα σχήματα όπως και η δακτυλογράφηση έχουν γίνει από την μεταπτυχιακή φοιτήτρια Μάρθα Γιαννουδοβαρδή την οποία και ευχαριστώ θερμά.

Κεφάλαιο 1

Τοπολογικοί χώροι

1.1 Μετρικοί και τοπολογικοί χώροι

Ορισμός 1.1. *Ένας* **μετρικός χώρος** *είναι ένα σύνολο X με μία συνάρτηση*

$$d : X \times X \to R$$

που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες για κάθε $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$ *και* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Η ανοιχτή μπάλα ακτίνας ϵ και κέντρου x σε ένα μετρικό χώρο X ορίζεται ως

$$B_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$$

Ένα υποσύνολο U ενός μετρικού χώρου X λέγεται *ανοιχτό* αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$B_\epsilon(x) \subset U$$

Ένα σύνολο K λέγεται *κλειστό* αν το $X - K$ είναι ανοιχτό.

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη συνέχεια μιας απεικόνισης χρησιμοποιώντας ανοιχτά σύνολα:

Πρόταση 1.1. *Έστω X, Y μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η f είναι συνεχής.*
2. *Για κάθε ανοιχτό σύνολο U του Y το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στον X.*
3. *Για κάθε κλειστό σύνολο K του Y το σύνολο $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στον X.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι (2) $\Leftrightarrow$ (3). Αν Z υποσύνολο του Y έχουμε

$$f^{-1}(Y-Z) = X - f^{-1}(Z)$$

Επίσης Z ανοιχτό αν και μόνο αν $Y-Z$ κλειστό και

$f^{-1}(Z)$ ανοιχτό αν και μόνο αν $X - f^{-1}(Z)$ κλειστό.

Συμπεραίνουμε ότι τα (2),(3) είναι ισοδύναμα.

(1) $\Rightarrow$ (2). Έστω U ανοιχτό του Y. Αν $x \in f^{-1}(U)$ τότε το U περιέχει μία ανοιχτή μπάλα με κέντρο $f(x)$. Αλλά τότε αφού η f είναι συνεχής το $f^{-1}(U)$ περιέχει μία ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x, άρα το $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό.

(2) $\Rightarrow$ (1). Έστω $x \in X$ και $\epsilon > 0$. Θεωρούμε την ανοιχτή μπάλα B με κέντρο $f(x)$ και ακτίνα ϵ στον Y. Τότε $f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα δ περιέχεται στο $f^{-1}(B)$, επομένως η f είναι συνεχής.

$\square$

Πρακτικά όλοι οι χώροι με τους οποίους θα ασχοληθούμε σ' αυτό το μάθημα είναι μετρικοί χώροι. Ωστόσο βλέπουμε από την παραπάνω πρόταση ότι η συνέχεια απεικονίσεων μπορεί να χαρακτηριστεί χρησιμοποιώντας ανοιχτά σύνολα, κάτι που είναι συχνά απλούστερο από τη χρήση της μετρικής. Καθώς αυτό που μας ενδιαφέρει συνήθως είναι η συνέχεια απεικονίσεων θα εργαστούμε στο ευρύτερο πλαίσιο των τοπολογικών χώρων:

Ορισμός 1.2. *Έστω X ένα σύνολο. Μία* **τοπολογία** $\mathcal{T}$ *του X είναι μία οικογένεια υποσυνόλων του X που ικανοποιούν τα ακόλουθα:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

2. Αν $U, V \in \mathcal{T}$ τότε $U \cap V \in \mathcal{T}$.

3. Αν $U_i \in \mathcal{T}$ για κάθε $i \in I$ τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Το ζευγάρι $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **τοπολογικός χώρος** και τα στοιχεία της $\mathcal{T}$ λέγονται *ανοιχτά* σύνολα του X. Ένα σύνολο $C \subset X$ λέγεται *κλειστό* αν το $X - C$ είναι ανοιχτό.

Παράδειγμα 1.1. *1. Έστω X σύνολο. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{T}$ όλων των υποσυνόλων του X. Αυτή η οικογένεια ορίζει μία τοπολογία του X που ονομάζεται διακριτή τοπολογία.*

2. Αν X είναι σύνολο θεωρούμε $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Η $\mathcal{T}$ ορίζει μία τοπολογία στον X που ονομάζεται τετριμμένη τοπολογία.

3. Αν (X, d) μετρικός χώρος τότε το σύνολο των ανοιχτών ως προς τη μετρική d ορίζει μία τοπολογία στον X.

4. Στην περίπτωση που $X = \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό σύνολο είναι ένα σύνολο που γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση ξένων ανοιχτών διαστήματων της μορφής $(a,b), (-\infty, a), (a, \infty), (-\infty, \infty)$.

Άσκηση 1.1. *Πόσες τοπολογίες μπορούμε να ορίσουμε στο σύνολο $\{1, 2, 3\}$;*

Άσκηση 1.2. *Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται μετρικοποιήσιμος αν υπάρχει μετρική d στον X τέτοια ώστε τα ανοιχτά ως προς τη μετρική d να είναι τα στοιχεία της $\mathcal{T}$. Δώστε ένα παράδειγμα τοπολογικού χώρου που δεν είναι μετρικοποιήσιμος.*

Ορισμός 1.3. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται συνεχής αν για κάθε $U \subset Y$ ανοιχτό το $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.*

Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ τότε η τοπολογία του X επάγει μία τοπολογία $\mathcal{T}_A$ στο A. Ορίζουμε

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{T}\}$$

Η τοπολογία $\mathcal{T}_A$ λέγεται **επαγόμενη τοπολογία** στο A.

Ορισμός 1.4. *Μία οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{B} = \{B_i\}$ ενός συνόλου X λέγεται* **βάση** *για μία τοπολογία στο X αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$, $\bigcup B_i = X$.
2. *Αν $p \in B_i \cap B_j$ τότε υπάρχει $B_k \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $p \in B_k$ και $B_k \subset B_i \cap B_j$.*

Αν $\mathcal{B}$ είναι βάση για μία τοπολογία στο X ορίζουμε μία τοπολογία που έχει ως ανοιχτά σύνολα τα σύνολα που γράφονται σαν ένωση στοιχείων της $\mathcal{B}$.

Για παράδειγμα μία βάση για την συνήθη τοπολογία του $\mathbb{R}$ δίνεται από τα διαστήματα της μορφής (p, q) όπου $p, q \in \mathbb{Q}$.

Ορισμός 1.5. *Έστω X τοπολογικος χώρος. Ο X λέγεται* **Hausdorff** *αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν U, V ανοιχτά τέτοια ώστε $x \in U, y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.*

1.2 Συμπαγείς χώροι

Ορισμός 1.6. *Έστω X τοπολογικος χώρος. Ο X λέγεται* **συμπαγής** *αν για κάθε οικογένεια ανοιχτών συνόλων $\{U_i\}$, $i \in I$ που καλύπτουν τον X, δηλ. $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός απ' αυτά $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ που καλύπτουν τον X, δηλ.*

$$X \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup ... \cup U_{i_n}$$

Πρόταση 1.2. *Το $I = [0, 1]$ είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \{U_i\}$ κάλυψη του I. Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{a \in I : \text{πεπερασμένα το πλήθος } U_i \text{ καλύπτουν το } [0, a]\}$$

Έστω $b = \sup S$. Τότε είτε $S = [0, b)$ είτε $S = [0, b]$. Έστω $U_i \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $b \in U_i$. Τότε $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subset U_i$ για κάποιο $\epsilon > 0$, επομένως υπάρχει μία πεπερασμένη κάλυψη του διαστήματος $[0, b + \epsilon)$, άτοπο.

□

Αν X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ τότε το A λέγεται **συμπαγές** υποσύνολο αν το A με την επαγόμενη τοπολογία απ' τον X είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Πρόταση 1.3. *Αν X Hausdorff τοπολογικός χώρος και $K \subset X$ είναι συμπαγές τότε το K είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το $X - K$ είναι ανοιχτό. Έστω $a \in X - K$. Αφού ο X είναι Hausdorff, για κάθε $x \in K$ υπάρχουν U_x, V_x ανοιχτά τέτοια ώστε $x \in U_x, a \in V_x, U_x \cap V_x = \emptyset$. Αφού $\mathcal{U} = \{U_x, x \in X\}$ είναι κάλυψη του K και ο K είναι συμπαγής, υπάρχουν $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε

$$K \subset U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$$

Αλλά τότε το $V = V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_n$ είναι ανοιχτό που περιέχει το a και δεν τέμνει το K. Επομένως $V \subset X - K$. Συμπεραίνουμε ότι το $X - K$ είναι ανοιχτό δηλ. το K είναι κλειστό.

□

Πρόταση 1.4. *Αν X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $K \subset X$ είναι κλειστό τότε το K είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ ανοιχτή κάλυψη του K. Τότε αν προσθέσουμε το $X - K$ στην $\mathcal{U}$ παίρνουμε μία κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχει μία πεπερασμένη υποκάλυψη. Συμπεραίνουμε ότι πεπερασμένο πλήθος απ' τα στοιχεία της $\mathcal{U}$ καλύπτουν το K, άρα το K είναι συμπαγές.

□

Πρόταση 1.5. *Αν ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής τότε κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία (x_n) στον X δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ω. η ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(x)$ περιέχει το πολύ πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της (x_n). Αλλά τότε η κάλυψη του X από τις $B_\epsilon(x)$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, αφού πεπερασμένο πλήθος από μπάλες περιέχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία της (x_n).

□

Αν X μετρικός χώρος και $A \subset X$ ορίζουμε τη διάμετρο του A με

$$diam(A) = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

Λήμμα Lebesgue. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος τέτοιος ώστε κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, και έστω $\{U_i\}$ μία ανοικτή κάλυψη του X. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $A \subset X$ και $diam(A) < \varepsilon$, το A περιέχεται σε κάποιο U_i.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει το λήμμα *Lebesgue*, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει x_n τέτοιο ώστε η μπάλα $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ δεν περιέχεται στο U_i για κανένα i. Περνώντας σε μία υπακολουθία έχουμε ότι $x_{k_n} \to x$ για κάποιο $x \in X$. Όμως υπάρχει i τέτοιο ώστε $x \in U_i$, άρα για κάποιο $\varepsilon > 0$ θα έχουμε ότι $B_\varepsilon(x) \subset U_i$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$ και $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{4}$, τότε $B(x_n, \frac{1}{n}) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_i$, άτοπο. □

Θεώρημα 1.1. *Ένας μετρικός χώρος (X,d) είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ακολουθία (x_n) στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει την μία κατεύθυνση στην πρόταση 1.5

Έστω ότι κάθε ακολουθία στον X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Θεωρούμε $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$ ανοιχτή κάλυψη του X. Από το λήμμα Lebesgue υπάρχει $\epsilon > 0$ τ.ω. κάθε μπάλα ακτίνας ϵ περιέχεται σε κάποιο U_i. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει πεπερασμένη κάλυψη του X από μπάλες ακτίνας ϵ. Πράγματι αν αυτό δεν ισχύει μπορούμε να κατασκευάσουμε επαγωγικά ακολουθία (x_n) στον X τ.ω. $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ για κάθε i, j. Αλλά τότε αυτή η ακολουθία δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Έχουμε δηλαδή ότι

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

όπου οι B_i είναι μπάλες ακτίνας ϵ. Από το λήμμα Lebesgue για κάθε B_k υπάρχει U_{i_k} τ.ω. $B_k \subset U_{i_k}$. Αλλά τότε

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

επομένως ο X είναι συμπαγής.

□

Θεώρημα 1.2. *Ένα υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Παράδειγμα 1.2. *Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα διάστασης n :*

$$S^n = \{(x_1, x_2, ...x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_1^2 = 1\}$$

Αν

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$$

τότε $S^n = f^{-1}(1)$. Αφού το $\{1\}$ είναι κλειστό η S^n είναι κλειστό σύνολο. Επίσης η S^n είναι φραγμένο σύνολο, άρα η S^n είναι συμπαγής.

Πρόταση 1.6. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση. Τότε η εικόνα της f, $f(X)$, είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_i\}$, $i \in I$ μία ανοιχτή κάλυψη του $f(X)$. Τότε $\{f^{-1}(U_i)\}$, $i \in I$ είναι μία ανοιχτή κάλυψη του X. Αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη $f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2}), ..., f^{-1}(U_{i_n})$. Αλλά τότε $U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_n}$ είναι μία κάλυψη του $f(X)$, άρα $f(X)$ συμπαγής.

□

1.3 Ομοιομορφισμοί

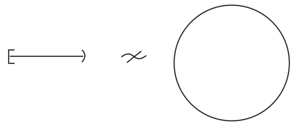
Ορισμός 1.7. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι* **ομοιομορφισμός** *αν η f είναι 1-1, επί και οι f, f^{-1} είναι συνεχείς.*
Ισοδύναμα αν οι X, Y είναι μετρικοί χώροι:
Η f είναι ομοιομορφισμός αν είναι 1-1, επί και για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X και $x \in X$ ισχύει ότι $x_n \to x \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x)$.

Ορισμός 1.8. *Αν υπάρχει $f : X \to Y$ ομοιομορφισμός, λέμε ότι οι X, Y είναι* **ομοιομορφικοί** *και γράφουμε $X \sim Y$.*

Παρατήρηση 1.1. *Η παραπάνω σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Παράδειγμα 1.3. *Αν θεωρήσουμε $X = [0, 1)$, $Y = S^1$ και την απεικόνιση $f : X \to Y$ με $f(x) = (cos(2\pi x), sin(2\pi x))$, τότε η f είναι 1-1, επί και συνεχής. Αλλά η f^{-1} δεν είναι συνεχής.*

Παρατηρούμε ότι οι παραπάνω χώροι X, Y δεν είναι ομοιομορφικοί αφού ο Y είναι συμπαγής ενώ ο X δεν είναι συμπαγής.



Πρόταση 1.7. *Αν X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y Hausdorff και $f : X \to Y$ συνεχής, 1-1 και επί, τότε η f είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αρκεί να δείξουμε ότι αν $K \subset X$ κλειστό τότε $f(K)$ είναι κλειστό. Από την πρόταση 1.4 το K είναι συμπαγές. Επομένως το $f(K)$ είναι συμπαγές. Αλλά τότε από την πρόταση 1.3 το $f(K)$ είναι κλειστό. $\square$

Παράδειγμα 1.4. *Υπάρχει f η οποία είναι συνεχής και επί από το $[0,1]$ στο $[0,1]\times[0,1]$.*

Γεννάται λοιπόν το ερώτημα, υπάρχει παρόμοια παθολογία αν η f δεν είναι απλά συνεχής συνάρτηση αλλά είναι ομοιομορφισμός;

Η απάντηση σε αυτό είναι όχι, για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας θεωρία ομολογίας μπορεί να αποδειχτεί ότι $\mathbb{R}^n \nsim \mathbb{R}^k$ αν $n \neq k$, δηλαδή η έννοια του ομοιομορφισμού ανταποκρίνεται στη διαίσθησή μας.

Το να δείξουμε ότι $X \sim Y$ είναι σχετικά εύκολο, καθώς αρκεί να βρούμε ομοιομορφισμό $f : X \to Y$. Είναι πιο δύσκολο να δείξουμε ότι $X \nsim Y$. Για αυτό χρησιμοποιούμε αναλλοίωτες των χώρων X, Y. Κύρια παραδείγματα τέτοιων αναλλοίωτων είναι οι ομάδες ομοτοποίας $\pi_n(X)$ και οι ομάδες ομολογίας $H_n(X)$ (και συνομολογίας $H^n(X)$).

Σε αυτό το μάθημα θα ασχοληθούμε κυρίως με την θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(X)$.

Κάνουμε τη σύμβαση ότι με $f : X \to Y$ απεικόνιση, θα εννοούμε συνεχή απεικόνιση.

Παράδειγμα 1.5.

1. *Εύκολα βλέπουμε ότι $(0,1) \sim (a,b), a < b, a,b \in \mathbb{R}$, ένας ομοιομορφισμός είναι:*

$$f : (0,1) \to (a,b), \text{ με } f(t) = a + (b-a)t, \forall t \in (0,1)$$

   Όμοια, δείχνουμε ότι $[0,1] \sim [a,b]$.

2. *Έχουμε ότι $(0,1) \sim \mathbb{R}$. Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής:*
   Θεωρούμε

$$f_1 : (0,1) \to (1,+\infty)\ ,\ x \longmapsto \frac{1}{x}$$

$$f_2 : (1,+\infty) \to (0,+\infty)\ ,\ x \longmapsto x-1$$

$$f_3 : (0,+\infty) \to \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto ln(x)$$

Όλες οι παραπάνω απεικονίσεις είναι ομοιομορφισμοί, επομένως έχουμε ότι $(0,1) \sim (1,+\infty) \sim (0,+\infty) \sim \mathbb{R}$, *άρα* $(0,1) \sim \mathbb{R}$.

Εναλλακτικά, από το 1 έχουμε ότι $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *Θεωρούμε την απεικόνιση*

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \text{ με } f(x) = tan(x)$$

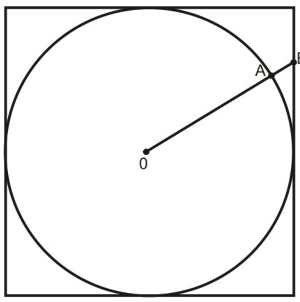
η οποία είναι ομοιομορφισμός. Άρα έχουμε $(0,1) \sim (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$.

3. *Θα συμβολίζουμε με* I *το κλειστό διάστημα* $[0,1]$.

   Έχουμε $I^2 = [0,1] \times [0,1] \sim D^2$ *όπου*

$$D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

   ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος.
   Ένας ομοιομορφισμός ανάμεσα σε αυτά τα σύνολα είναι η απεικόνιση (δες παρ. 1) που στέλνει το διάστημα OA *του κύκλου, στο διάστημα* OB *του τετραγώνου :*



4. *Για τα παραπάνω* I *και* D^2 *έχουμε επίσης ότι :* $\mathring{I} \times \mathring{I} \sim \mathbb{R}^2$ *και* $\mathring{D}^2 \sim \mathring{I} \times \mathring{I}$.

5. *Γενικά ισχύει ότι αν* $K \subseteq \mathbb{R}^n$, *ανοικτό, κυρτό, τότε* $K \sim \mathbb{R}^n \sim \mathring{D}^n$.

6. *Ας θεωρήσουμε τη μοναδιαία* $n-$*σφαίρα :*

$$S^n = \{(x_1, x_2, ...x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \text{ και } N = (0,0,...,0,1) \in S^n.$$

   Έχουμε τη στερεογραφική προβολή $\sigma : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ *με*

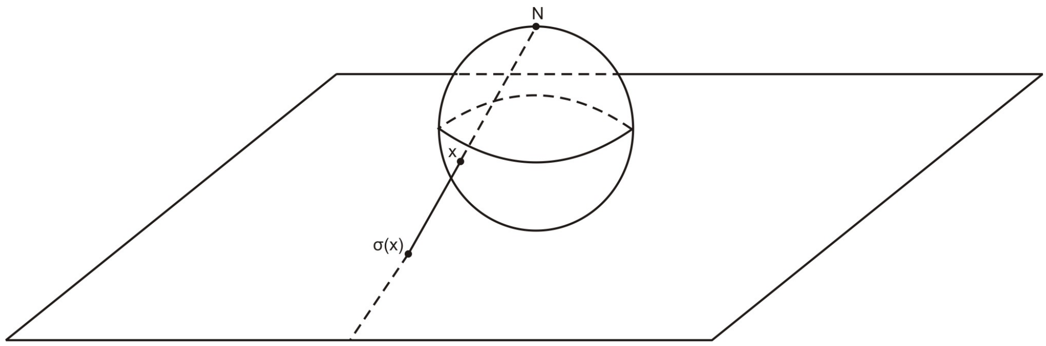
$$\sigma(x_1, x_2, ...x_{n+1}) = \frac{(x_1, x_2, ..., x_n)}{1 - x_{n+1}}$$

Η σ είναι 1-1, επί και η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από τον τύπο

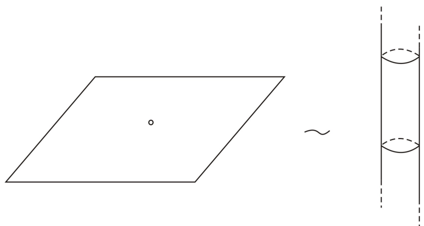
$$\sigma^{-1}(x_1, ..., x_n) = \Big(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + ... + x_n^2}, ..., \frac{2x_n}{1 + x_1^2 + ... + x_n^2}, \frac{-1 + x_1^2 + ... + x_n^2}{1 + x_1^2 + ... + x_n^2} \Big)$$

επομένως η σ^{-1} είναι συνεχής.

Συνεπώς $S^n \setminus \{N\} \sim \mathbb{R}^n$. Γεωμετρικά :



7. *Έχουμε τον ομοιομορφισμό $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1 \times \mathbb{R}$. Γεωμετρικά :*



Αυτό μπορούμε να το δούμε ως εξής : Θέτουμε $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1 \times (0, +\infty)$ με

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (e^{i2\pi\theta}, r)$$

Η f είναι 1-1, επί, συνεχής και η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής, άρα είναι ομοιομορφισμός και $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \sim S^1 \times (0, +\infty)$. Όμως $(0, +\infty) \sim \mathbb{R}$, οπότε $S^1 \times (0, +\infty) \sim S^1 \times \mathbb{R}$, και προκύπτει το ζητούμενο.

1.4 Συνεκτικοί χώροι

Ορισμός 1.9. *Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται* **συνεκτικός** *αν δεν μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση $X = A \cup B$ όπου A, B ανοιχτά μη κενά σύνολα.*

Παράδειγμα 1.6. *Το $[0,1]$ είναι συνεκτικός χώρος (απόδειξη?).*

Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου λέγεται συνεκτικό αν το A είναι συνεκτικός χώρος με την τοπολογία που επάγεται από τον X.

Άσκηση 1.3. *Δείξτε ότι αν $A \subset X$ είναι συνεκτικό σύνολο τότε και η κλειστότητα του A, $\bar{A}$, είναι συνεκτικό.*

Άσκηση 1.4. *Έστω X συνεκτικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής και επί απεικόνιση. Τότε ο Y είναι συνεκτικός.*

Ειδικότερα αν ο X είναι συνεκτικός και ο Y είναι ομοιομορφικός με τον X τότε και ο Y είναι συνεκτικός.

Ορισμός 1.10. *Ένα* **μονοπάτι** *στον τοπολογικό χώρο X είναι μία απεικόνιση $p : [0,1] \to X$. Το σημείο $p(0)$ λέγεται* **αρχικό σημείο** *του μονοπατιού και το σημείο $p(1)$ λέγεται* **τελικό σημείο**. *Λέμε ότι το p συνδέει το $p(0)$ με το $p(1)$.*

Ορισμός 1.11. *Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται* **συνεκτικός κατά τόξα** *αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει μονοπάτι που τα συνδέει.*

Άσκηση 1.5. *Δείξτε ότι αν ο X είναι συνεκτικός κατά τόξα τότε ο X είναι συνεκτικός.*

Παράδειγμα 1.7. *Υπάρχουν παραδείγματα συνεκτικών χώρων που δεν είναι συνεκτικοί κατά τόξα. Για παράδειγμα θεωρούμε το γράφημα της συνάρτησης $\sin(1/x)$, $x \in (0,\infty)$. Τότε η ένωση αυτού του γραφήματος με το διάστημα $[-1,1]$ του άξονα των y είναι συνεκτικό αλλά δεν είναι κατά τόξα συνεκτικό.*

Άσκηση 1.6. *Δείξτε ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$ αν $n > 1$.*

1.5 Τοπολογία Πηλίκο

Η τοπολογία πηλίκο είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για «απλή» αναπαράσταση τοπολογικών χώρων (αποφεύγουμε τους ορισμούς με εξισώσεις, πολύπλοκους τύπους, κ.τ.λ.).

Ορισμός 1.12. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X. Για κάθε $x \in X$, συμβολίζουμε με $[x]$ την κλάση ισοδυναμίας του x ως προς την σχέση $\sim$. Ορίζουμε το* **χώρο πηλίκο** *του X modulo $\sim$ ως εξής. Θεωρούμε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:*

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\}$$

Έχουμε την **απεικόνιση προβολής** *:*

$$p : X \to X/\sim, \, x \mapsto [x]$$

και ορίζουμε τοπολογία στον $X/\sim$ με:
$U \subseteq X/\sim$ είναι **ανοιχτό** *αν και μόνο αν η αντίστροφη εικόνα του, $p^{-1}(U)$, είναι ανοιχτό υποσύνολο του X.*

Παρατήρηση 1.2. *Αυτή η τοπολογία είναι η μεγαλύτερη (με τα περισσότερα ανοιχτά) τοπολογία ως προς την οποία η p είναι συνεχής.*

Παράδειγμα 1.8.

1. *Έστω $X = [0,1] \cup [2,3]$. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον X, που ταυτίζει το 1 με το 2. Δηλαδή, $1 \sim 2$ και $[1] = [2] = \{1,2\}$, ενώ $[x] = \{x\}$, $\forall x \in X \setminus \{1,2\}$.*

   Τότε ο $X/\sim$ είναι ομοιομορφικός με το $[0,1]$.

2. *Έστω $X = [0,1]$ και $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στον X τέτοια ώστε $0 \sim 1$ και $[x] = \{x\}$, $\forall x \in X \setminus \{0,1\}$. Τότε ο χώρος πηλίκο $X/\sim$ είναι ομοιομορφικός με την S^1.*

   Ένας ομοιομορφισμός δίνεται από την απεικόνιση :

   $$f : X/\sim \to S^1, x \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

   Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη ($f(0) = f(1)$), 1-1, επί και η αντίστροφή της είναι συνεχής.

3. *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στον X, όπου για $x, y \in X$ έχουμε*

   $$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$$

   Τότε ο χώρος $X/\sim$ δεν είναι Hausdorff.
   Απόδειξη. *Έστω $[x], [y] \in X/\sim$ με $[x] \neq [y]$ και $U \subset X/\sim$ ανοικτό με $[y] \in U$. Τότε το $U' = p^{-1}(U)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και περιέχει το y. Επομένως υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(y - \epsilon, y + \epsilon) \subset U'$. Επιπλέον, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στο $x - y$, άρα για το παραπάνω ϵ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\forall n \geqslant n_0$ ισχύει ότι $|(x - y) - q_n| < \epsilon$. Οπότε έχουμε:*

   $$|(x - y) - q_{n_0}| < \epsilon \Rightarrow |(x - q_{n_0}) - y| < \epsilon \Rightarrow y - \epsilon < x - q_{n_0} < y + \epsilon$$

   $$\Rightarrow x - q_{n_0} \in (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset U' \Rightarrow [x - q_{n_0}] \in U \Rightarrow [x] \in U$$

   διότι $[x] = [x - q_{n_0}]$ καθώς $x - (x - q_{n_0}) = q_{n_0} \in \mathbb{Q}$. □

4. *Θεωρούμε $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, και ορίζουμε σχέση στο D με $a \sim b \iff a, b \in \partial D$ για κάθε $a, b \in D$ (όπου $\partial D = S^1$).*

   Τότε ο $D/\sim$ είναι ομοιομορφικός με τη σφαίρα S^2.

Πρόταση 1.8. *Αν ο χώρος X είναι συμπαγής (συνεκτικός), τότε ο χώρος $X/\sim$ είναι επίσης συμπαγής (συνεκτικός).*

Απόδειξη. Η απεικόνιση προβολή $p : X \to X/\sim$, είναι συνεχής και επί. Γνωρίζουμε ότι εικόνα συμπαγούς (συνεκτικού) χώρου μέσω συνεχούς απεικόνισης είναι συμπαγής (συνεκτικός) χώρος, επομένως αφού X είναι συμπαγής (συνεκτικός), και ο $X/\sim$ είναι συμπαγής (συνεκτικός). □

Ορισμός 1.13. *Έστω A υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου X και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στον X.*

1. *Ο* **κορεσμός**(**saturation**) *του A ως προς τη σχέση $\sim$ είναι το σύνολο*

$$\hat{A} = \{x \in X / \exists a \in A : x \sim a\}$$

   Αν ισχύει ότι $\hat{A} = A$, τότε το σύνολο A λέγεται **κορεσμένο**.

2. *Η σχέση $\sim$ λέγεται* **κλειστή** *αν για κάθε $A \subset X$ κλειστό, το $\hat{A}$ είναι επίσης κλειστό.*

3. *Ένας χώρος Hausdorff, X, λέγεται* **φυσιολογικός** (**normal**) *αν για κάθε K_1, K_2 ξένα και κλειστά υποσύνολα του X, υπάρχουν A_1, A_2 ξένα και ανοικτά υποσύνολα του X, τέτοια ώστε $K_1 \subset A_1, K_2 \subset A_2$.*

Άσκηση 1.7. *Αν το A είναι κορεσμένο και ανοικτό, δείξτε ότι το $p(A)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$.*

Πρόταση 1.9. *Έστω X normal χώρος και $\sim$ μια κλειστή σχέση ισοδυναμίας στον X. Τότε ο $X/\sim$ είναι Hausdorff(normal).*

Απόδειξη. Έστω $[a], [b] \in X/\sim$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν K, H ξένα και ανοικτά υποσύνολα του $X/\sim$ τέτοια ώστε $[a] \in K, [b] \in H$. Τα $[a], [b]$ είναι κλειστά υποσύνολα του X διότι είναι οι κορεσμοί των κλειστών υποσυνόλων του X, $\{a\}, \{b\}$ αντίστοιχα, ως προς μια κλειστή σχέση ισοδυναμίας. Τώρα, αφού ο X ειναι *normal* και τα $[a], [b] \subset X$ είναι κλειστά, έπεται ότι υπάρχουν $U, V \subset X$ ξένα ανοικτά, τέτοια ώστε $[a] \subset U, [b] \subset V$. Θεωρούμε το σύνολο $A = X \setminus U$, το οποίο είναι κλειστό αφού το U είναι ανοικτό, και παίρνουμε τον κορεσμό του, $\hat{A}$. Τότε το σύνολο $\hat{A}$ είναι κλειστο, άρα το $K =$

$p(X \setminus \hat{A})$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $X/\sim$. Επιπλέον έχουμε ότι $[a] \in p(X \setminus \hat{A})$. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το $[b]$ και παίρνουμε $B = X \setminus V$ και τελικά $H = p(X \setminus \hat{B})$ με $[b] \in H$ και $H \subset X/\sim$ ανοικτό. Τέλος τα σύνολα K, H είναι ξένα καθώς $K \subset U, H \subset V$, $U \cap V = \emptyset$ και τα $X \setminus \hat{A}, X \setminus \hat{B}$ είναι κορεσμένα. Όμοια αποδεικνύουμε ότι ο $X/\sim$ είναι *normal*. □

Παράδειγμα 1.9. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$ κλειστό. Ορίζουμε στον X τη σχέση ισοδυναμίας: $a \sim b \iff a, b \in A$.*

Ορίζουμε $X/A = X/\sim$. Παρατηρούμε ότι αν ο X είναι normal, τότε και ο $X/\sim$ είναι normal.

Πρόταση 1.10. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ συνεχής απεικόνιση και $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στον X. Αν $f(x_1) = f(x_2), \forall x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \sim x_2$, τότε η απεικόνιση $\bar{f} : X/\sim \to Y$, όπου $\bar{f}([x]) = f(x)$, είναι καλά ορισμένη και συνεχής.*

Απόδειξη. Το ότι η $\bar{f}$ είναι καλά ορισμένη είναι προφανές. Για τη συνέχεια της $\bar{f}$, έστω $U \subset Y$ ανοικτό, τότε $\bar{f}^{-1}(U) \subset X/\sim$ και $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)) = f^{-1}(U)$. Το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό αφού η f είναι συνεχής και το U είναι ανοικτό. Επομένως το $\bar{f}^{-1}(U)$ είναι ανοικτό, άρα η $\bar{f}$ είναι συνεχής. □

Παράδειγμα 1.10.

1. *Μια άλλη απόδειξη για το ότι ο χώρος $[0,1]/0 \sim 1$ που ορίζεται στο Παράδειγμα 1.8.2 είναι ομοιομορφικός με την S^1 είναι η εξής :*

   Ορίζουμε $f : [0,1] \to S^1$ με $f(x) = e^{i2\pi x}$. Η απεικόνιση αυτή είναι επί, συνεχής και ισχύει ότι $f(0) = f(1)$. Άρα η $\bar{f}$ είναι συνεχής και 1-1 και αφού οι $[0,1]/0 \sim 1$, S^1 είναι συμπαγείς, έπεται ότι η $\bar{f}$ είναι ομοιομορφισμός.

2. *Μια άλλη απόδειξη για το ότι ο $D/\sim = D/\partial D$ που ορίζεται στο Παράδειγμα 4 είναι ομοιομορφικός με την S^2 είναι η εξής :*

   Έχουμε δεί ότι $S^2 \setminus \{N\} \sim \mathbb{R}^2 \sim \mathring{D}$ (από τα Παραδείγματα 2).

   Έστω λοιπόν $\hat{f} : \mathring{D} \to S^2 \setminus \{N\}$ ένας ομοιομορφισμός. Ορίζουμε $f : D \to S^2$ ως εξής :

$$f(x) = \begin{cases} \hat{f}(x) & , \text{ αν } x \in \mathring{D} \\ N & , \text{ αν } x \in \partial D \end{cases}$$

   Για κάθε $x, y \in \partial D$ έχουμε $f(x) = f(y) = N$, επιπλέον η f είναι συνεχής και επί, ενώ οι D, S^2 είναι συμπαγείς, άρα η $\bar{f} : D/\partial D \to S^2$ είναι ομοιομορφισμός.

   Όμοια δείχνουμε ότι $D^n/\partial D^n \sim S^n$.

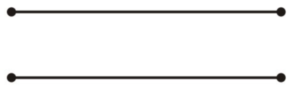
3. *Έστω* $X = S^1 \times I$ *και* $A = S^1 \times 1$, *τότε ισχύει ότι* $X/A \sim D^2$. *Πράγματι ο* X *είναι ομοιομορφικός με τον δακτύλιο* $C = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leqslant |\overrightarrow{x}| \leqslant 1\}$ *και* $A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |\overrightarrow{x}| = \frac{1}{2}\}$. *Ορίζουμε*

$$f : C \to D^2 \text{ με } f(\overrightarrow{x}) = 2(|\overrightarrow{x}| - \frac{1}{2})\overrightarrow{x}$$

Η f *είναι συνεχής απεικόνιση και* $f(\overrightarrow{x}) = 0$, $\forall \overrightarrow{x} \in A$, *άρα ορίζεται η* $\bar{f} : C/A \to D^2$ *και είναι συνεχής. Επιπλέον η* $\bar{f}$ *είναι 1-1 και επί, επομένως είναι ομοιομορφισμός και* $C/A \sim D^2$.

Ορισμός 1.14. *Έστω* X, Y *τοπολογικοί χώροι. Όρίζουμε την* **ξένη ένωση** *των* X, Y *ως το σύνολο* $X \sqcup Y = X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}$, *με την προφανή τοπολογία, δηλ. το* $A \times \{0\} \cup B \times \{1\}$ *είναι ανοιχτό αν και μόνο αν τα* A, B *είναι ανοιχτά.*

Παράδειγμα 1.11. *Έστω* $X = Y = [0, 1]$, *τότε* $X \sqcup Y = [0, 1] \sqcup [0, 1]$ *και*

X= 

Ορισμός 1.15. *Έστω* X, Y *τοπολογικοί χώροι* $Z \subset X$ *και* $f : Z \to Y$. *Ορίζουμε το χώρο* $X \underset{f}{\cup} Y$ *με* $X \underset{f}{\cup} Y = X \sqcup Y / z \sim f(z), \forall z \in Z$

Παράδειγμα 1.12. *Θεωρούμε* $i : \partial D^n \to \partial D^n$, *με* $i(x) = x$, *τότε έχουμε ότι*

$$S^n = D^n \underset{i}{\cup} D^n = D^n \sqcup D^n / x \sim i(x), x \in \partial D^n$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$S^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$$

και $S^n = S_+ \cup S_-$ όπου

$$S_+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geqslant 0\}$$

$$S_- = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leqslant 0\}$$

Ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$p : S_+ \to D^n \text{ , με } p((x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

και

$$q : S_- \to D^n \text{ , με } q((x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

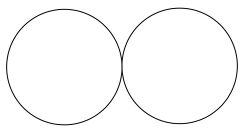
Τότε οι απεικονίσεις p, q είναι ομοιομορφισμοί, άρα $S_+ \sim D^n$ και $S_- \sim D^n$. Θέτουμε $D_1 = D_2 = D^n$, δηλ. $D^n \sqcup D^n = D_1 \sqcup D_2$ και ορίζουμε $f : D_1 \sqcup D_2/\sim \to S^n$ με

$$f(x) = \begin{cases} p^{-1}(x) & \text{, αν } x \in D_1 \\ q^{-1}(x) & \text{, αν } x \in D_2 \end{cases}$$

Αν $x \sim y$, τότε $f(x) = f(y)$. Δηλαδή η απεικόνιση f είναι καλά ορισμένη στον χώρο πηλίκο. Επιπλέον η f είναι 1-1, επί και συνεχής άρα ομοιομορφισμός. $\square$

Ορισμός 1.16. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, και $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Ορίζουμε το* **σφηνοειδές άθροισμα** *των X, Y με $X \vee Y = X \sqcup Y / x_0 \sim y_0$.*

Παράδειγμα 1.13. *Για παράδειγμα, το σφηνοειδές άθροισμα $S^1 \vee S^1$ είναι :*



1.6 Συμπλέγματα Κελιών

Πρακτικά όλοι οι χώροι που μας ενδιαφέρουν μπορούν να παρασταθούν σαν συμπλέγματα κελιών (*cell-complex, CW-complex*).

Το $n-$**κελί**, e^n, ορίζεται ως:

$$e^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}$$

δηλ. το e^n είναι η ανοιχτή μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε επίσης το e^0 να είναι ένα σημείο.

Για παράδειγμα, $e^1 = (-1, 1)$ και το e^2 είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου D^2.

Ορισμός 1.17. *Ένα* **σύμπλεγμα κελιών** *ορίζεται επαγωγικά :*

1. *Ξεκινάμε με ένα διακριτό σύνολο σημείων (0-κελιών), το X^0.*

2. *Κατασκευάζουμε τον $n-$σκελετό X^n από τον $(n-1)-$σκελετό X^{n-1} «κολλώντας» $n-$κελιά e_a με απεικονίσεις $f_a : S^{n-1} \to X^{n-1}$.*

Δηλαδή, θεωρούμε τον χώρο

$$X^{n-1} \bigsqcup_{a \in A} D_a^n$$

όπου A ένα σύνολο δεικτών, απεικονίσεις

$$f_a : \partial D_a^n = S_a^{n-1} \to X^{n-1} \ , \ \forall a \in A$$

και ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim f_a(x) \ , \ \forall x \in S_a^{n-1}$$

Ο X^n είναι ο χώρος πηλίκο που προκύπτει :

$$X^n = X^{n-1} \bigsqcup_a D_a^n / \sim$$

3. *Είτε σταματάμε σε κάποιο $n \in \mathbb{N}$, οπότε $X = X^n$, είτε συνεχίζουμε επ'άπειρο , οπότε $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^n$.*

Αν έχουμε ένα *CW-complex*

$$X = \bigsqcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a}} D_a^n / \sim = \bigsqcup_{n,a} D_a^n / \sim$$

τότε έχουμε την απεικόνιση προβολής

$$p : \bigsqcup_{n,a} D_a^n \to X$$

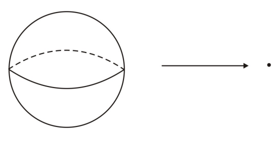
και στην τοπολογία πηλίκο ισχύει ότι

$$U \subset X \text{ ανοικτό } \iff p^{-1}(U) \text{ ανοικτό}$$

Για κάθε a έχουμε τις απεικονίσεις $i_a : D_a^n \to \bigsqcup_{n,a} D_a^n$, έτσι ορίζουμε την χαρακτηριστική απεικόνιση του κελιού e_a^n ως τη σύνθεση των i_a και p, δηλαδή :

$$\sigma_a : D_a^n \to X \text{ με } \sigma_a(x) = p(i_a(x))$$

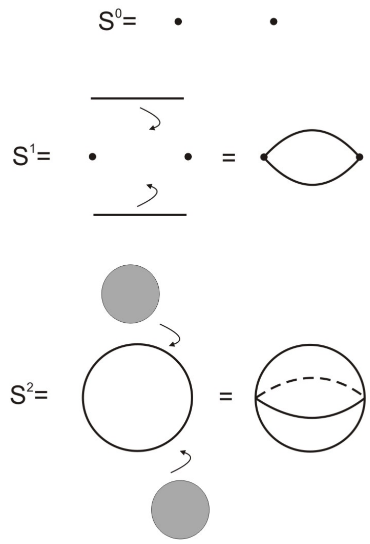
Παράδειγμα 1.14. 1. *Μπορούμε να δούμε την S^n σαν CW-σύμπλεγμα με 2 κελιά, e^0 και e^n, όπου κολλάμε το n-κελί στο 0-κελί με τη σταθερή απεικόνιση $f : \partial D^n \to e^0$*



2. *Ένας άλλος τρόπος να δούμε την S^n, είναι ως*

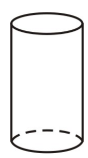
$$S^n = S^{n-1} \sqcup D_1^n \sqcup D_2^n / \sim$$

όπου η σχέση δίνεται από τις απεικονίσεις $f_i : \partial D_i^n \to S^{n-1}$. Οπότε έχουμε

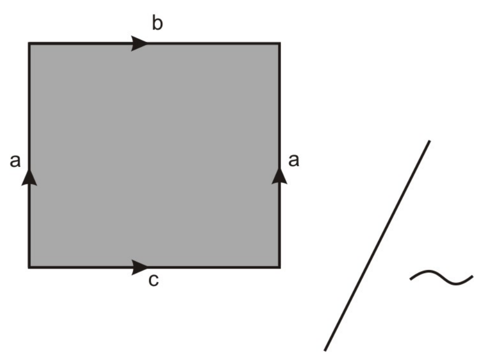


3. *Ο Κύλινδρος*

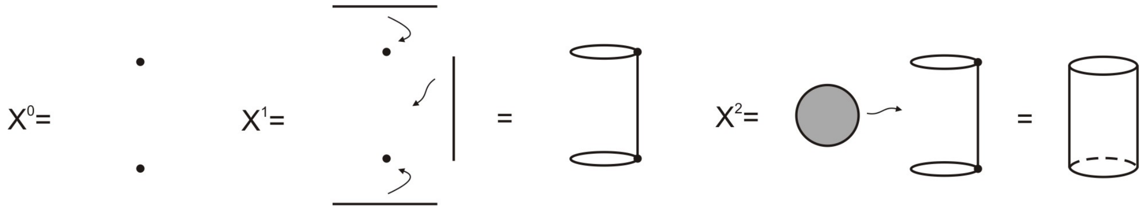
$$K^2 = [0,1] \times [0,1] / (0,t) \sim (1,t),\ \forall t \in [0,1]$$



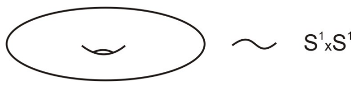
είναι CW-σύμπλεγμα με δύο 0-κελιά, τρία 1-κελιά και ένα 2-κελί.



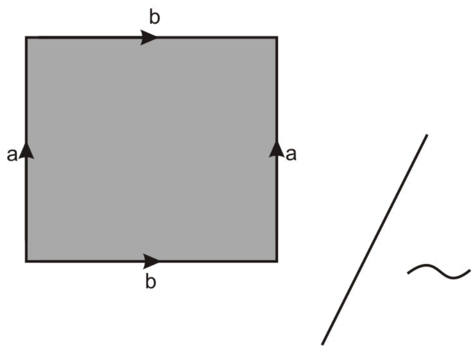
Επαγωγικά:



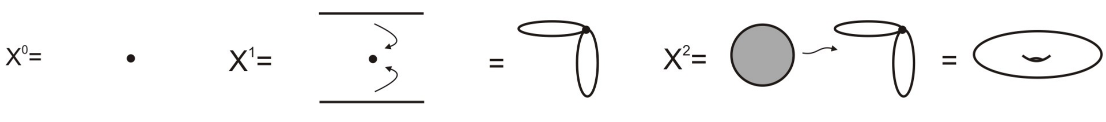
4. *O torus* $T = S^1 \times S^1$



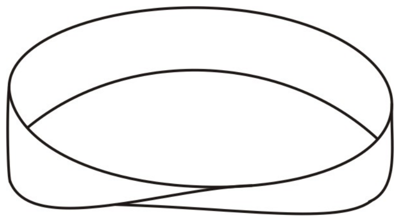
είναι CW-σύμπλεγμα με ένα 0-κελί, δύο 1-κελιά και ένα 2-κελί.



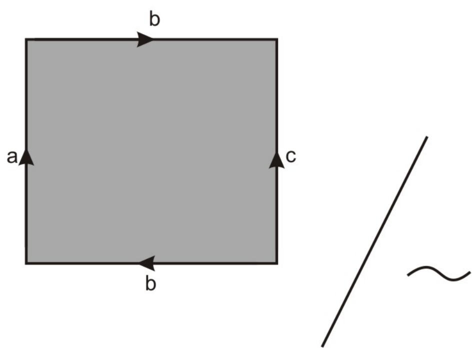
Επαγωγικά :



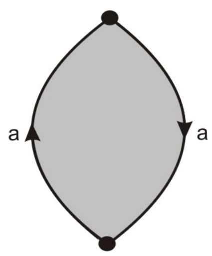
5. *Η ταινία του Möbius*



είναι CW-σύμπλεγμα με δύο 0-κελιά, τρία 1-κελιά και ένα 2-κελί.



6. *Το Προβολικό επίπεδο* P^2 *είναι CW-σύμπλεγμα με ένα 0-κελί, ένα 1-κελί και ένα 2-κελί.*



Κεφάλαιο 2

Βασικές έννοιες

Ορισμός 2.1. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και f_0, f_1 συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον Y. Λέμε ότι οι f_0, f_1 είναι* **ομοτοπικές** *αν υπάρχει $F : X \times I \to Y$ συνεχής απεικόνιση, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ ισχύουν τα παρακάτω:*

$$F(x, 0) = f_0(x)$$

$$F(x, 1) = f_1(x)$$

Τότε λέμε ότι η F είναι μια **ομοτοπία** *που ενώνει τις f_0, f_1 και γράφουμε $f_0 \simeq f_1$.*

Παρατήρηση 2.1. *Η σχέση $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη.

- Προφανώς $f_0 \simeq f_0$
- Έστω $f_0 \simeq f_1$, θέτουμε $G(x, t) = F(x, 1 - t)$, τότε έχουμε $G(x, 0) = F(x, 1) = f_1(x)$, $G(x, 1) = F(x, 0) = f_0(x)$ άρα $f_1 \simeq f_0$.
- Έστω $f_0 \simeq f_1$ και $f_1 \simeq f_2$ με ομοτοπίες F_1, F_2 αντίστοιχα, θέτουμε

  $$G(x, t) = \begin{cases} F_1(x, 2t) & , \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ F_2(x, 2t - 1) & , \text{αν } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

  τότε έχουμε $G(x, 0) = F_1(x, 0) = f_0(x)$ και $G(x, 1) = F_2(x, 1) = f_2(x)$, άρα $f_0 \simeq f_2$.

$\square$

Θα συμβολίζουμε με $f_t(x)$ το $F(x, t)$.

Παράδειγμα 2.1. *Έστω Y συνεκτικός κατά τόξα τοπολογικός χώρος, D^n ο n-δίσκος και $g : D^n \to Y$ η σταθερή απεικόνιση με $g(x) = y_0, \forall x \in D^n$, για κάποιο $y_0 \in Y$. Αν $f : D^n \to Y$ συνεχής απεικόνιση, τότε $f \simeq g$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in D^n$, ορίζουμε

$$f_t(x) = f((1-t)x), t \in [0,1]$$

δηλαδή

$$F(x,t) = f((1-t)x)$$

Τότε, $f_0(x) = f(x), f_1(x) = f(0)$ οπότε $f \simeq f_1$ όπου $f_1(x) = f(0)$ η σταθερή απεικόνιση.

Ο χώρος Y είναι συνεκτικός κατά τόξα, άρα υπάρχει $p : [0,1] \to Y$ τέτοιο ώστε $p(0) = f(0)$ και $p(1) = y_0$.

Ορίζουμε $G : D^n \times I \to Y$ με $G(x,t) = p(t)$. Η G είναι ομοτοπία από την f_1 στην g, άρα έχουμε ότι $f \simeq f_1, f_1 \simeq g$ και επομένως $f \simeq g$. □

Ορισμός 2.2. *Μία* **συστέλλουσα παραμόρφωση** *του X στο $A \subset X$ είναι μία απεικόνιση $F : X \times I \to X$ τέτοια ώστε*

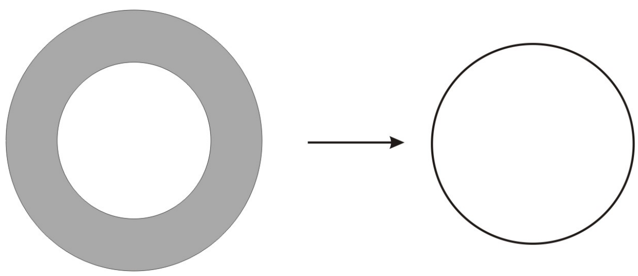
$$F(x,0) = x \ , \ \forall x \in X$$

$$F(x,1) \in A \ , \ \forall x \in X$$

$$F(a,t) = a \ , \ \forall a \in A, \forall t \in I$$

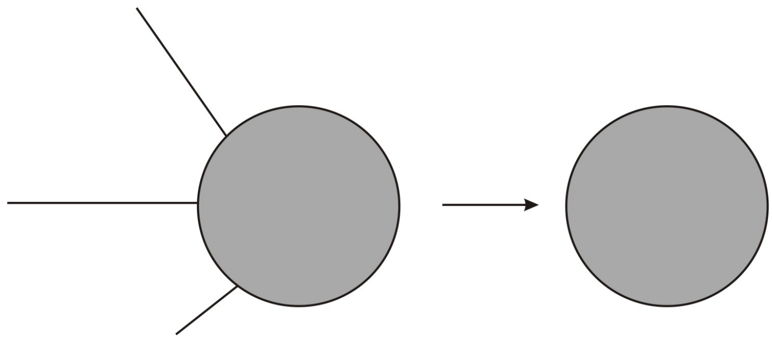
Τότε λέμε ότι ο A είναι **συστολή παραμόρφωσης** *του X.*

Παράδειγμα 2.2. 1. *Θεωρούμε το δακτύλιο $R = \{re^{i\theta} \mid 1 \leqslant r \leqslant 2\}$, $A = \{e^{i\theta}\} \subset R$ και $F : R \times I \to R$ με $F(re^{i\theta}, t) = (t + (1-t)r)e^{i\theta}$. Τότε έχουμε : $F(re^{i\theta}, 0) = re^{i\theta}$, $F(re^{i\theta}, 1) = e^{i\theta} \in A$, $F(e^{i\theta}, t) = e^{i\theta}$ Άρα η F είναι μία συστέλλουσα παραμόρφωση του R στο A.*

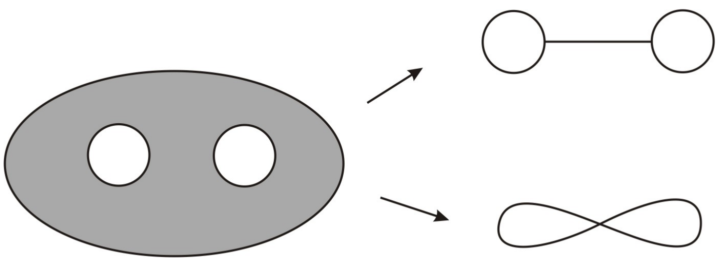


Έχουμε τις συστολές παραμόρφωσης:

2.



3.



Ορισμός 2.3. *Έστω $A \subset X$. Μία* **συστολή** *(retraction) του X στον A είναι μία απεικόνιση $r : X \to A$, τέτοια ώστε $r(a) = a$, $\forall a \in A$.*

Παρατήρηση 2.2. *Άν $x_0 \in X$, τότε η σταθερή απεικόνιση $r : X \to \{x_0\}$ είναι μία συστολή.*

Αν $X = S^1$, θα δείξουμε αργότερα ότι δεν υπάρχει συστέλλουσα παραμόρφωση του X σε σημείο.

Ορισμός 2.4. *Μία απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι* **ομοτοπική ισοδυναμία** *αν υπάρχει $g : Y \to X$ τέτοια ώστε $f \circ g \simeq 1_Y$, $g \circ f \simeq 1_X$ (όπου $1_X, 1_Y$ οι ταυτοτικές απεικονίσεις των X, Y αντίστοιχα).*

Ορισμός 2.5. *Αν υπάρχει ομοτοπική ισοδυναμία $f : X \to Y$, λέμε ότι οι X, Y είναι* **ομοτοπικά ισοδύναμοι** *(λέμε επίσης ότι οι X, Y έχουν τον ίδιο τύπο ομοτοπίας ή ότι είναι ομοτοπικοί).*

Παρατήρηση 2.3. *Η ομοτοπική ισοδυναμία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Παρατήρηση 2.4. *Ο n-δίσκος D^n είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με ένα σημείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη σταθερή απεικόνηση $f : D^n \to \{P\}$ και την απεικόνηση $g : \{P\} \to D^n$ με $g(P) = 0$. Τότε έχουμε ότι $f \circ g = 1_{\{P\}}$ και $g \circ f(D^n) = \{0\}$. Από το παράδειγμα 2.1 έχουμε ότι $g \circ f \simeq 1_{D^n}$, άρα ο D^n είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με σημείο. □

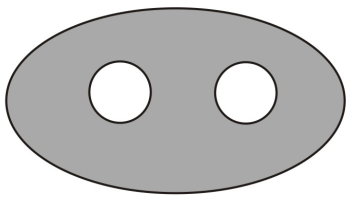
Πρόταση 2.1. *Αν $A \subset X$ είναι συστολή παραμόρφωσης του X, τότε οι A, X είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.*

Απόδειξη. Έχουμε την εμφύτευση $i : A \hookrightarrow X$ και τις απεικονίσεις $F : X \times I \to A$, $r : X \to A$, με $r(x) = F(x,1)$, $r \circ i = 1_A$, $i \circ r : X \to X$ με $i \circ r(x) = F(x,1)$, $1_X = F(x,0) \simeq F(x,1)$. □

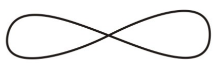
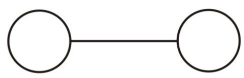
Ορισμός 2.6. *Λέμε ότι ο χώρος X είναι* **συσταλτός** *(***contractible***) αν ο X είναι ομοτοπικός με σημείο.*

Παράδειγμα 2.3.

1. *Από τα προηγούμενα έχουμε ότι ο D^n είναι συσταλτός.*
2. *Ο $\mathbb{R}$ είναι συσταλτός.*
   Απόδειξη. *Έχουμε την συστολή παραμόρφωσης:*
   $$F : \mathbb{R} \times I \to \{0\} \ , \ F(x,t) = (1-t)x$$
   □
3. *Αν έχουμε τον παρακάτω χώρο X*

   X = 

   δύο συστέλουσες παραμορφώσεις του είναι οι παρακάτω Y και Z

   Y =  Z = 

   Άρα οι Y, Z είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Ισχύει το θεώρημα:

Θεώρημα 2.1. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Οι X, Y είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι αν και μόνο αν υπάρχει χώρος Z, που περιέχει τους X, Y, τέτοιος ώστε οι X, Y να είναι συστολές παραμόρφωσης του Z.*

Παράδειγμα 2.4. *Ο χώρος πηλίκο $S^2/x \sim y$, όπου $x, y \in S^2$, είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το σφηνοειδές άθροισμα $S^2 \vee S^1$.*

Κεφάλαιο 3

Η Θεμελιώδης ομάδα

3.1 Ορισμός

Έστω X τοπολογικός χώρος και $I = [0, 1]$.

Ορισμός 3.1. *Ένα* **μονοπάτι** *στον X είναι μία συνεχής απεικόνιση $f : I \to X$.*

Μία **ομοτοπία μονοπατιών** *στον X είναι μία οικογένεια $f_t : I \to X$, $t \in [0, 1]$, τέτοια ώστε*

1. *Τα άκρα $f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1$ είναι ανεξάρτητα από το t.*
2. *Η απεικόνιση $F : I \times I \to X$ όπου $F(s, t) = f_t(s)$ είναι συνεχής.*

Αν τα μονοπάτια f_0, f_1 συνδέονται μ' αυτόν τον τρόπο με μία ομοτοπία, λέμε ότι είναι **ομοτοπικά** *και γράφουμε $f_0 \simeq f_1$*

Πρόταση 3.1. *Η σχέση ομοτοπίας μονοπατιών με σταθερά άκρα είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Προφανώς είναι αυτοπαθής, θεωρούμε $f_t = f, \forall t \in [0, 1]$.

Έστω $f_0 \simeq f_1$ με την f_t, τότε $f_1 \simeq f_0$ με την f_{1-t}, άρα είναι συμμετρική.

Έστω $f \simeq g$ με την F και $g \simeq h$ με την G, τότε $f \simeq h$ με την

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s, 2t) & \text{, αν } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(s, 2t-1) & \text{, αν } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Άρα η σχέση ομοτοπίας μονοπατιών με σταθερά άκρα είναι σχέση ισοδυναμίας. □

Η κλάση ισοδυναμίας ενός μονοπατιού f συμβολίζεται με $[f]$.

Αν f, g μονοπάτια με $f(1) = g(0)$, ορίζουμε τη **σύνθεση** (γινόμενο) των μονοπατιών με

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s) & , \text{αν } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s-1) & , \text{αν } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Η πράξη αυτή είναι καλά ορισμένη σε κλάσεις ισοδυναμίας μονοπατιών. Πράγματι αν $f_0 \simeq f_1$ και $g_0 \simeq g_1$, τότε $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$ με την ομοτοπία $f_t \cdot g_t$.

Ειδική περίπτωση μονοπατιών αποτελούν τα μονοπάτια $f : I \to X$ με $f(0) = f(1) = x_0$. Τα μονοπάτια αυτά ονομάζονται **βρόγχοι**(*loops*) και το x_0 λέγεται **σημείο στήριξης ή βάση**(*base point*).

Ορισμός 3.2. *Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας των βρόγχων στον X, με σημείο στήριξης το x_0, συμβολίζεται με $\pi_1(X, x_0)$.*

Πρόταση 3.2. *Το σύνολο $\pi_1(X, x_0)$ είναι ομάδα με πράξη το γινόμενο $[f][g] = [f \cdot g]$, όπου f, g βρόγχοι στον X με σημείο στήριξης το x_0.*
Αυτή η ομάδα ονομάζεται **θεμελιώδης ομάδα** *του X στο x_0.*

Απόδειξη. Το γινόμενο $f \cdot g$, όπου $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$, ορίζεται και εξαρτάται μόνο από τις κλάσεις ομοτοπίας των f, g.
Θα δείξουμε τα ακόλουθα :

1. Η πράξη είναι προσεταιριστική, δηλαδή αν $[f], [g], [h] \in \pi_1(X, x_0)$, τότε

$$[(f \cdot g) \cdot h] = [f \cdot (g \cdot h)]$$

2. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο της πράξης και αυτό είναι η σταθερή απεικόνιση:

$$c : I \to X \text{ με } c(t) = x_0 \ , \ \forall t \in I$$

3. Υπάρχει αντίστροφο για κάθε $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ και αυτό είναι η κλάση της απεικόνισης:

$$\bar{f} : I \to X \text{ με } \bar{f}(s) = f(1-s) \ , \ \forall s \in I$$

Πριν αποδείξουμε τα παραπάνω διατυπώνουμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Έστω $\varphi : I \to I$ τέτοια ώστε $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$.
Αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, η απεικόνιση $f \circ \varphi$ λέγεται αναπαραμέτρηση της f.
Ισχυριζόμαστε ότι $f \circ \varphi \simeq f$, δηλαδή $[f \circ \varphi] = [f]$.

Απόδειξη του ισχυρισμού:
Ορίζουμε ομοτοπία

$$\varphi_t(s) = (1-t)\varphi(s) + ts \ , \ t, s \in I$$

τότε $\varphi_0(s) = \varphi(s), \varphi_1(s) = s$ και η απεικόνιση $f \circ \varphi_t$ είναι ομοτοπία από την $f \circ \varphi$ στην f. Οπότε πράγματι $[f \circ \varphi] = [f]$.
Συνεχίζουμε με την απόδειξη των 1,2,3 :

1. Από τον ορισμό του γινομένου μονοπατιών προκύπτει ότι η $(f \cdot g) \cdot h$ είναι αναπαραμέτρηση της $f \cdot (g \cdot h)$ και επομένως $[(f \cdot g) \cdot h] = [f \cdot (g \cdot h)]$.

2. Για κάθε $f \in \pi_1(X, x_0)$, το μονοπάτι f είναι αναπαραμέτρηση των $f \circ c, c \circ f$, άρα $[f] = [f \circ c] = [c \circ f]$.

3. Ορίζουμε :
$$f_t(s) = f((1-t)s) \text{ , οπότε } f_0 = f, f_1 = c = f(0)$$
και
$$\bar{f}_t(s) = \bar{f}(t + (1-t)s) \text{ , οπότε } \bar{f}_0 = \bar{f}, \bar{f}_1 = c = \bar{f}(1) = f(0)$$
Η $f_t \cdot \bar{f}_t$ είναι ομοτοπία από την $f \cdot \bar{f}$ στην c καθώς $f_0 \cdot \bar{f}_0 = f \cdot \bar{f}$ και $f_1 \cdot \bar{f}_1 = c$. Επιπλέον ισχύει ότι $f_t \cdot \bar{f}_t(0) = f_t \cdot \bar{f}_t(1) = x_0$, δηλαδή $f_t \cdot \bar{f}_t \in \pi_1(X, x_0)$.

$\square$

Ισοδύναμα μπορούμε να ορίσουμε την $\pi_1(X, x_0)$ θεωρώντας απεικονίσεις

$$f : (S^1, P) \to (X, x_0)$$

δηλαδή απεικονίσεις

$$f : S^1 \to X \text{ τέτοιες ώστε } f(P) = x_0$$

και ομοτοπίες της μορφής:

$$f_t : S^1 \to X \text{ με } f_t(P) = x_0, \forall t \in I$$

Η $\pi_1(X, x_0)$ ορίζεται τότε ως κλάσεις ομοτοπίας των απεικονίσεων $f : (S^1, P) \to (X, x_0)$.
Είναι φυσικό να ρωτήσει κανείς πως εξαρτάται η $\pi_1(X, x_0)$ από το x_0.
Ας θεωρήσουμε ένα τοπολογικό χώρο X ο οποίος είναι συνεκτικός κατά τόξα. Έστω $x_1 \in X$, h μονοπάτι από το x_0 στο x_1 και $\bar{h}$ μονοπάτι από το x_1 στο x_0 με $\bar{h}(s) = h(1-s), \forall s \in I$. Τότε, αν f βρόγχος με βάση το x_1, έχουμε ότι το μονοπάτι $h \cdot f \cdot \bar{h}$ είναι βρόγχος με βάση το x_0.

Πρόταση 3.3. *Με τα παραπάνω δεδομένα, η απεικόνιση*

$$\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(x, x_0)$$

που ορίζεται με :

$$\beta_h([f]) = [h \cdot f \cdot \bar{h}]$$

είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη.

1. Η β_h είναι καλά ορισμένη, καθώς αν f_t είναι ομοτοπία, τότε η $h \cdot f_t \cdot \bar{h}$ είναι ομοτοπία.
2. Η β_h είναι ομομορφισμός, καθώς αν $[f], [g] \in \pi_1(X, x_1)$ τότε

$$\beta_h([f \cdot g]) = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h}][h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$$

3. Τέλος, η $\beta_{\bar{h}}$ είναι η αντίστροφη της β_h.

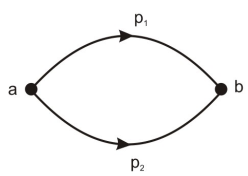
Από τα παραπάνω έπεται ότι η β_h είναι ισομορφισμός. □

Πόρισμα 3.1. *Αν ο X είναι συνεκτικός κατά τόξα, η $\pi_1(X, x_0)$ δεν εξαρτάται από το x_0. Στην περίπτωση αυτή αντί για $\pi_1(X, x_0)$ γράφουμε $\pi_1(X)$.*

Ορισμός 3.3. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα. Λέμε ότι ο X είναι* **απλά συνεκτικός** *αν $\pi_1(X) = \{e\}$.*

Πρόταση 3.4. *Ο X είναι απλά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε δύο σημεία του X υπάρχει μοναδική κλάση ομοτοπίας μονοπατιών που τα συνδέει.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι απλά συνεκτικός, δηλαδή $\pi_1(X) = \{e\}$. Έστω $a, b \in X$ και p_1, p_2 μονοπάτια που συνδέουν τα a, b.



Έχουμε ότι

$$p_1 \simeq p_1 \cdot \bar{p}_2 \cdot p_2 \simeq p_2$$

Άρα $[p_1] = [p_2]$ για οποιαδήποτε μονοπάτια p_1, p_2 που συνδέουν τα a, b.
Το αντίστροφο είναι προφανές. □

Παράδειγμα 3.1. *Αν X κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε $\pi_1(X) = \{e\}$.*

Απόδειξη. Έστω f βρόγχος στο X με $f(0) = f(1) = x_0$.
Ορίζουμε
$$f_t(x) = (1-t)f(x) + tx_0$$
Η f_t είναι ομοτοπία από το f στο x_0, καθώς $f_0 = f$ και $f_1 = x_0$.
Επομένως $[f] = [x_0]$, άρα $\pi_1(X) = \{e\}$. $\square$

3.2 Θεμελιώδης ομάδα του κύκλου

Ορισμός 3.4. *Έστω $p : E \to B$ απεικόνιση. Αν $f : X \to B$ απεικόνιση, μία* **ανύψωση** *της f στο E είναι μία απεικόνιση $\tilde{f} : X \to E$ τέτοια ώστε $p \circ \tilde{f} = f$*

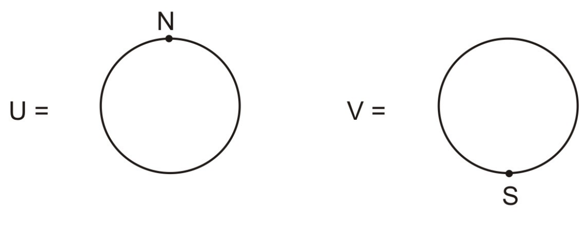
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Θεώρημα 3.1. *Η θεμελιώδης ομάδα του κύκλου είναι ισόμορφη με το $\mathbb{Z}$, δηλαδή*
$$\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε μερικά λήμματα.

Λήμμα 3.1. *Θεωρούμε την απεικόνιση:*
$$p : \mathbb{R} \to S^1 \text{ , όπου } p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$
Έστω $f : I \to S^1$ ένα μονοπάτι με $f(0) = x_0$ και $\tilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$.
Τότε υπάρχει μοναδική $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $p \circ \tilde{f} = f$ και $\tilde{f}(0) = \tilde{x_0}$.

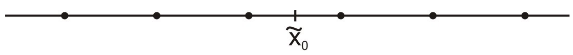
Απόδειξη. Έστω U, V ανοικτά, συνεκτικά γνήσια υποσύνολα της S^1, τέτοια ώστε $U \cup V = S^1$ και $(1,0), (-1,0) \in U \cap V$. Για παράδειγμα παίρνουμε $U = S^1 \setminus \{N\}$, $V = S^1 \setminus \{S\}$.



Το μονοπάτι f είναι ομοιόμορφα συνεχές, καθώς το I είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $x, y \in I$ με $d(x,y) < \frac{1}{n}$, ισχύει ότι $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{4}$. Επομένως είτε $f(x), f(y) \in U$ είτε $f(x), f(y) \in V$.
Θεωρούμε την παρακάτω διαμέριση του $[0,1]$:

$$0 = s_0 < s_1 = \frac{1}{n} < \cdots < s_{n-1} = \frac{n-1}{n} < s_n = 1$$

Τότε, αφού $s_i - s_{i-1} = \frac{1}{n}$, έχουμε ότι $f([s_0, s_1]) \subset U$ ή $f([s_0, s_1]) \subset V$. Ας πούμε ότι $f([s_0, s_1]) \subset U$. Έστω $\tilde{U}_0$ η συνεκτική συνιστώσα (το διάστημα) του $p^{-1}(U)$ που περιέχει το $\tilde{x_0}$.



Τότε η p περιορισμένη στο $\tilde{U}_0$, $p_{|_{\tilde{U}_0}}$, είναι ομοιομορφισμός και $f([s_0, s_1]) \subset U$. Άρα για την $\tilde{f}$ που ψάχνουμε θα ισχύει ότι $\tilde{f}([s_0, s_1]) \subset \tilde{U}_0$, αφού το $\tilde{f}([s_0, s_1])$ είναι ένα συνεκτικό σύνολο που περιέχεται στο $p^{-1}(U)$ και περιέχει το $f(s_0) = f(0) = \tilde{x}_0$. Έτσι, για $x \in [s_0, s_1]$ θα έχουμε ότι $\tilde{f}(x) \in \tilde{U}_0$. Αλλά στο $\tilde{U}_0$ η p είναι $1-1$, οπότε

$$p \circ \tilde{f}(x) = f(x) \iff \tilde{f}(x) = p^{-1}(f(x))$$

Ορίζουμε λοιπόν την $\tilde{f}$ αρχικά στο διάστημα $[s_0, s_1]$, ως $\tilde{f}(x) = p^{-1}(f(x))$. Παρατηρούμε ότι η f ορίζεται με μοναδικό τρόπο σ' αυτό το διάστημα.
Συνεχίζουμε επαγωγικά :
Έστω ότι έχουμε ορίσει την $\tilde{f}$ στο διάστημα $[0, s_k]$ και ότι $[s_k, s_{k+1}] \subset V$. Έστω $\tilde{V}_k$ η συνεκτική συνιστώσα του $p^{-1}(V)$ που περιέχει το $\tilde{f}_k(s_k)$, ορίζουμε $\tilde{f}(x) = p^{-1}(f(x))$ για κάθε $x \in [s_k, s_{k+1}]$, όπου η p είναι περιορισμένη στο $\tilde{V}_k$ και άρα $1-1$.
Από τον ορισμό της, η $\tilde{f}$ είναι συνεχής, ικανοποιεί τη σχέση $p \circ \tilde{f}(x) = f(x), \forall x \in [0,1]$ και είναι μοναδική. □

Λήμμα 3.2. *Έστω $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ και $F : I \times I \to S^1$ απεικόνιση με $F(0,0) = x_0$. Αν $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $p(\tilde{x}_0) = x_0$, τότε υπάρχει μοναδική ανύψωση $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\tilde{F}(0,0) = \tilde{x}_0$.*

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.1 έχουμε ότι η F επεκτείνεται με μοναδικό τρόπο στο $I \times \{0\}$. Θεωρούμε την ίδια κάλυψη της S^1 όπως στο λήμμα 3.1, $S^1 = U \cup V$. Θεωρούμε διαμερίσεις του I:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

$$0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$$

τέτοιες ώστε

$$F([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]) \subset U \text{ ή στο } V \text{ , για } i, j = 1, 2, \ldots, n$$

Η F είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει τέτοια διαμέριση.
Ορίζουμε την $\tilde{F}$ επαγωγικά :
Ας πούμε ότι $F([t_0, t_1] \times [s_0, s_1]) \subset U$. Το $\tilde{F}([t_0, t_1] \times [s_0, s_1])$ είναι συνεκτικό, άρα θα περιέχεται σε μία συνεκτική συνιστώσα $\tilde{U}_{00}$ του $p^{-1}(U)$. Η $\tilde{F}_{|[0,t_0]\times\{0\}}$ έχει ήδη οριστεί(από το λήμμα 3.1).
Ορίζουμε την $\tilde{F}$ στο $[t_0, t_1] \times [s_0, s_1]$ με

$$\tilde{F}(x, y) = p^{-1}(F(x, y))$$

όπου η p είναι περιορισμένη στο $\tilde{U}_{00}$.
Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο σε όλα τα διαστήματα $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ και τελικά ορίζουμε, τη ζητούμενη $\tilde{F}$. Παρατηρούμε ότι από τον τρόπο που ορίσαμε την $\tilde{F}$ έπεται ότι είναι μοναδική.

□

Μπορούμε τώρα να επαναδιατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα 3.1:

Θεώρημα 3.2. *Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$, με $\psi(n) = [\omega_n(s)]$, όπου $\omega_n : I \to S^1$ είναι βρόγχος στην S^1 με $\omega_n(s) = (\cos(2\pi ns), \sin(2\pi ns))$, $\forall s \in I$ (και σημείο στήριξης το $x_0 = (1, 0)$).*
Η απεικόνιση ψ είναι ισομορφισμός, άρα $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Απόδειξη.

1. Η ψ είναι επί.
   Έστω $\gamma \in \pi_1(S^1, x_0)$, τότε υπάρχει $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ ανύψωση του γ, με $\tilde{\gamma}(0) = 0, \tilde{\gamma}(1) = n$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ (διότι $p^{-1}(1, 0) = \mathbb{Z}$).
   Ισχυριζόμαστε ότι $\tilde{\gamma} \simeq \tilde{\omega}_n$ όπου $\tilde{\omega}_n(s) = ns$.
   Πράγματι, ορίζουμε
   $$\tilde{F}(s, t) = (1 - t)\tilde{\gamma}(s) + t\tilde{\omega}_n(s)$$
   Έχουμε $\tilde{F}(s, 0) = \tilde{\gamma}(s)$ και $\tilde{F}(s, 1) = \tilde{\omega}_n(s)$. Η απεικόνιση $p \circ \tilde{F}$ είναι ομοτοπία ανάμεσα στο γ και το ω_n, άρα $[\gamma] \in im(\psi)$.

2. Η ψ είναι ομομορφισμός.
   Για $n, m \in \mathbb{Z}$ έχουμε:
   $$\psi(n + m) = [\omega_{n+m}(s)] = [(\cos(2\pi(n + m)s), \sin(2\pi(n + m)s))]$$

Αλλά, αν τα n, m έχουν το ιδιο πρόσημο, το μονοπάτι $\omega_n(s) \cdot \omega_m(s)$ είναι αναπαραμέτρηση του $\omega_{n+m}(s)$, άρα $\psi(n) \cdot \psi(m) = \psi(n+m)$.
Αν τα n, m δεν έχουν το ίδιο πρόσημο, παρατηρούμε ότι $\psi(n) \cdot \psi(m) \simeq \psi(n+m)$ αφού τα $\omega_n(s) \cdot \omega_m(s)$ και $\omega_{n+m}(s)$ ανυψώνονται και τα δύο σε μονοπάτια στο $\mathbb{R}$ με άκρα τα $0, n+m$. Επομένως από το βήμα 1 της απόδειξης είναι ομοτοπικά.

3. Η ψ είναι $1-1$.
   Υπάρχει ανύψωση $\tilde{\omega}_n$ του ω_n στο $\mathbb{R}$:
   $$\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R} \ , \ \tilde{\omega}_n(s) = ns$$
   με $\tilde{x}_0 = 0$ και $p : \mathbb{R} \to S^1$, ως συνήθως.
   Έστω $\psi(n) = \psi(m)$, οπότε $\omega_n \simeq \omega_m$. Άρα υπάρχει ομοτοπία $F : I \times I \to S^1$ τέτοια ώστε
   $$F(s,0) = \omega_n(s) \text{ και } F(s,1) = \omega_m(s)$$
   Επιπλέον, για την F έχουμε ότι
   $$F(0,0) = (1,0) \text{ και } F(0,t) = F(1,t) = x_0, \forall t \in I$$
   Από το λήμμα 3.2 έχουμε ότι υπάρχει μοναδική ανύψωση της F, $\tilde{F} : I \times I \to \mathbb{R}$, με $\tilde{F}(0,0) = 0$.
   Τέλος έχουμε:
   $$\tilde{F}(s,0) = \tilde{\omega}_n(s) \ , \ \tilde{F}(s,1) = \tilde{\omega}_m(s)$$
   και
   $$\tilde{F}(0,t) = 0 \ , \ \tilde{F}(1,0) = n \ , \ \tilde{F}(1,1) = m$$
   Αλλά η $\tilde{F}(1,t)$ είναι σταθερή αφού $p \circ \tilde{F}(1,t) = F(1,t) = x_0$ και το I είναι συνεκτικό.
   Επομένως $\tilde{F}(1,0) = \tilde{F}(1,1) \Rightarrow n = m$ και άρα η ψ είναι $1-1$.

$\square$

Θεώρημα 3.3. *(**Brouwer**) Κάθε συνεχής απεικόνιση $h : D^2 \to D^2$ έχει σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x \in D^2$ τέτοιο ώστε $h(x) = x$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η h δεν έχει σταθερό σημείο.
Ορίζουμε μία συνεχή απεικόνιση $r : D^2 \to S^1$ τέτοια ώστε
$$r(x) = x \ , \text{ αν } x \in S^1$$
Για $x \in D^2$, ορίζουμε το $r(x)$ ως εξής: Επεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα $[h(x), x]$ σε ημιευθεία προς το x και ορίζουμε $r(x)$ να είναι το σημείο όπου αυτή η ημιευθεία τέμνει

την S^1. Η απεικόνιση r είναι συνεχής και ίση με την ταυτοτική στην S^1 επομένως είναι συστολή της D^2 στην S^1.
Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει συστολή του D^2 στην S^1. Έστω f_0 ένας βρόγχος στην S^1 με σημείο στήριξης το $x_0 \in S^1$, τότε το f_0 είναι και μονοπάτι στον D^2, άρα ομοτοπικό, στον D^2, με το σταθερό μονοπάτι. Έχουμε λοιπόν, στον D^2, την ομοτοπία

$$f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tx_0$$

από το μονοπάτι f_0 στο σταθερό μονοπάτι x_0. Η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη, καθώς το D^2 είναι κυρτό σύνολο.
Παρατηρούμε ότι, αφού η r είναι συνεχής και $r_{|_{S^1}} = id_{S^1}$, η $r \circ f_t$ είναι ομοτοπία από το f_0 στο σταθερό μονοπάτι στην S^1. Οπότε $\pi_1(S^1) = \{e\}$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Θεώρημα 3.4. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας) *Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $p(z)$ με συντελεστές από το $\mathbb{C}$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Έστω $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Υποθέτουμε ότι $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, οπότε ισχύει ότι $|p(re^{2\pi i\theta})| \neq 0$. Θέτουμε :

$$\bar{f}_r(\theta) = \frac{p(re^{2\pi i\theta})}{|p(re^{2\pi i\theta})|} \text{ , για } \theta \in [0,1]$$

τότε

$$\bar{f}_r(0) = \bar{f}_r(1) = \frac{p(r)}{|p(r)|}$$

Αλλάζουμε λίγο την $\bar{f}_r$ ώστε η τιμή της στο 0 και στο 1 να είναι 1, δηλαδή θεωρούμε την:

$$f_r(\theta) = \frac{p(re^{2\pi i\theta})}{|p(re^{2\pi i\theta})|}\frac{|p(r)|}{p(r)} \text{ , για } \theta \in [0,1] \qquad (*)$$

Η f_r είναι βρόγχος στην S^1 και έχουμε

$$f_r(0) = f_r(1) = 1 \text{ , } f_0(\theta) = 1$$

Βλέπουμε την f_r σαν ομοτοπία από το $f_0 = 1$ στο f_r.
Για αρκετά μεγάλο r (π.χ. αν $r > 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$), αν $|z| = r$, έχουμε :

$$\begin{aligned}
|z|^n &= r|z|^{n-1} \\
&> (1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|)|z|^{n-1} \\
&> 1|z|^{n-1} + |a_0||z|^{n-1} + |a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \\
&> |a_0||z|^{n-1} + |a_1||z|^{n-1} + \cdots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \\
&> |a_0||z| + |a_1||z| + \cdots + |a_{n-1}||z|^{n-1} \\
&> |a_0 z + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}|
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$|z|^n > |a_0 z + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}|$$

Άρα για $0 \leqslant t \leqslant 1$ το πολυώνυμο $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0)$ δεν έχει ρίζες στον κύκλο $|z| = r$.
Η p_t είναι ομοτοπία από το $p_1 = p$ στο $p_0 = z^n = e^{2\pi i\theta n}$. Αντικαθιστώντας στην $(*)$ το p με p_t και κρατώντας το r σταθερό ενώ το t μεταβάλλεται στο $[0,1]$ έχουμε ότι $f_r(\theta) \simeq e^{2\pi i\theta n}$. Δηλαδή $[0] = [f_0] = [f_r] = [e^{2\pi i\theta n}] \in \pi_1(S^1)$, άτοπο. □

Πρόταση 3.5. *Αν οι X, Y είναι συνεκτικοί κατά τόξα, τότε η $\pi_1(X \times Y)$ είναι ισόμορφη με το γινόμενο $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.*

Απόδειξη. Αν $f(s)$ βρόγχος στον $X \times Y$ με βάση το σημείο (x_0, y_0), τότε $f(s) = (x(s), y(s))$ όπου $x(s), y(s)$ βρόγχοι στους X, Y με σημεία στήριξης τα x_0, y_0 αντίστοιχα. Ορίζουμε :

$$\varphi : \pi_1(X \times Y) \to \pi_1(X) \times \pi_1(Y) \text{ , με } \varphi([f(s)]) = ([x(s)], [y(s)])$$

Η φ είναι καλά ορισμένη, αν ο βρόγχος $f_0(s) = (x_0(s), y_0(s))$ είναι ομοτοπικός με ένα βρόγχο $f_1(s) = (x_1(s), y_1(s))$ μέσω μίας ομοτοπίας f_t τότε η f_t δίνει ομοτοπίες x_t, y_t ανάμεσα στους βρόγχους x_0, x_1 και y_0, y_1 αντίστοιχα.
Επίσης η φ είναι ομομορφισμός.
Θα δείξουμε ότι η φ είναι $1-1$:
Έστω $f_1(s) = (x_1(s), y_1(s)), f_2(s) = (x_2(s), y_2(s))$ βρόγχοι στο $X \times Y$ και $\varphi([f_1]) = \varphi([f_2])$. Έχουμε ομοτοπίες x_t, y_t από το x_1 στο x_2 και από το y_1 στο y_2, αντίστοιχα. Αλλά τότε η (x_t, y_t) είναι ομοτοπία από την f_1 στην f_2, άρα $[f_1] = [f_2]$ και η φ είναι $1-1$.
Τέλος, θα δείξουμε ότι η φ είναι επί :
Αν $x(s), y(s)$ βρόγχοι στους X, Y με σημεία στήριξης τα x_0, y_0 αντίστοιχα, τότε το $f(s) = (x(s), y(s))$ είναι βρόγχος στο $X \times Y$ με βάση το σημείο (x_0, y_0) και $\varphi([f(s)]) = ([x(s)], [y(s)])$.
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η φ είναι ισομορφισμός. □

Πόρισμα 3.2. *Αφού $T^2 = S^1 \times S^1$ έχουμε ότι $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Γενικότερα για τον n-διάστατο torus $T^n = S^1 \times S^1 \ldots S^1$, έχουμε $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$.*

3.3 Επαγόμενοι Ομομορφισμοί

Έστω απεικόνιση $\varphi : X \to Y$ τέτοια ώστε $\varphi(x_0) = y_0$ (συμβολισμός $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$). Τότε ο φ επάγει έναν ομομορφισμό :

$$\varphi_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0) \text{ , με } \varphi_\star([f]) = [\varphi \circ f]$$

Απόδειξη.

1. Ο $\varphi_\star$ είναι καλά ορισμένος.
   Πράγματι, αν $[f_0] = [f_1]$ στην $\pi_1(X)$, τότε υπάρχει ομοτοπία f_t από το f_0 στο f_1. Η σύνθεση $\varphi \circ f_t$ είναι ομοτοπία από το $\varphi \circ f_0$ στο $\varphi \circ f_1$, δηλαδή $\varphi_\star([f_0]) = \varphi_\star([f_1])$.

2. Η $\varphi_\star$ είναι ομομορφισμός.
   Προφανές, αφού $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.

□

Αν $id : (X, x_0) \to (X, x_0)$ η ταυτοτική απεικόνιση, τότε προφανώς ο επαγόμενος ομομορφισμός $id_\star$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση στην $\pi_1(X, x_0)$.

Παρατήρηση 3.1. *Αν έχουμε τις απεικονίσεις $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, τότε*

$$(\psi \circ \varphi)_\star = \psi_\star \circ \varphi_\star$$

Πράγματι αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, έχουμε

$$(\psi \circ \varphi)_\star([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi(\varphi(f))] = \psi_\star([\varphi(f)]) = \psi_\star(\varphi_\star([f])) = \psi_\star \circ \varphi_\star([f])$$

Πρόταση 3.6. *Αν $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ομοιομορφισμός, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός $\varphi_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Αφού ο φ είναι ομοιομορφισμός, ορίζεται η αντίστροφη απεικόνιση $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Οπότε

$$\psi_\star \circ \varphi_\star = (\psi \circ \varphi)_\star = id_\star = id_{\pi_1(X, x_0)}$$

και

$$\varphi_\star \circ \psi_\star = (\varphi \circ \psi)_\star = id_\star = id_{\pi_1(Y, y_0)}$$

Άρα ο $\varphi_\star$ είναι $1-1$ και επί, δηλαδή ισομορφισμός. □

Από την προηγούμενη πρόταση συμπεραίνουμε ότι η Θεμελιώδης ομάδα είναι αναλλοίωτη από ομοιομορφισμούς.

Πρόταση 3.7. *Για $n \geqslant 2$ ισχύει ότι $\pi_1(S^n) = 0$.*

Απόδειξη. Έστω $f \in \pi_1(S^n, x_0)$. Αν η f δεν είναι επί, δηλαδή υπάρχει $x \in S^n$ τέτοιο ώστε $x \notin im(f)$, τότε $im(f) \subset S^n \setminus \{x\}$. Αλλά $S^n \setminus \{x\} \sim \mathbb{R}^n$ και $\pi_1(\mathbb{R}^n) = \{e\}$, επομένως $f \simeq x_0$ ($[f] = 1$), άρα $\pi_1(S^n) = \{e\}$.
Γενικά, έστω $x \in S^n$. Θεωρούμε μία ανοικτή μπάλα ακτίνας r γύρω από το x, $\mathring{B}_r(x)$ και

θεωρούμε την τομή $f([0,1]) \cap \mathring{B}_r(x)$. Το σύνολο $f^{-1}(\mathring{B}_r(x))$ είναι ανοικτό, άρα είναι ένωση ξένων ανοιχτών διαστημάτων. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, το $f^{-1}(x)$ είναι συμπαγές επομένως περιέχεται στην ένωση πεπερασμένου πλήθους διαστημάτων του $f^{-1}(\mathring{B}_r(x))$. Επομένως υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $\mathring{I}_1, \mathring{I}_2, \dots, \mathring{I}_k$ τέτοια ώστε $x \in f(I_k)$. Έστω a_k, b_k τα άκρα του I_k. Θεωρούμε μονοπάτι g_k πάνω στη σφαίρα $\partial B_r(x)$, από το a_k στο b_k. Τα μονοπάτια $f_{|_{I_k}}$ και g_k είναι ομοτοπικά αφού το B_r είναι απλά συνεκτικό. Μετά από πεπερασμένες ομοτοπίες έχουμε ότι :

$$f \simeq g \text{ , όπου } x \notin g(I)$$

Έτσι αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και έχουμε ότι $f \simeq x_0$. □

Πόρισμα 3.3. *Ο torus, T^2, δεν είναι ομοιομορφικός με την σφαίρα S^2.*

Παρατήρηση 3.2. *Ισχύει ότι $\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \sim S^{n-1} \times \mathbb{R}$*

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, τότε $x = tr_x$, για $t \in (0, \infty)$ και $|r_x| = 1$.
Ορίζουμε την απεικόνιση :

$$\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1} \times (0, \infty) \text{ , με } \varphi(x) = (r_x, t)$$

Η φ είναι ομοιομορφισμός και $S^{n-1} \times (0, \infty) \sim S^{n-1} \times \mathbb{R}$, άρα

$$\mathbb{R}^n \setminus \{x\} \sim S^{n-1} \times (0, \infty) \sim S^{n-1} \times \mathbb{R}$$

□

Πόρισμα 3.4.

$$\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \pi_1(S^{n-1}) \times \pi_1(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & , \text{ αν } n = 2 \\ 0 & , \text{ αν } n > 2 \end{cases}$$

Πόρισμα 3.5. *Το $\mathbb{R}^2$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$ αν $n \neq 2$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ομοιομορφισμός.
Αν $n = 1$, τότε το $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ είναι συνεκτικό αλλά το $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ δεν είναι, άτοπο.
Αν $n > 2$, τότε καταλήγουμε πάλι σε άτοπο, διότι :

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \mathbb{Z} \\ \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq \pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

□

Πρόταση 3.8. *Αν A συστολή του X, τότε η απεικόνιση*

$$i_\star : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

που επάγεται από την εμφύτευση $i : A \hookrightarrow X$ είναι μονομορφισμός.
Αν A συστολή παραμόρφωσης του X, τότε η απεικόνιση $i_\star$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $r : X \to A$ συστολή.
Τότε έχουμε ότι $r \circ i = id_A$, άρα $r_\star \circ i_\star = id_\star$. συνεπώς η $i_\star$ είναι $1-1$.
Έστω r_t συστολή παραμόρφωσης του X στο A. Τότε, αν $f \in \pi_1(X, x_0)$, η $r_t(f)$ είναι ομοτοπία από το f στο $r_1(f) \in A$, δηλαδή κάθε βρόγχος στο X είναι ομοτοπικός με έναν βρόγχο στο A. Άρα η $i_\star$ είναι επί.
Αφού το A είναι συστολή παραμόρφωσης του X, είναι και συστολή του X, άρα η $i_\star$ είναι $1-1$. Επομένως η $i_\star$ είναι ισομορφισμός. □

Πόρισμα 3.6. *Η S^1 δεν είναι συστολή του D^2.*

Απόδειξη. Αν η S^1 είναι συστολή του D^2, τότε η απεικόνιση $i_\star \pi_1(S^1) \to \pi_1(D^2)$ είναι $1-1$, άτοπο καθώς $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ ενώ $\pi_1(D^2) = 0$. □

Ορισμός 3.5. *Έστω G ομάδα και $H < G$. Λέμε ότι η H είναι συστολή της G, αν υπάρχει ομομορφισμός $\varrho : G \to H$ τέτοιος ώστε $\varrho(h) = h \ , \forall h \in H$.*

Παρατήρηση 3.3. *Αν $\varphi_t : X \to Y$ ομοτοπία από την φ_0 στην φ_1 τέτοια ώστε $\varphi_t(x_0) = y_0 \ , \forall t \in I$, τότε $\varphi_{0\star} = \varphi_{1\star}$.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν $[f] \in \pi_1(X, x_0)$, οι βρόγχοι $\varphi_0(f), \varphi_1(f)$ είναι ομοτοπικοί με την ομοτοπία $\varphi_t(f)$. Άρα $[\varphi_0(f)] = [\varphi_1(f)] \Rightarrow \varphi_{0\star}(f) = \varphi_{1\star}(f)$. □

Πρόταση 3.9. *Αν $\varphi : X \to Y$ ομοτοπική ισοδυναμία, τότε, για κάθε $x_0 \in X$, η απεικόνιση $\varphi_\star : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ είναι ισομορφισμός.*

Για την απόδειξη της πρότασης αυτής θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.3. *Αν $\varphi_t : X \to Y$ ομοτοπία και $h(t) = \varphi_t(x_0)$, τότε $\varphi_{0\star} = \beta_h \circ \varphi_{1\star}$.*

Απόδειξη. Έστω $h_t = h_{|[0,t]}$, δηλαδή $h_t(s) = h(ts)$, $s \in [0, 1]$ και $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Ορίζουμε ομοτοπία από το $\varphi_0(f)$ στο $h\varphi_1(f)\bar{h}$:

$$\psi_t(f) = h_t \cdot \varphi_t(f) \cdot \bar{h}_t = \beta_{h_t}(\varphi_t(f))$$

Οπότε για κάθε $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ έχουμε :

$$[\varphi_0(f)] = [h \cdot \varphi_1(f) \cdot \bar{h}] \Leftrightarrow$$

$$[\varphi_0(f)] = \beta_h([\varphi_1(f)]) \Leftrightarrow$$

$$\varphi_{0\star}([f]) = \beta_h(\varphi_{1\star}([f]))$$

Άρα $\varphi_{0\star} = \beta_h \circ \varphi_{1\star}$. □

Απόδειξη Πρότασης 3.9
Έστω $\psi : Y \to X$ ομοτοπική αντίστροφη της φ.
Έχουμε:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_\star} \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \xrightarrow{\psi_\star} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0))$$

και $\varphi \circ \psi \simeq id$ άρα από το λήμμα 3.3 :

$$\psi_\star \circ \varphi_\star = \beta_h \circ id : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, \psi(\varphi(x_0)))$$

Επομένως η $\varphi_\star$ είναι $1-1$.
Όμοια, έχουμε ότι η $\varphi_\star \circ \psi_\star : \pi_1(Y, y_1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Y, y_2)$ είναι ισομορφισμός, άρα η $\varphi_\star$ είναι επί.
Επομένως η $\varphi_\star$ είναι ισομορφισμός. □

3.4 Ελεύθερες Ομάδες

Ορισμός 3.6. *Έστω A σύνολο. Μία* **λέξη** *w στο A είναι μία πεπερασμένη ακολουθία:*

$$w = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ , με } a_i \in A \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Γράφουμε απλούστερα:

$$w = a_1 a_2 \dots a_n$$

Με $W(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των λέξεων στο A.
Θεωρούμε το σύνολο $A \cup A^{-1} = \{a^{\pm 1} \mid a_i \in A\}$.
Μία **ανηγμένη λέξη** *στο $A \cup A^{-1}$ είναι μία λέξη που δεν περιέχει υπολέξεις της μορφής $a_i a_i^{-1}, a_i^{-1} a_i$.*

Ελεύθερη Ομάδα με δύο γεννήτορες
Ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες είναι η ομάδα :

$$\mathbb{F}_2 = \langle a, b\rangle = \{w \mid w \text{ ανηγμένη λέξη στα } a^{\pm 1}, b^{\pm 1}\}$$

Όπου η πράξη ορίζεται ως εξής : αν $w, v \in \mathbb{F}_2$, τότε το γινόμενο $w \cdot v$ είναι η ανηγμένη λέξη που παίρνουμε από την λέξη wv με διαδοχικές απλοποιήσεις.
Για παράδειγμα, αν $w = aba^{-1}b, v = b^{-1}a^2b^{-1}$, τότε $w \cdot v = abab^{-1}$.
Το ουδέτερο στοιχείο της $\mathbb{F}_2$ είναι η κενή λέξη, την οποία συμβολίζουμε με 1.
Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο. Μένει να δείξουμε ότι η πράξη είναι προσεταιριστική. Αυτό θα το δείξουμε στην επόμενη παράγραφο.

Ανάλογα ορίζουμε και την ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες, $\mathbb{F}_n = \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$.

3.5 Ελεύθερο γινόμενο ομάδων

Ορισμός 3.7. *Έστω $(G_a)_{a\in I}$ οικογένεια ομάδων. Μία λέξη $g_1g_2\dots g_n$ όπου $g_i \in G_{a_i}$ λέγεται ανηγμένη αν τα g_i, g_{i+1} ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες και $g_i \neq 1$, $\forall i$.*
Θεωρούμε το σύνολο:

$$\mathop{\star}_{a\in I} G_a = \{w \mid w \text{ ανηγμένη λέξη στο } \bigsqcup_{a\in I} G_a\}$$

Το σύνολο $\mathop{\star}_{a\in I} G_a$ εφοδιασμένο με τον πολλαπλασιασμό λέξεων είναι ομάδα. Πράγματι ορίζουμε:

1. **Πολλαπλασιασμός.**
Αν $w = g_1g_2\dots g_n, v = h_1h_2\dots h_k \in \mathop{\star}_{a\in I} G_a$, τότε το γινόμενο wv είναι η ανηγμένη λέξη που προκύπτει από την λέξη $g_1g_2\dots g_nh_1h_2\dots h_k$ με διαδοχικές απλοποιήσεις (Αν τα g_n, h_1 δεν ανήκουν στην ίδια ομάδα, τότε η λέξη είναι ανηγμένη αλλιώς αντικαθιστούμε το γινόμενό τους με ένα στοιχείο και συνεχίζουμε έτσι).

2. **Ουδέτερο.**
Ουδέτερο στοιχείο της $\mathop{\star}_{a\in I} G_a$ είναι η κενή λέξη, την οποία συμβολίζουμε με 1.

3. **Αντίστροφο.**
Αν $g_1g_2\dots g_n \in \mathop{\star}_{a\in I} G_a$, το αντίστροφό του είναι το στοιχείο $(g_1g_2\dots g_n)^{-1} = g_n^{-1}g_{n-1}^{-1}\cdots g_1^{-1}$

Ορισμός 3.8. *Το σύνολο* $\mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a$ *με τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε παραπάνω είναι ομάδα και ονομάζεται* **ελεύθερο γινόμενο** *των* $(G_a)_{a\in I}$.

Απόδειξη. Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, δηλαδή ότι αν $w, u, v \in \mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a$, τότε $(wv)u = w(vu)$.
Έστω W το σύνολο των ανηγμένων λέξεων. Αν $g \in G_a$, ορίζουμε $L_g : W \to W$ ως εξής:
Αν $w = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in \mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a$, τότε

$$L_g(w) = gw = g(g_1, g_2 \dots, g_n) = \begin{cases} (g, g_1, \dots, g_n) & , \text{αν } g \notin G_{a_1} \\ (gg_1, g_2, \dots, g_n) & , \text{αν } g \in G_{a_1} \text{ και } gg_1 \neq 1 \\ (g_2, g_3, \dots, g_n) & , \text{αν } g \in G_{a_1} \text{ και } gg_1 = 1 \end{cases}$$

Αν $g, g^{'} \in G_a$, τότε $L_{gg^{'}} = L_g \circ L_{g^{'}}$ αφού ο πολλαπλασιασμός στην G_a είναι προσεταιριστικός. Επομένως $L_g \circ L_{g^{-1}} = id_W$, άρα η L_g είναι $1-1$ και επί, δηλαδή $L_g \in Perm(W)$ (μετάθεση του W).
Γενικά, αν $(g_1, g_2, \dots, g_n) \in W$, τότε ορίζουμε

$$L_{(g_1, g_2, \dots, g_n)} = L_{g_1} \circ L_{g_2} \circ \cdots \circ L_{g_n}$$

και η απεικόνιση

$$L : W \to Perm(W) \text{ , με } L(w) = L_w$$

είναι $1-1$ αφού $L_w(1) = w$. Επίσης ισχύει ότι $L_{wv} = L_w \circ L_v$, αφού $L_{gg^{'}} = L_g \circ L_{g^{'}}$, $\forall g, g^{'} \in G_a$.
Επομένως ο πολλαπλασιασμός στο W είναι προσεταιριστικός, καθώς αντιστοιχεί σε σύνθεση μεταθέσεων στην $Perm(W)$, η οποία είναι προσεταιριστική. □

Πρόταση 3.10. *Έστω* $(G_a)_{a\in I}$ *οικογένεια ομάδων και ομομορφισμοί* $\varphi_a : G_a \to G$, *τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός* $\varphi : \mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a \to G$ *που κάνει τα παρακάτω διαγράμματα μεταθετικά :*

$$\begin{tikzcd} G_a \arrow[rr, "i_a"] \arrow[dr, "\varphi_a"'] & & \mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a \arrow[dl, "\varphi"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αν $w = g_1 g_2 \dots g_n$, ορίζουμε $\varphi(w) = \varphi_{a_1}(g_1)\varphi_{a_2}(g_2)\dots\varphi_{a_n}(g_n)$ $(g_i \in G_{a_i})$. Η φ είναι ομομορφισμός από την $\mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a$ στην G. □

Αν $I = \{1, 2\}$, συμβολίζουμε το ελεύθερο γινόμενο $G = \mathop{\star}\limits_{a\in I} G_a$ με $G_1 \star G_2$. Για παράδειγμα η ελεύθερη ομάδα με δύο γεννήτορες είναι $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$.

Ορισμός 3.9. *Έστω S σύνολο. Θεωρούμε τις κυκλικές ομάδες $\langle s_i \rangle$ για κάθε $s_i \in S$ και ορίζουμε την ελεύθερη ομάδα με βάση το S ως $\mathbb{F}(S) = \underset{s_i \in S}{\star} \langle s_i \rangle$.*
Το σύνολο S ονομάζεται **βάση** *της $\mathbb{F}(S)$, ο πληθικός αριθμός του S, $Card(S)$ ονομάζεται* **βαθμός** *(rank) της $\mathbb{F}(S)$. Αν $Card(S) = n$, αντί για $\mathbb{F}(S)$ γράφουμε $\mathbb{F}_n$.*

Πρόταση 3.11. *Αν $\varphi : S \to G$ απεικόνιση, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός*

$$\bar{\varphi} : \mathbb{F}(S) \to G$$

τέτοιος ώστε $\bar{\varphi}(s) = \varphi(s)$, $\forall s \in S$

Απόδειξη. Μπορούμε να επεκτείνουμε τη φ σε ομομορφισμούς $\varphi_s : \langle s \rangle \to \langle \varphi(s) \rangle$, οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη πρόταση. □

Παρατήρηση 3.4. *Ισχύει ότι $\mathbb{F}(S_1) \simeq \mathbb{F}(S_2)$ αν και μόνο αν $|S_1| = |S_2|$*

Πράγματι αν $|S_1| \neq |S_2|$ τότε οι αβελιανοποιήσεις των $\mathbb{F}(S_1), \mathbb{F}(S_2)$ δεν είναι ισόμορφες.

Παρατήρηση 3.5. *Κάθε ομάδα είναι ισόμορφη με πηλίκο ελεύθερης ομάδας.*

Απόδειξη. Έστω G ομάδα. Θεωρούμε την $\mathbb{F}(G)$ και $\varphi : G \to G$, με $\varphi(g) = g, \forall g \in G$. Τότε επάγεται επιμορφισμός $\bar{\varphi} : \mathbb{F}(G) \to G$ και από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμών έχουμε :

$$G \simeq \frac{\mathbb{F}(G)}{\ker(\bar{\varphi})}$$

□

Ορισμός 3.10. *Μία ομάδα λέγεται* **πεπερασμένα παραγόμενη** *αν είναι ισόμορφη με πηλίκο της $\mathbb{F}_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.*

Ορισμός 3.11. *Η παράσταση $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \mid r_1, r_2, \ldots, r_l, \ldots \rangle$, όπου τα r_i είναι λέξεις στα $a_i^{\pm 1}$ για $i = 1, 2, \ldots, k$, είναι μία παράσταση της G αν $G \simeq \mathbb{F}(a_1, a_2, \ldots, a_k)/N$, όπου N είναι η μικρότερη κανονική υποομάδα της $\mathbb{F}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ που περιέχει τα $\{r_1, r_2, \ldots, r_l, \ldots\}$.*
Η N συμβολίζεται με $N = \langle\langle r_1, r_2, \ldots, r_l, \ldots \rangle\rangle$ και τα r_i λέγονται σχέσεις της G.
Παρατηρούμε ότι $n \in N \iff n = \prod_{i=1}^{k} u_i r_i^{\pm 1} u_i^{-1}$.

Ορισμός 3.12. *Αν $G = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \mid r_1, r_2, \ldots, r_l \rangle$, τότε η G λέγεται* **πεπερασμένα σχετιζόμενη** *ή* **πεπερασμένα παριστώμενη***.*

Παράδειγμα 3.2. 1. $G = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle = \langle a, b \mid ab = ba \rangle \simeq \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Απόδειξη: Ορίζουμε $\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}^2$ *με* $\varphi(a) = (1,0), \varphi(b) = (0,1)$. *Έστω* $N = \langle\langle aba^{-1}b^{-1} \rangle\rangle$. *Τότε* $aba^{-1}b^{-1} \in \ker\varphi$ *άρα* $N \subset \ker\varphi$.
Στην $\mathbb{F}_2/N$ *ισχύει* $aba^{-1}b^{-1} = 1 \Rightarrow ab = ba$.
Αν $w = a^{k_1}b^{l_1}a^{k_2}b^{l_2}\dots a^{k_n}b^{l_n} \in \ker\varphi$, *τότε* $k_1 + k_2 + \dots k_n = l_1 + l_2 \dots l_n = 0$, *επομένως* $w = 1$ *στην* $\mathbb{F}_2/N$, *δηλαδή* $w \in N$. *Επομένως* $\ker\varphi \subset N$.

2. *Αν μία ομάδα* G *είναι πεπερασμένη, τότε είναι πεπερασμένα σχετιζόμενη, μία παράστασή της είναι :*

$$G = \langle x_i \in G \mid x_i x_j = x_k,\ \forall x_i, x_j \in G \rangle$$

όπου οι σχέσεις $x_i x_j = x_k,\ \forall x_i, x_j \in G$ *είναι ο πίνακας πολλαπλασιασμού της* G.

3. *Αν* $G = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_2 x_1 x_2^{-1} = x_1^2, x_3 x_2 x_3^{-1} = x_2^2, x_1 x_3 x_1^{-1} = x_3^2 \rangle$, *τότε η* G *είναι η τετριμένη ομάδα.*

Ορισμός 3.13. *Αν* $N \triangleleft G$ *και* $A \subset N$ *τέτοια ώστε κάθε στοιχείο του* N *να γράφεται σαν γινόμενο συζυγών του* A, *τότε λέμε ότι το* A **παράγει κανονικά** *την* N *και γράφουμε* $N = \langle\langle A \rangle\rangle$.

3.6 Θεώρημα van Kampen

Έστω ότι ο χώρος X γράφεται $X = A \cup B$ όπου τα A, B είναι ανοικτά, συνεκτικά κατά τόξα και η τομή τους, $A \cap B$, είναι μη κενή και συνεκτική κατά τόξα.
Οι εμφυτεύσεις $A \hookrightarrow X, B \hookrightarrow X$ επάγουν ομομορφισμούς $j_A : \pi_1(A) \to \pi_1(X)$, $j_B : \pi_1(B) \to \pi_1(X)$.
Επομένως, έχουμε έναν ομομορφισμό :

$$\varphi : \pi_1(A) \star \pi_1(B) \to \pi_1(X)$$

με $\varphi|_{\pi_1(A)} = j_A, \varphi|_{\pi_1(B)} = j_B$
Ποιός είναι ο πυρήνας του φ;
Έστω

$$i_{AB} : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(A)$$
$$i_{BA} : \pi_1(A \cap B) \to \pi_1(B)$$

οι επαγόμενοι μορφισμοί των εμφυτεύσεων $A \cap B \hookrightarrow A$, $A \cap B \hookrightarrow B$ αντίστοιχα. Έχουμε ότι $j_A \circ i_{AB} = j_B \circ i_{BA}$ αφου οι $j_A \circ i_{AB}, j_B \circ i_{BA}$ επάγονται από την εμφύτευση $A \cap B \hookrightarrow X$.
Επομένως, αν $w \in \pi_1(A \cap B)$, τότε :

$$\varphi(i_{AB}(w)) = \varphi(i_{BA}(w))$$

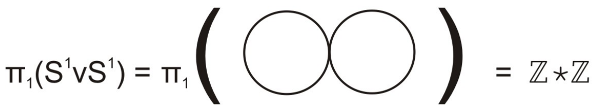
διότι $\varphi|_{\pi_1(A)} = 1_A$, $\varphi|_{\pi_1(B)} = 1_B$.
Δηλαδή, $i_{AB}(w) \circ i_{BA}(w)^{-1} \in \ker \varphi$.

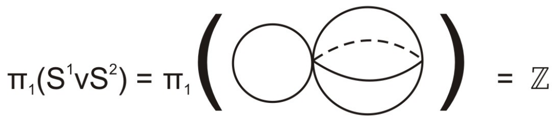
Θεώρημα van Kampen. *Έστω ότι $X = A \cup B$, με $A, B, A \cap B$ ανοικτά, συνεκτικά κατά τόξα. Τότε η απεικόνιση :*

$$\varphi : \pi_1(A) \star \pi_1(B) \to \pi_1(X)$$

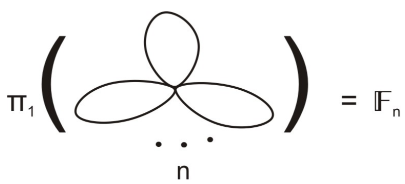
είναι επιμορφισμός και ο πυρήνας του $N = \ker \varphi$ παράγεται κανονικά από τα στοιχεία της μορφής $i_{AB}(w) i_{BA}(w)^{-1}$, όπου $w \in \pi_1(A \cap B)$.
Έχουμε δηλαδή $\pi_1(X) \simeq \pi_1(A) \star \pi_1(B)/N$.

Παράδειγμα 3.3. *Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη δίνουμε μερικά παραδείγματα εφαρμογών του Θεωρήματος van-Kampen.*





Για το μπουκέτο από n το πλήθος κύκλους, αποδεικνύεται επαγωγικά ότι:



Απόδειξη του θεωρήματος van Kampen.
Διαλέγουμε ένα σημείο βάσης $x_0 \in A \cap B$. Θα δείξουμε πρώτα ότι ο ομομορφισμός $\varphi : \pi_1(A) \star \pi_1(B) \to \pi_1(X)$ είναι επί.

Έστω $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο βρόγχος f είναι ομοτοπικός με ένα γινόμενο βρόγχων $f \simeq a_1 b_1 ... a_k b_k$ όπου $a_i \in \pi_1(A, x_0)$, $b_i \in \pi_1(B, x_0)$. Βλέπουμε τον f σαν απεικόνιση $f : I \to X$ με $f(0) = f(1) = x_0$.

Αφού τα A, B είναι ανοιχτά $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ είναι ανοιχτή κάλυψη του I. Από το λήμμα *Lebesgue* υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$ του I τέτοια ώστε:

1) $f([t_i, t_{i+1}]) \subset A$ ή $f([t_i, t_{i+1}]) \subset B$ για κάθε i.

2) Δύο διαδοχικά διαστήματα δεν περιέχονται στο ίδιο σύνολο.

Από τη δεύτερη ιδιότητα έπεται ότι $x_i = f(t_i) \in A \cap B$ για κάθε i.

Διαλέγουμε μονοπάτια $p_1, ..., p_{k-1}$ από το x_0 στα $x_1, .., x_{k-1}$ τέτοια ώστε αν $x_i \in A(B)$ τότε $p_i \subset A(B)$.. Έχουμε τότε ότι

$$f \simeq (f([0, t_1]) \cdot p_1^{-1}) \cdot (p_1 \cdot f([t_1, t_2]) \cdot p_2^{-1}) \cdot ....(p_{k-1} \cdot f([t_{k-1}, t_k]))$$

Παρατηρούμε ότι οι βρόγχοι

$$g_1 = f([0, t_1]) \cdot p_1^{-1},\ g_2 = p_1 \cdot f([t_1, t_2]) \cdot p_2^{-1},\ ..., g_k = p_{k-1} \cdot f([t_{k-1}, t_k])$$

ανήκουν όλοι είτε στην $\pi_1(A, x_0)$ είτε στην $\pi_1(B, x_0)$. Επομένως η φ είναι επί.

Υπολογίζουμε τώρα τον πυρήνα της φ. Θεωρούμε ένα στοιχείο του $ker(\varphi)$. Έχουμε δηλαδή $[g_1] \cdot [g_2]... \cdot [g_n] \in \pi_1(A, x_0) \star \pi_1(B, x_0)$ που ανήκει στο πυρήνα. Τότε το μονοπάτι

$$f = g_1 \cdot g_2... \cdot g_n$$

είναι ομοτοπικό με το σταθερό μονοπάτι στον X. Έστω λοιπόν ομοτοπία

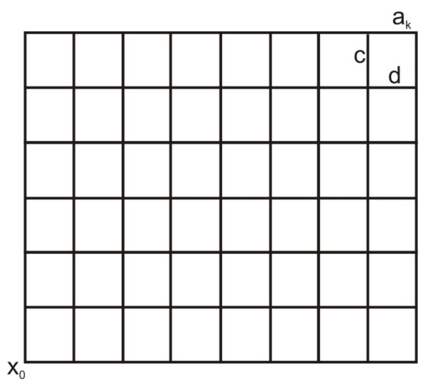
$$F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$$

με

$$F(0, t) = F(1, t) = x_0,\ \forall t \in [0, 1]$$

$$F(s, 1) = f(s),\ \forall s \in [0, 1]$$

$$F(s, 0) = x_0,\ \forall s \in [0, 1]$$



Αφού τα A, B είναι ανοιχτά έχουμε μία ανοιχτή κάλυψη του $I \times I$ από τα $F^{-1}(A), F^{-1}(B)$. Από το λήμμα *Lebesgue* υπάρχει διαμέριση του $I \times I$,

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_k = 1,\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_k = 1$$

τέτοια ώστε για κάθε i, j το

$$F([s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}])$$

περιέχεται είτε στο A είτε στο B. Μπορώ επίσης να υποθέσω (εκλεπτύνοντας εν ανάγκη την αρχική διαμέριση) ότι ισχύει το εξής: Αν $g_i = f|_{[a,b]}$ τότε $a, b \in \{s_0, s_1, ..., s_k\}$.

Για κάθε σημείο $(s_i, t_j) \in I \times I$ διαλέγουμε ένα μονοπάτι p_{ij} από το x_0 στο $F(s_i, t_j)$ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

Αν $F(s_i, t_j) \in A$ τότε $p_{ij} \subset A$

Αν $F(s_i, t_j) \in B$ τότε $p_{ij} \subset B$

Αν $F(s_i, t_j) \in A \cap B$ τότε $p_{ij} \subset A \cap B$

Επίσης αν $F(s_i, t_j) = x_0$ ορίζουμε p_{ij} να είναι το σταθερό μονοπάτι. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$f = F(s_k \times [t_0, t_1]) \cdot F(s_k \times [t_1, t_2]) \cdot ...F(s_k \times [t_{k-1}, t_k]) \simeq$$
$$\simeq (\alpha_1 \cdot p_{k1}^{-1}) \cdot (p_{k1} \cdot \alpha_2 \cdot p_{k2}^{-1}) ... \cdot (p_{k,k-1} \cdot \alpha_k)$$

όπου $\alpha_i = F(s_k \times [t_{i-1}, t_i])$.

Θέτουμε $\bar{\alpha}_i = p_{k,i-1} \cdot \alpha_2 \cdot p_{ki}^{-1}$ και βλέπουμε το $\bar{\alpha}_i$ σαν στοιχείο της $\pi_1(A, x_0)$ ή της $\pi_1(B, x_0)$. Σημειώνουμε ότι το στοιχείο $[g_1] \cdot [g_2] ... \cdot [g_n]$ του $\pi_1(A, x_0) \star \pi_1(B, x_0)$ είναι ίσο με το $[\bar{\alpha}_1] \cdot [\bar{\alpha}_2] ... [\bar{\alpha}_k]$, απλά κάθε g_i έχει αντικατασταθεί από ένα γινόμενο μονοπατιών που ανήκει στον ίδιο παράγοντα του ελεύθερου γινομένου όπως το g_i. Χρησιμοποιώντας την ομοτοπία F θα δείξουμε ότι το

$$\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 ... \bar{\alpha}_k$$

είναι γινόμενο συζυγών στοιχείων της μορφής $i_{AB}(w) i_{BA}(w)^{-1}$. Η διαμέριση του $I \times I$ που ορίσαμε παραπάνω υποδιαιρεί την F σε 'μικρότερες' ομοτοπίες. Χρησιμοποιούμε αυτές τις ομοτοπίες για να γράψουμε το στοιχείο $\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2 ... \bar{\alpha}_k$ με διαφορετικό τρόπο στην $\pi_1(A, x_0) \star \pi_1(B, x_0)$. Ξεκινάμε από το πάνω δεξιά τετραγωνάκι της ομοτοπίας και παρατηρούμε ότι:

$$F(s_k \times [t_{k-1}, t_k]) \cdot F([s_{k-1}, s_k] \times t_k) \simeq F([s_{k-1}, s_k] \times t_{k-1}) \cdot F(s_{k-1} \times [t_{k-1}, t_k])$$

Αφού το $F([s_{k-1}, s_k] \times t_k)$ είναι το σταθερό μονοπάτι συμπεραίνουμε ότι $\bar{\alpha}_k = \bar{c} \cdot \bar{d}$ όπου

$$\bar{c} = p_{k-1,k-1} \cdot F([s_{k-1}, s_k] \times t_{k-1}) \cdot p_{k,k-1}^{-1}$$

$$\bar{d} = p_{k-1,k-1} \cdot F(s_{k-1} \times [t_{k-1}, t_k]) \cdot p_{k-1,k}^{-1}$$

Σημειώνουμε ότι η ισότητα $\bar{\alpha}_k = \bar{c}\bar{d}$ ισχύει στην $\pi_1(A, x_0)$ ή στην $\pi_1(B, x_0)$ ανάλογα με το σε ποιά απ' τις δύο περιέχεται το $\bar{\alpha}_k$. Συνεχίζουμε διαδοχικά με το επόμενο τετράγωνο κλπ. Παρατηρούμε ότι κάποια διαδοχικά τετράγωνα απεικονίζονται σε διαφορετικό σύνολο, το ένα στο A και το άλλο στο B. Σ'αυτή την περίπτωση η κοινή τους πλευρά απεικονίζεται στο $A \cap B$. Έστω λοιπόν ότι μετά από διαδοχικές ομοτοπίες έχουμε φτάσει στην γραφή:

$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{c}_i\bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1$$

Τώρα τα στοιχεία $\bar{\alpha}_i, \bar{c}_i$ ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ομοτοπία και να αντικαταστήσουμε το στοιχείο. Παρατηρούμε ωστόσο ότι το μονοπάτι w που παριστά το $\bar{c}_i$ περιέχεται στο $A \cap B$. Επομένως $\varphi(\bar{c}_i) = \varphi(\bar{d}_i)$ για κάποιο $\bar{d}_i$ που ανήκει στην ίδια ομάδα όπως το $\bar{\alpha}_i$. Έχουμε επομένως

$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{c}_i\bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{d}_i(\bar{d}_i^{-1}\bar{c}_i)\bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1$$

Θέτουμε $x_i = \bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1$ και έχουμε

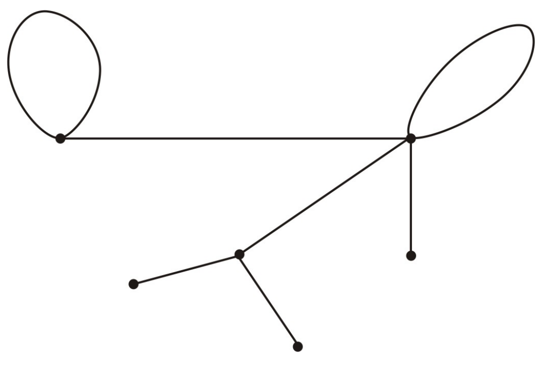
$$\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{c}_i\bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1 = \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{d}_i x_i(x_i^{-1}\bar{d}_i^{-1}\bar{c}_i x_i)$$

όπου το $\bar{d}_i^{-1}\bar{c}_i$ είναι ένα στοιχείο της μορφής $i_{AB}(w)i_{BA}(w)^{-1}$ ή $i_{BA}(w)i_{AB}(w)^{-1}$. Συνεχίζουμε τώρα τις αντικαταστάσεις όπως πρίν στο $\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_i\bar{d}_i\bar{c}_{i-1}...\bar{c}_1$. Στο τέλος καταλήγουμε στο μονοπάτι που αντιστοιχεί στην κάτω πλευρά του τετραγώνου το οποίο είναι σταθερό και έχουμε γράψει το στοιχείο $\bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2...\bar{\alpha}_k$ σαν γινόμενο συζυγών των $i_{AB}(w)i_{BA}(w)^{-1}$, $i_{BA}(w)i_{AB}(w)^{-1}$.

□

Ορισμός 3.14. *Ένα* **γράφημα** *είναι ένα CW-σύμπλεγμα διάστασης* 1.

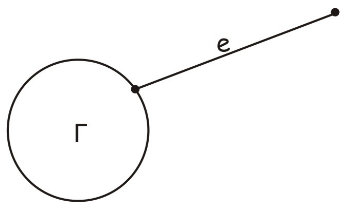
Παράδειγμα 3.4. *Ένα παράδειγμα γραφήματος:*



Πρόταση 3.12. *Έστω* Γ *πεπερασμένο συνεκτικό γράφημα. Τότε η* $\pi_1(\Gamma)$ *είναι ελεύθερη.*

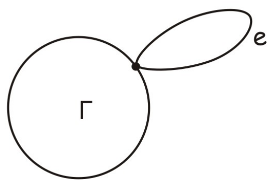
Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των ακμών του Γ, n. Αν $n = 0$, το Γ είναι ένα σημείο, άρα $\pi_1(\Gamma) = \{e\}$ ελεύθερη. Έστω ότι ισχύει για n. Θα το δείξουμε για $n+1$. Προσθέτουμε διαδοχικά τις ακμές του Γ.

Περίπτωση 1



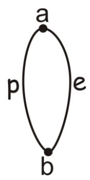
$\pi_1(\Gamma \vee e) = \pi_1(\Gamma)$ ελεύθερη.

Περίπτωση 2



$\pi_1(\Gamma \vee S^1) = \pi_1(\Gamma) \star \pi_1(S^1) = \mathbb{F}_k \star \mathbb{Z}$ ελεύθερη.

Περίπτωση 3



Έστω p ένα απλό μονοπάτι που συνδέει τις a και b. Έστω A μία ανοιχτή γειτονιά του Γ που περιέχει το p αλλά δεν περιέχει την e και B μία ανοιχτή γειτονιά του $p \cup e$ η οποία δεν περιέχει καμία ακμή του Γ, εκτός από τις ακμές του $p \cup e$. Τότε το p είναι συστολή παραμόρφωσης του $A \cap B$, άρα $\pi_1(A \cap B) = \{e\}$. Όμως $\pi_1(A) = \pi_1(\Gamma) = \mathbb{F}_k$, αφού το A είναι συστολή παραμόρφωσης του Γ και $\pi_1(B) = \pi_1(p \cup e) = \mathbb{Z}$. Έτσι, από το Θεώρημα *van Kampen*, έχουμε ότι $\pi_1(\Gamma \cup e) = \mathbb{F}_k \star \mathbb{Z}$. □

Παρατήρηση 3.6. *Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για άπειρα γραφήματα.*

Ορισμός 3.15. *Ένα συσταλτό γράφημα ονομάζεται* **δέντρο**.
Ισοδύναμα δέντρο είναι ένα γράφημα που δεν περιέχει απλό κλειστό μονοπάτι.

3.7 Θεμελιώδης ομάδα CW-συμπλεγμάτων διάστασης 2

Έστω X τοπολογικός χώρος συνεκτικός κατά τόξα και Y ο χώρος που παίρνουμε «κολλώντας» ένα κελί διάστασης 2 στον X.

Δηλαδή, έχουμε μία συνεχή απεικόνιση

$$f : \partial D^2 \to X$$

και

$$Y = X \sqcup D / \sim \quad \text{όπου} \quad x \sim f(x), \quad \forall x \in \partial D$$

Βλέπουμε τον Y σαν ένωση του X με ένα δίσκο και ένα δακτύλιο. Αν $D = B_1(0)$ θεωρούμε το δακτύλιο

$$R = B_1(0) - \overset{\circ}{B}_{\frac{1}{2}}(0)$$

Ορίζουμε:

$$\hat{X} = X \sqcup R / \sim \quad \text{όπου} \quad x \sim f(x), \quad \forall x \in \partial D$$

Ο X είναι συστολή παραμόρφωσης του $\hat{X}$ (αφού ∂D συστολή παραμόρφωσης του R, αν $\varphi_t : R \to \partial D$ συστολή παραμόρφωσης, επεκτείνουμε σε $\varphi_t : \hat{X} \to X$ με $\varphi_t(x) = x, \quad \forall x \in X$)

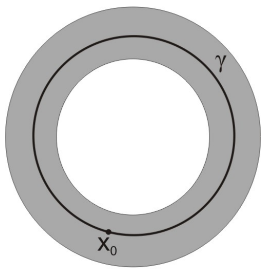
Άρα $\pi_1(\hat{X}) = \pi_1(X)$.

$$Y = \hat{X} \sqcup B_{\frac{1}{2}}(0) / x = i(x), \quad \forall x \in B_{\frac{1}{2}}(0)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα το θεώρημα *van Kampen*:

$$A = B_{\frac{2}{3}}(0), B = \hat{X}$$

Το $A \cap B$ είναι:



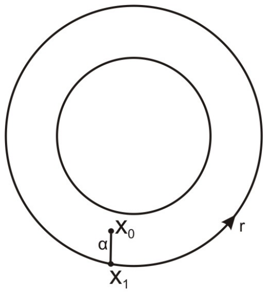
άρα $\pi_1(A \cap B)$ είναι κυκλική, έστω $\pi_1(A \cap B) =< \gamma >$. Από το θεώρημα *van Kampen*:

$$\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(\hat{X}) \star \pi_1(A) / \langle\langle \gamma \rangle\rangle \qquad \text{και } \pi_1(A) = \{e\}$$

Αν θέσουμε $r = f(\partial D)$ μπορούμε να δούμε το r σα βρόγχο στον X με σημείο αναφοράς κάποιο $x_1 \in f(\partial D)$. Τότε

$$\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(\hat{X}, x_0) / \langle\langle ar\bar{a} \rangle\rangle$$

αφού $\gamma \simeq ar\bar{a}$



Παρατηρούμε ότι έχουμε διαλέξει σημείο αναφοράς $x_0 \in A \cap B$. Αν διαλέξουμε σημείο αναφοράς $x_1 \in X$ έχουμε:

$$\pi_1(\hat{X}, x_1) \xrightarrow[\sim]{f_a} \pi_1(\hat{X}, x_0) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(Y, x_0) \xrightarrow[\sim]{f_{\bar{a}}} \pi_1(Y, x_1)$$

όπου $\varphi : \pi_1(\hat{X}, x_0) \to \pi_1(Y, x_0)$ είναι η προφανής προβολή στην ομάδα πηλίκο. Τώρα από την

Παρατήρηση 3.7. *Έστω ισομορφισμός $\varphi : G \to G$ και $\varphi(a) = b$, τότε*

$$\varphi(\langle\langle a \rangle\rangle) = \langle\langle b \rangle\rangle$$

έχουμε ότι

$$f_a^{-1}(\langle\langle ar\bar{a} \rangle\rangle) = \langle\langle r \rangle\rangle$$

άρα ο πυρήνας της

$$f_{\bar{a}} \varphi f_a : \pi_1(\hat{X}, x_1) \to \pi_1(Y, x_1)$$

είναι $\langle\langle r \rangle\rangle$, επομένως

$$\pi_1(Y, x_1) = \pi_1(X, x_1)/\langle\langle r \rangle\rangle$$

Γενικότερα αν διαλέξουμε ένα σημείο αναφοράς x_2 που δεν ανήκει στο $f(\partial D)$ και β είναι ένα μονοπάτι από το x_2 στο x_0 βλέπουμε όπως πριν ότι

$$\pi_1(Y, x_2) = \pi_1(X, x_2)/\langle\langle \beta r \bar{\beta} \rangle\rangle$$

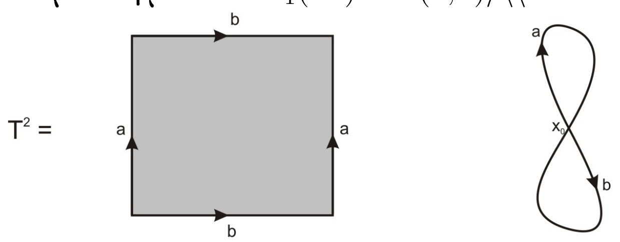
Επαγωγικά έχουμε:
Έστω X τοπολογικός χώρος, συνεκτικός κατά τόξα και Y ο χώρος που παίρνουμε κολώντας n κελιά διάστασης 2 στον X. Δηλαδή:

$$Y = X \sqcup D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_n / x \sim f_i(x),\, x \in D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_n \qquad \text{όπου} f_i : \partial D_i \to X$$

Έστω $x_0 \in X$ και a_i μονοπάτια από το x_0 στο $\gamma_i = f_i(\partial D_i)$, τότε

$$\pi_1(Y) = \pi_1(X)/\langle\langle a_1\gamma_1\bar{a_1}, \ldots a_n\gamma_n\bar{a_n} \rangle\rangle$$

Παράδειγμα 3.5. $\pi_1(T^2) = \mathbb{F}(a,b)/\langle\langle aba^{-1}b^{-1}\rangle\rangle$, $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$



Πρόταση 3.13. *Αν $Y = X \sqcup D^n/x \sim f(x), x \in \partial D^n$ για $n > 2$ και $f : \partial D^n \to X$, τότε $\pi_1(Y) = \pi_1(X)$.*

Απόδειξη. $Y = A \cup B$, όπου $A = X \cup$ μπάλα με τρύπα, το $A \cap B$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμο με την S^{n-1}.

$$\pi_1(A \cap B) = 1$$

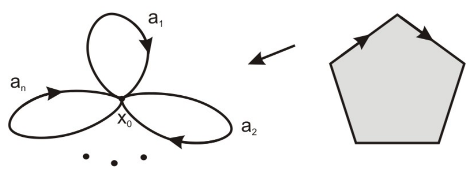
$$\pi_1(B) = 1$$

$$\pi_1(Y) = \pi_1(X) \star \{1\}$$

□

Πρόταση 3.14. *Για κάθε πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα G, υπάρχει ένα πεπερασμένο CW-σύμπλεγμα διάστασης 2, X, τέτοιο ώστε $\pi_1(X) = G$*

Απόδειξη. Έστω $G = \langle a_1, \dots a_n \mid r_1 \dots r_k\rangle$, όπου r_i είναι λέξεις στα $a_i^{\pm 1}$. Θεωρούμε ένα μπουκέτο από n-κύκλους, Y. $\pi_1(Y) = \mathbb{F}_n = \mathbb{F}(a_1, ..., a_n)$, ταυτίζουμε δηλαδή τους γεννήτορες της $\mathbb{F}_n$ με τα $a_1, ..., a_n$. Κάθε (προσανατολισμένος) κύκλος στο μπουκέτο αντιστοιχεί σε ένα βρόγχο που δίνει ένα γεννήτορα a_i. Βάζουμε ετικέτες στους κύκλους που αντιστοιχούν στους γεννήτορες.

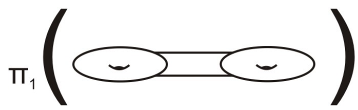


Για κάθε σχέση r_j θεωρούμε ένα δίσκο D_j που αναπαριστούμε σαν κυρτό πολύγωνο με πλήθος ακμών ίσο με το αριθμό των γραμμάτων της r_j. Βάζουμε ετικέτες στις ακμές έτσι ώστε διαβάζοντας τις διαδοχικά να παίρνουμε τη σχέση r_j.

Κολλάμε αυτό το δίσκο στο X ταυτίζοντας τις ακμές στους βρόγχους με την ίδια ετικέτα. Σημειώνουμε ότι η ετικέτα πχ a_i^{-1} αντιστοιχεί σε ταύτιση με αντίθετη φορά. Αν X είναι το CW-σύμπλεγμα που κατασκευάζουμε μ' αυτό τον τρόπο παρατηρούμε ότι $\pi_1(X) = G$. $\square$

Ασκήσεις 3.1. *Υπολογίστε*

$$\pi_1(D^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$$
$$\pi_1(S^2 \setminus \{x_1, \dots, x_n\})$$
$$\pi_1(B^3 \setminus \textit{διάμετρος})$$
$$\pi_1(B^3 \setminus \textit{δύο ευθύγραμμα τμήματα})$$



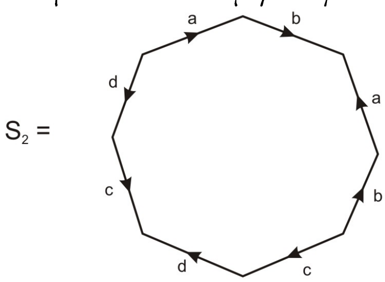
Ορισμός 3.16. *Μία* **πολλαπλότητα** *διάστασης n, M, είναι ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος τέτοιος ώστε κάθε σημείο του M έχει μία γειτονιά U ομοιομορφική με ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

Παράδειγμα 3.6. *1. Οι χώροι $\mathbb{R}, S^1$ είναι πολλαπλότητες διάστασης 1.*

2. Ο torus T^2 είναι πολλαπλότητα διάστασης 2.

3. Η S^n είναι πολλαπλότητα διάστασης n.

4. Η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους 2 είναι πολλαπλότητα διάστασης 2.



$\pi_1(S_2) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$

Γενικά, S_g, είναι η προσανατολίσιμη επιφάνεια γένους g.

$$\pi_1(S_g) = \langle a_1, b_1 \dots a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

Η αβελιανοποίηση της $\pi_1(S_g)$ είναι η $\mathbb{Z}^{2g}$.

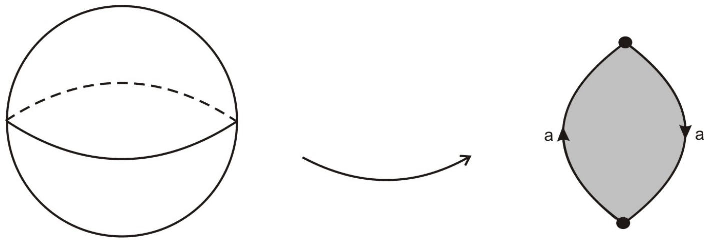
3.8 Μη Προσανατολίσιμες Επιφάνειες

Το προβολικό επίπεδο

Το προβολικό επίπεδο, $\mathbb{R}P^2$, ορίζεται ως το σύνολο των ευθειών που περνάνε από το 0 στον $\mathbb{R}^3$. Το βλέπουμε δηλαδή σα χώρο πηλίκο του $\mathbb{R}^3$:

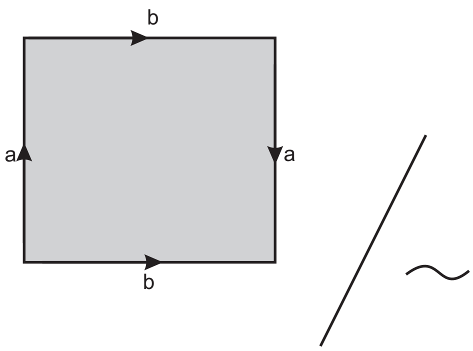
$$\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\vec{v} \sim \lambda\vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}^\star, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

Ισοδύναμα μπορούμε να δούμε το προβολικό επίπεδο σαν το χώρο πηλίκο της σφαίρας S^2 όπου ταυτίζουμε αντιποδικά σημεία: $\mathbb{R}P^2 = S^2/x \sim -x$.



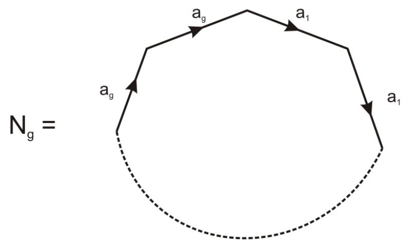
$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \langle a \mid a^2 \rangle = \mathbb{Z}_2$$

Η μποτίλια του Klein



$$\pi_1(N_2) = \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$$

Αβελιανοποίηση: $\langle a, b \mid a^2 = 1, [a, b] = 1 \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$
Γενικά έχουμε την επιφάνεια N_g,



με θεμελιώδη ομάδα $\pi_1(N_g) = \langle a_1, \ldots a_g \mid a_1^2 \ldots a_g^2 = 1 \rangle$. Η αβελιανοποίηση αυτής της ομάδας είναι:

$$\langle a_1 \ldots a_g \mid (a_1 \ldots a_g)^2 = 1, [a_i, a_j] = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς συμπεραίνουμε ότι οι επιφάνειες S^2 , N_g , S_g δεν είναι ομοιομορφικές, δεν είναι καν ομοτοπικά ισοδύναμες.

3.9 Ταξινόμηση των Συμπαγών Επιφανειών διάστασης 2

Ορισμός 3.17. *Λέμε ότι μία επιφάνεια είναι* **τριγωνοποιήσιμη** *αν υπάρχει οικογένεια συμπαγών $\{T_1, \ldots, T_n\}$ τέτοια ώστε*

$$S = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

και υπάρχουν ομοιομορφισμοί

$$\varphi_i : T_i \to T_i', \quad \text{όπου } T_i' \subset \mathbb{R}^2 \text{ τρίγωνο (με το εσωτερικό του)}$$

και

$$T_i \cap T_j = \emptyset \text{ ή ακμή και των δύο ή κορυφή και των δύο}$$

Θεώρημα 3.5. *(Rado 1925) Κάθε συμπαγής επιφάνεια μπορεί να τριγωνοποιηθεί.*

Θεώρημα 3.6. *Αν S συμπαγής συνεκτική επιφάνεια, τότε $S \simeq S_g$ ή N_g ή S^2.*

Απόδειξη.
Βήμα 1
Η S μπορεί να παρασταθεί σαν ένα πολύγωνο Π, ταυτίζοντας ζευγάρια ακμών του Π.
Απόδειξη. Αφού η S μπορεί να τριγωνοποιηθεί έχουμε $S = \bigcup_{i=1}^{n} T_i / \sim$ όπου η σχέση $\sim$ δίνεται από ταυτίσεις πλευρών των T_i. Ξεκινάμε με το T_1 και κολλάμε διαδοχικά τα T_i. Σε κάθε βήμα κολλάμε ένα τρίγωνο σε μία πλευρά του πολυγώνου, επομένως παίρνουμε πάλι πολύγωνο. Μετά από πεπερασμένα βήματα θα έχουμε κολλήσει όλα τα T_i επειδή το

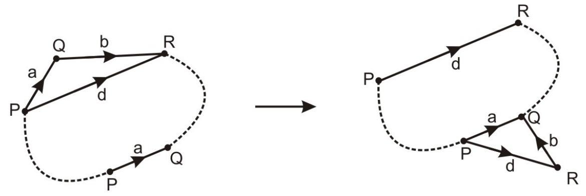
S είναι συνεκτικό. $\square$

Βήμα 2

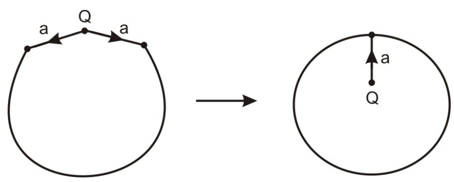
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι κορυφές του Π ταυτίζονται σε μία μετά από τις ταυτίσεις των ακμών του Π.

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει. Θεωρούμε για κάθε κορυφή $Q \in \Pi^{(0)}$ την κλάση $[Q]$ όλων των κορυφών που ταυτίζονται με την Q. Διατρέχουμε το Π ξεκινώντας από μία κορυφή στην κλάση $[Q]$ και θεωρούμε την πρώτη ακμή, έστω b, που δεν έχει και τα δύο άκρα της στην $[Q]$.

Ελαττώνουμε το πλήθος κορυφών της $[Q]$ όπως στο σχήμα:



Η $[Q]$ έχει ένα στοιχείο λιγότερο. Μπορούμε να συνεχίσουμε ώσπου η $[Q]$ να έχει μόνο μία κορυφή.



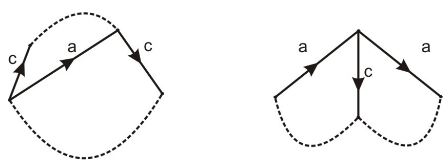
Έχουμε τότε ένα ζευγάρι ακμών που απλοποιείται και η $[Q]$ εξαφανίζεται.

Σημειώνουμε ότι αν το πολύγωνο έχει ακριβώς 2 κορυφές τότε δεν μπορούμε να κάνουμε τον παραπάνω μετασχηματισμό αλλά σ' αυτή την περίπτωση η επιφάνεια είναι η S^2. $\square$

Βήμα 3

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι αν δύο ακμές με τον ίδιο προσανατολισμό ταυτίζονται, τότε αυτές είναι διαδοχικές.

Απόδειξη.



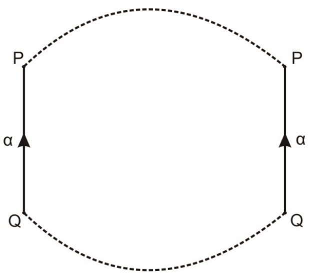
$\square$

Βήμα 4

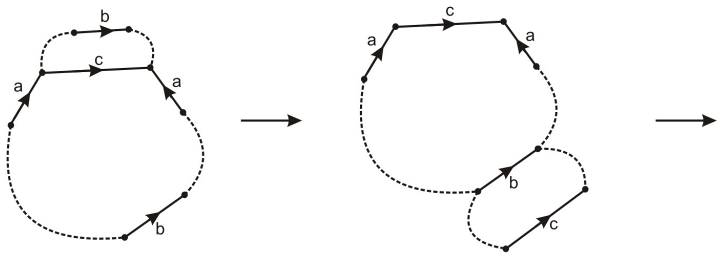
Αν υπάρχουν αντίστροφα προσανατολισμένες ακμές που ταυτίζονται μετά το τρίτο βήμα, αυτές εμφανίζονται σε ζεύγη της μορφής:

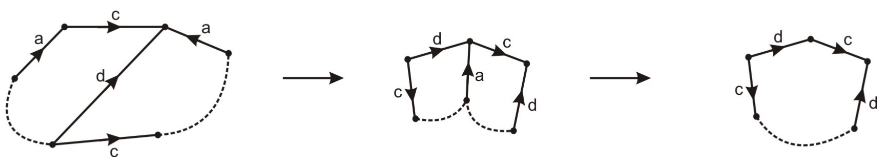
$$a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$$

Απόδειξη. Αφού οι όμοια προσανατολισμένες είναι συνεχόμενες αν ανάμεσα στις ακμές a, a^{-1} μεσολαβούν μόνο όμοια προσανατολισμένες ακμές τότε τα άκρα της a δεν ταυτίζονται μεταξύ τους. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το βήμα 2.



Κόβωντας και κολλώντας μπορούμε να τις κάνουμε συνεχόμενες.

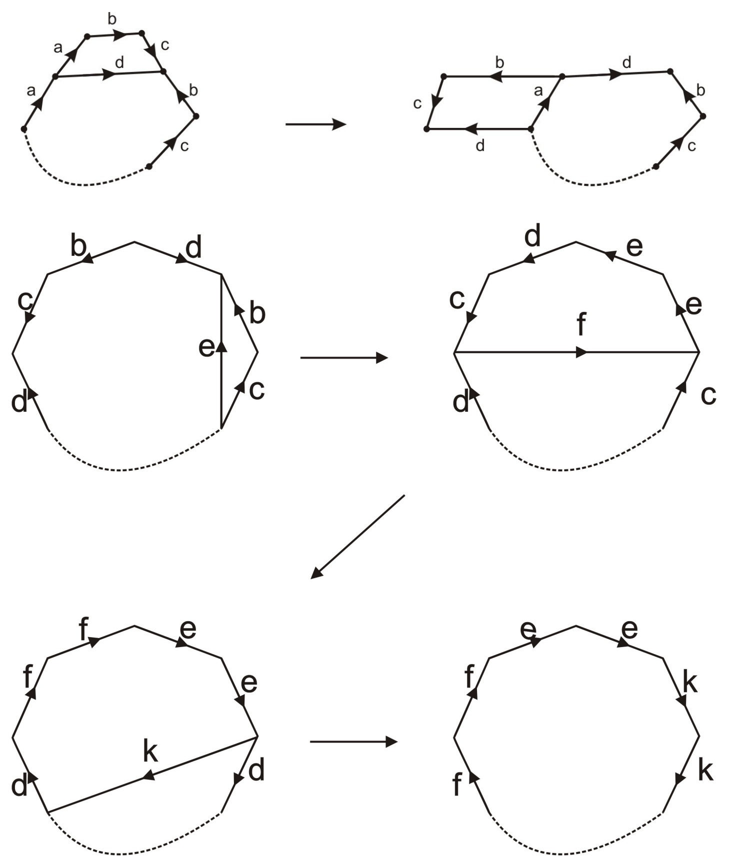




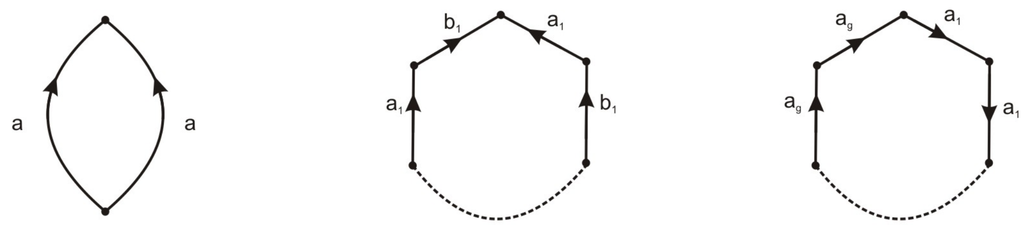
$\square$

Βήμα 5

Αν έχουμε ζευγάρια αντίθετα προσανατολισμένων ακμών και ζευγάρια όμοια προσανατολισμένων ακμών στο Π, τότε τις μετατρέπουμε σε ζευγάρια όμοια προσανατολισμένων ακμών.



Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν **3 Περιπτώσεις:**



S^2 S_g N_g

□

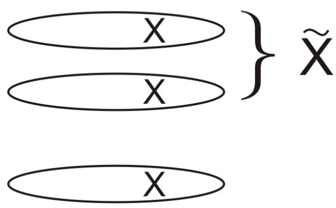
Κεφάλαιο 4

Χώροι Επικάλυψης

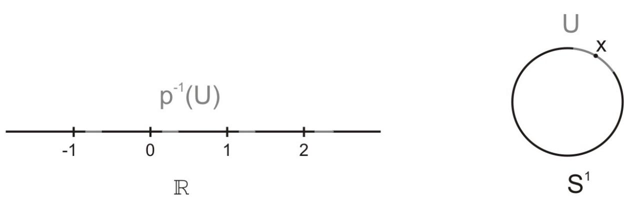
4.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 4.1. *Έστω $X, \tilde{X}$ τοπολογικοί χώροι και $p : \tilde{X} \to X$.*
Η p λέγεται **προβολή επικάλυψης** *(covering space projection) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει γειτονιά U του x τέτοια ώστε το $p^{-1}(U)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών συνόλων $\{U_a\}_{a \in A}$, και για κάθε a η $p_{|U_a} : U_a \to U$ είναι ομοιομορφισμός.*
Λέμε σ' αυτή την περίπτωση ότι ο $\tilde{X}$ είναι **χώρος επικάλυψης***(covering space) του X.*

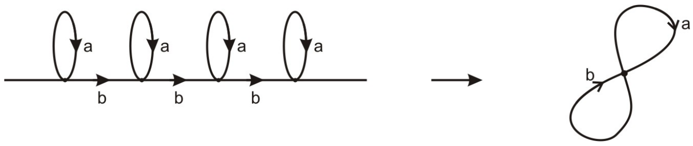
Παράδειγμα 4.1. *1. Αν S διακριτό σύνολο, π.χ. το $\mathbb{Z}$, έχουμε $p : X \times \mathbb{Z} \to X$*



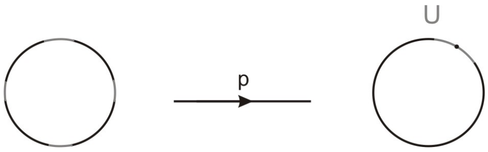
2. $p : \mathbb{R} \to S^1$ με $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$



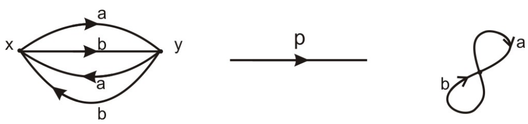
3.

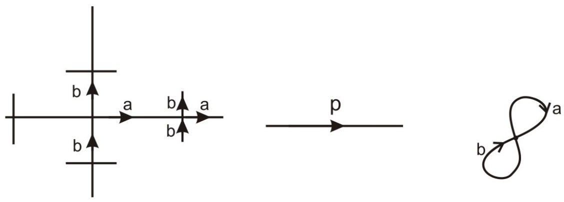


4. $p : S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^n,\ S^1 = \{e^{i\theta} \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$



5.





6.

7. *Θεωρούμε τον προβολικό χώρο:* $\mathbb{R}P^n = \{$*οι ευθείες του* $\mathbb{R}^{n+1}$ *που περνούν από το 0*$\}$.
   Η τοπολογία ορίζεται ως εξής: Έστω $U \subset S^n$ *ανοικτό. Το σύνολο των ευθειών που τέμνουν το* U *είναι ανοικτό σύνολο του* $\mathbb{R}P^n$.
   Έχουμε μία απεικόνιση $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ *που στέλνει το* $x \in S^n$ *στην ευθεία* $\overline{0x}$.
   Αν $f : S^n \to S^n$ *με* $f(x) = -x$ *, τότε* $\mathbb{R}P^n \simeq S^n/x \sim f(x)$.
   Η απεικόνιση $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ *είναι προβολή επικάλυψης του* $\mathbb{R}P^n$.
   Επιπλέον $\forall x \in \mathbb{R}P^n, \#|p^{-1}(x)| = 2$

Μία γειτονιά U στον X λέγεται **γειτονιά επικάλυψης** αν το $p^{-1}(U)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών U_a και $p_{|_{U_a}: U_a \to U}$ ομοιομορφισμός για κάθε a.

Ιδιότητες Ανύψωσης (lifting)

Ορισμός 4.2. *Αν* $(\tilde{X}, p)$ *χώρος επικάλυψης του* X *και* $f : Y \to X$ *απεικόνιση, τότε μία* **ανύψωση** *της* f *είναι μία απεικόνιση* $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$, *τέτοια ώστε* $f = p \circ \tilde{f}$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Πρόταση 4.1. *Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X και $f : I \to X$ μονοπάτι με $f(0) = x, f(1) = y$. Για κάθε $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, υπάρχει μοναδική $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ τέτοια ώστε:*

$$\tilde{f}(0) = \tilde{x} \quad \text{και} \quad p \circ \tilde{f} = f$$

Απόδειξη.
Ύπαρξη: Έστω $\{U_a\}$ μία ανοικτή κάλυψη του X, τέτοια ώστε κάθε U_a είναι γειτονιά επικάλυψης.
Για κάθε $x \in I$ υπάρχει γειτονιά $V_x \ni x$ τέτοια ώστε $f(V_x) \subset U_a$ για κάποιο a.
Άρα $\{V_x : x \in I\}$ είναι ανοικτή κάλυψη του I. Αλλά το I είναι συμπαγές, επομένως από το λήμμα *Lebesgue* έχουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - y| \leqslant \epsilon$, τότε $f([x, y]) \subset U_a$ για κάποιο a.
Έστω $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \epsilon$ και $x_k = \frac{k}{n}$. Ας πούμε ότι $f(0) \in U_a$.

Αφού το U_a είναι γειτονιά επικάλυψης το $p^{-1}(U_a)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών U_a^i με $p_{|_{U_a^i}}$ ομοιομορφισμούς. Ορίζουμε $\tilde{f}(0) = \tilde{x} \in U_a^i \subset p^{-1}(U_a)$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in [x_0, x_1]$, $f(t) \in U_a$. Επίσης $p : U_a^i \to U_a$ ομοιομορφισμός. Ορίζουμε $\tilde{f}(t) = p^{-1}(f(t))$ για κάθε $t \in [x_0, x_1]$.
Μοναδικότητα: Το $[x_0, x_1]$ είναι συνεκτικό, το $p^{-1}(U_a)$ είναι ξένη ένωση ανοιχτών, $\tilde{x} \in U_a^i$ άρα $\tilde{f}([x_0, x_1]) \subset U_a^i$. Οπότε η $\tilde{f}$ είναι μοναδικά ορισμένη.
Συνεχίζουμε επαγωγικά, επεκτείνουμε την $\tilde{f}$ ορίζοντας $\tilde{f}_{|_{[x_1, x_2]}}$ κτλ. Έτσι επεκτείνουμε την f σε όλο το I. Παρατηρούμε ότι από την κατασκευή της η $\tilde{f}$ είναι μοναδική. □

Πρόταση 4.2. *Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X, $f_t : Y \to X$ $(F : Y \times I \to X)$ μία ομοτοπία και $\tilde{f}_0 : Y \to \tilde{X}$ ανύψωση της f_0.*
Τότε υπάρχει μοναδική ομοτοπία $\tilde{f}_t : Y \to \tilde{X}$ της $\tilde{f}_0$ τέτοια ώστε $p \circ \tilde{f}_t = f_t$.

Απόδειξη. Για κάθε $(y, t) \in Y \times I$ υπάρχει γειτονιά $U \times (a, b)$ τέτοια ώστε το $F(U \times (a, b))$ περιέχεται σε κάποια γειτονιά επικάλυψης U_a.
Έστω $y \in Y$, για κάθε $t \in I$ θεωρούμε γειτονιά $U_t \times (a_t, b_t)$ όπως πριν. Το I είναι συμπαγές, άρα υπάρχουν $U_1 \times (a_1, b_1), \ldots, U_n \times (a_n, b_n)$ τέτοιες ώστε το $(a_1, b_1) \cup \cdots \cup (a_n, b_n)$ είναι κάλυψη του I. Θεωρούμε την τομή τους $V = U_1 \cap \cdots \cap U_n$. Από το λήμμα *Lebesgue*, υπάρχουν $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ τέτοια ώστε $F(V \times [t_i, t_{i+1}]) \subset V_i$, όπου V_i «γειτονιά επικάλυψης», δηλαδή $p^{-1}(V_i)$ ξένη ένωση ανοιχτών W_i^a τέτοιων ώστε $p_{|_{W_i^a}}$ ομοιομορφισμός.

Έχουμε ορίσει $\tilde{F} : V \times \{0\} \to \tilde{X}$, $(\tilde{F} : Y \times \{0\} = \tilde{f}_0)$. Το $\tilde{F}(y,0)$ περιέχεται στο $\tilde{p}^{-1}(V_0)$, ας πούμε λοιπόν ότι $\tilde{F}(y,0) \in W_0$, όπου $p : W_0 \to V_0$ είναι ομοιομορφισμός.

Περιορίζοντας (αν είναι αναγκαίο) το V μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\tilde{F}(V \times \{0\})$ περιέχεται στο W_0. Έχουμε ότι $\tilde{F}(V \times \{0\}) \subset W_0$.
Μπορούμε τώρα να ορίσουμε επέκταση της $\tilde{F}$ στο $\tilde{F}(V \times [t_0, t_1])$ με

$$\tilde{F}(v,t) = p^{-1}F(v,t), \qquad \forall (v,t) \in V \times [t_0, t_1]$$

όπου εδώ θεωρούμε την p περιορισμένη στο W_0 και $p : W_0 \to V_0$ είναι ομοιομορφισμός, επομένως η p^{-1} είναι καλά ορισμένη συνάρτηση.

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει την $\tilde{F}$ στο $\tilde{F}(V \times \{t_i\})$ και επεκτείνουμε στο $\tilde{F}(V \times [t_i, t_{i+1}])$ με $\tilde{F}(v,t) = p^{-1} \circ F(v,t)$, όπου $p : W_i \to V_i$ ομοιομορφισμός.
Με αυτόν τον τρόπο, για κάθε $y \in Y$, ορίζουμε $\tilde{F} : V_y \times I \to \tilde{X}$, όπου V_y είναι ανοικτή γειτονιά του y.
Τώρα, αν $V_y \cap V_z \neq \emptyset$, για κάθε $x \in V_y \cap V_z$ το $\tilde{F}(x,0)$ είναι ορισμένο από την υπόθεση $(= \tilde{f}_0(x))$ και υπάρχει μοναδική ανύψωση του $F(x,t)$, $\quad t \in [0,1]$ άρα η $\tilde{F}(x,t)$ ορίζεται με τον ίδιο τρόπο στην $V_y \cap V_z$.
Επομένως, η $\tilde{F} : Y \times I \to X$ είναι καλά ορισμένη, συνεχής, μοναδική. □

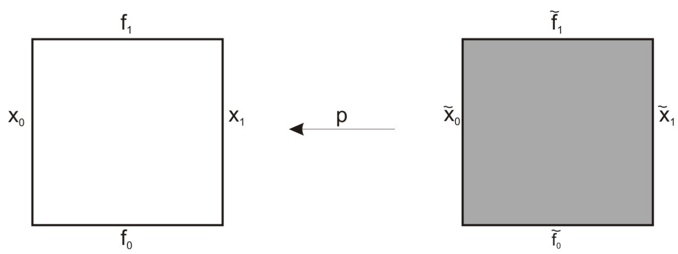
Πρόταση 4.3. *Έστω $(\tilde{X}, p)$ χώρος επικάλυψης του X. Η απεικόνιση*

$$p_\star : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

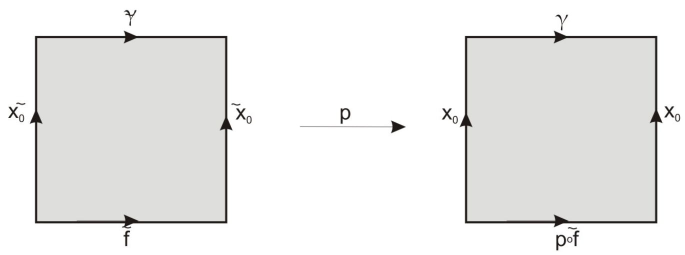
είναι μονομορφισμός.
Η υποομάδα $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ αποτελείται από τους βρόγχους γ με βάση το x_0 που ανυψώνονται σε βρόγχους με βάση το $\tilde{x}_0$.

Απόδειξη.

1. Έστω $[\tilde{f}_0] \in \ker(p_\star)$, δηλαδή $\tilde{f}_0 : I \to \tilde{X}$, $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_0(1) = \tilde{x}_0$ και $f_0 = p \circ \tilde{f}_0$ ομοτοπικό με το σταθερό μονοπάτι $f_1(t) = x_0$, $\forall t \in I$.
   Υπάρχει ομοτοπία f_t από το f_0 στο f_1. Αλλά τότε, από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει ομοτοπία $\tilde{f}_t$ από το $\tilde{f}_0$ στο $\tilde{f}_1$, δηλαδή $[\tilde{f}_0] = 1$.



2. Αν ο γ ανυψώνεται σε βρόγχο $\tilde{\gamma}$ στο $\tilde{x}_0$, τότε $\gamma = p_\star(\tilde{\gamma})$, δηλαδή $\gamma \in Im(p_\star)$. Αντίστροφα, αν $\gamma \in Im(p_\star)$, τότε ο γ είναι ομοτοπικός με βρόγχο $p \circ \tilde{f}$. Αλλά η ομοτοπία από τον γ στον $p \circ \tilde{f}$ ανυψώνεται σε ομοτοπία από τον $\tilde{\gamma}$ στον $\tilde{f}$, δηλαδή ο $\tilde{\gamma}$ είναι βρόγχος στο $\tilde{x}_0$.



□

Παρατήρηση 4.1. *Αν $p : \tilde{X} \to X$ προβολή επικάλυψης, τότε ο πληθάριθμος $Card(p^{-1}(x))$ είναι τοπικά σταθερός, δηλαδή για κάθε $x \in X$ υπάρχει U ανοικτή γειτονιά του x τέτοια ώστε για κάθε $y \in U$ ισχύει*

$$Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))$$

Επομένως αν ο X είναι συνεκτικός, τότε ο $Card(p^{-1}(x))$ είναι σταθερός. Ο αριθμός αυτός λέγεται αριθμός καλυμμάτων (φύλλων) της επικάλυψης.

Απόδειξη. Το σύνολο των σημείων $y \in Y$, με $Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))$ είναι ανοικτό. Το συμπλήρωμά του είναι επίσης ανοικτό. Αυτά τα δύο είναι ξένα και ο X είναι συνεκτικός, άρα $\{y \in Y$ με $Card(p^{-1}(y)) = Card(p^{-1}(x))\} = X$. □

Πρόταση 4.4. *Έστω $X, \tilde{X}$ συνεκτικοί κατά τόξα και $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ επικάλυψη. Ο αριθμός καλυμμάτων της επικάλυψης p είναι ίσος με το δείκτη της $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ στην $\pi_1(X, x_0)$.*

Απόδειξη. Έστω $H = p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.
Ορίζουμε μία απεικόνιση από τα δεξιά σύμπλοκα $\{H[g]\}$ στο $\{p^{-1}(x_0)\}$. Θεωρούμε την ανύψωση του g, $\tilde{g}$ που ξεκινά από το $\tilde{x}_0$ και ορίζουμε $\varphi(H[g]) = \tilde{g}(1)$.

- Η φ είναι καλά ορισμένη:
  Αν $hg \in H[g]$, τότε $\widetilde{hg} = \tilde{h}\tilde{g}$ (όπου $\tilde{g}$ ξεκινά στο $\tilde{h}(1)$) αλλά $\tilde{h}\tilde{g}(1) = \tilde{g}(1)$ αφού $\tilde{h}$ βρόγχος στο $\tilde{x}_0$.

- Η φ είναι $1-1$.
  Αν $\tilde{g}_1(1) = \tilde{g}_2(1)$, τότε $\tilde{g}_1\tilde{g}_2^{-1}(1) = \tilde{x}_0$, δηλαδή $\tilde{g}_1\tilde{g}_2^{-1} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g_1g_2^{-1} \in H \\
&\Rightarrow g_1g_2^{-1} = h \in H \\
&\Rightarrow g_1 = hg_2 \\
&\Rightarrow Hg_1 = Hg_2
\end{aligned}$$

- Η φ είναι επί.
  Αν $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ και $\tilde{g}$ μονοπάτι από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$, τότε $p(\tilde{g}) = g \in \pi_1(X, x_0)$ και $\varphi(Hg) = \tilde{x}_1$.

□

Ορισμός 4.3. *Ο τοπολογικός χώρος Y είναι* **τοπικά συνεκτικός κατά τόξα** *αν για κάθε $y \in Y$ και για κάθε γειτονιά U του y, υπάρχει γειτονιά $y \in V \subset U$ τέτοια ώστε V συνεκτική κατά τόξα.*

Πρόταση 4.5. *Έστω $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ και $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, όπου ο Y είναι συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός κατά τόξα. Τότε υπάρχει ανύψωση $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ της f αν και μόνο αν $f_\star(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$*

Απόδειξη. «$\Rightarrow$» Αν υπάρχει ανύψωση $\tilde{f}$ της f, τότε $f_\star = (p \circ \tilde{f})_\star = p_\star \circ \tilde{f}_\star$. Άρα $Im(f_\star) \subset Im(p_\star)$
«$\Leftarrow$» Έστω $y \in Y$ και γ μονοπάτι από το y_0 στο y. Θεωρούμε το μονοπάτι $f(\gamma)$. Υπάρχει μοναδική ανύψωση του $f(\gamma)$ που ξεκινά από το $\tilde{x}_0$. Ορίζουμε

$$\tilde{f}(y) = \widetilde{f(\gamma)}(1)$$

Θα δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη.
Υπενθυμίζουμε ότι αν α μονοπάτι συμβολίζουμε με $\bar{\alpha}$ το μονοπάτι $\alpha(t) = \alpha(1-t)$.

Έστω γ' ένα άλλο μονοπάτι από το y_0 στο y. Τότε το $f(\gamma)\overline{f(\gamma')}$ είναι βρόγχος στο x_0.

$$f(\gamma)\overline{f(\gamma')} \simeq f(\gamma\bar{\gamma'}) \in f_\star(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

Επομένως, ο βρόγχος $f(\gamma)\overline{f(\gamma')}$ ανυψώνεται σε βρόγχο στον $\tilde{X}$ από το $\tilde{x}_0$, άρα το $\widetilde{\overline{f(\gamma')}}$ είναι ένα μονοπάτι από το $\widetilde{f(\gamma')}(1)$ στο $\tilde{x}_0$. Επομένως, το $\widetilde{f(\gamma')}$ είναι ένα μονοπάτι από το $\tilde{x}_0$ στο $\widetilde{f(\gamma)}(1) = \widetilde{f(\gamma')}(1)$.

Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής:
Έστω $y \in Y$ και $\tilde{U}$ γειτονιά του $\widetilde{f(y)}$ τέτοια ώστε η $p_{|_{\tilde{U}}}$ είναι ομοιομορφισμός $p : \tilde{U} \to p(\tilde{U}) = U$.
Αφού ο Y είναι τοπικά συνεκτικός κατά τόξα υπάρχει συνεκτική κατά τόξα γειτονιά του y, V, που περιέχεται στην $f^{-1}(U)$.
Έστω γ ένα μονοπάτι από το y_0 στο y. Αν $y' \in V$, θεωρούμε το μονοπάτι γ' από το y στο y'.

$$\tilde{f}(y') = \widetilde{f(\gamma)f(\gamma')}(1) = \widetilde{f(\gamma)}\widetilde{f(\gamma')}(1)$$

Αλλά $\widetilde{f(\gamma')} \subset \tilde{U}$, αφού $p : \tilde{U} \to U$ ομοιομορφισμός, άρα $\tilde{f}(y') \in \tilde{U}$. Συμπεραίνουμε ότι $f(V) \subset \tilde{U}$, επομένως η f είναι συνεχής. $\square$

Πρόταση 4.6. *Έστω $p : \tilde{X} \to X$ χώρος επικάλυψης και $f : Y \to X$, όπου Y συνεκτικός. Έστω $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ δύο ανυψώσεις της f. Αν $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$ για κάποιο $y \in Y$, τότε $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $A = \{y : \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό.
Έστω $y \in Y$, U γειτονιά επικάλυψης του y και $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2$ γειτονιές των $\tilde{f}_1(y), \tilde{f}_2(y)$ τέτοιες ώστε $p : \tilde{U}_1 \to U = p(\tilde{U}_1)$, $p : \tilde{U}_2 \to U = p(\tilde{U}_2)$ ομοιομορφισμοί. Αν $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$, τότε $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$. Αφού οι $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ είναι συνεχείς, υπάρχει γειτονιά N του y τέτοια ώστε $\tilde{f}_1(N) \subset U_1$, $\tilde{f}_2(N) \subset U_2$. Αν $\tilde{f}_1(y) \neq \tilde{f}_2(y)$, τότε $\tilde{f}_1(y') \neq \tilde{f}_2(y')$, για κάθε $y' \in N$.
Όμοια, αν $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$, τότε $\tilde{f}_1(y') = \tilde{f}_2(y')$, για κάθε $y' \in N$.
Άρα το σύνολο όπου οι $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ ταυτίζονται είναι ανοικτό και κλειστό. Αφού ο Y είναι συνεκτικός συμπεραίνουμε ότι $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. $\square$

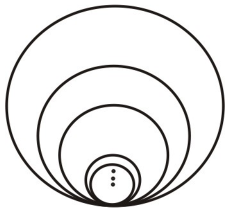
4.2 Ταξινόμηση χώρων επικάλυψης

Θα δείξουμε ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα σε υποομάδες της $\pi_1(X, x_0)$ και σε χώρους επικάλυψης $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ του (X, x_0).

Ορισμός 4.4. *Ο X είναι* **ημιτοπικά απλά συνεκτικός** *(semilocally simply connected) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει γειτονιά U του x τέτοια ώστε ο ομομορφισμός $i_\star : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ είναι τετριμμένος.*
Ο X είναι τοπικά απλά συνεκτικός αν για κάθε $x \in X$ και κάθε γειτονιά W του x υπάρχει γειτονιά $U \subset W$ του x τ.ω. $\pi_1(U, x) = \{1\}$.

Παράδειγμα 4.2. *1. S^1 είναι τοπικά απλά συνεκτικός.*

2. *Σκουλαρίκι της Χαβάης*



δεν είναι (ημι)τοπικά απλά συνεκτικός.

3. *$CX =$ κώνος πάνω από το σκουλαρίκι της Χαβάης.*
   Είναι ημιτοπικά απλά συνεκτικός αλλά όχι τοπικά απλά συνεκτικός.

Θεώρημα 4.1. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα, ημιτοπικά απλά συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Τότε υπάρχει χώρος επικάλυψης $\tilde{X}$ του X με $\pi_1(\tilde{X}) = 1$. Ο $\tilde{X}$ λέγεται καθολικός χώρος επικάλυψης του X.*

Απόδειξη. Η ιδέα είναι ότι τα σημεία του $\tilde{X}$, μπορούμε να τα δούμε σαν κλάσεις ομοτοπίας μονοπατιών του X.
Ορίζουμε
$$\tilde{X} = \{[\gamma] : \gamma \text{ μονοπάτι στο } X \text{ με } \gamma(0) = x_0\}$$
όπου $[\gamma]$ είναι η κλάση ομοτοπίας του γ (ως προς ομοτοπίες που κρατούν σταθερά τα $\gamma(0)$, $\gamma(1)$).
Ορίζουμε
$$p : \tilde{X} \to X \quad \text{ με } p([\gamma]) = \gamma(1)$$
Αφού ο X είναι συνεκτικός κατά τόξα η p είναι επί. Για να ορίσουμε μία τοπολογία $\mathcal{U}$ στον $\tilde{X}$ αρκεί να ορίσουμε μία βάση της $\mathcal{U}$, δηλαδή μία οικογένεια ανοιχτών $\{U_a\}$ τέτοια ώστε:

1. $\bigcup\{U_a\} = \tilde{X}$
2. Αν $[\gamma] \in U_i \cap U_j$, τότε υπάρχει $U_k \in \{U_a\}$ τέτοιο ώστε $[\gamma] \in U_k$ και $U_k \subset U_i \cap U_j$.
   (Τα ανοιχτά της $\mathcal{U}$ είναι ενώσεις στοιχείων της βάσης)

Έστω U ανοικτό συνεκτικό κατά τόξα τέτοιο ώστε $\pi_1(U, x) \hookrightarrow \pi_1(X, x)$ είναι τετριμμένη.
Αν γ μονοπάτι τέτοιο ώστε $\gamma(1) \in U$, ορίζουμε
$$U_{[\gamma]} = \{[\gamma \cdot \eta] : \eta \text{ μονοπάτι στο } U \text{ με } \eta(0) = \gamma(1)\}$$

Λήμμα. *Η $\{U_a\}$ είναι βάση για μία τοπολογία στον $\tilde{X}$.*

Απόδειξη.

1. Προφανώς αν $[\gamma] \in \tilde{X}$, $[\gamma] \in U_{[\gamma]}$

2. Έστω ότι $[\alpha] \in U_{[\gamma]} \cap V_{[\delta]}$, $\alpha(1) \in U \cap V$.
   Υπάρχει $W \subset U \cap V$, τέτοιο ώστε $\alpha(1) \in W$ και W ανοικτό, συνεκτικό κατά τόξα, τέτοιο ώστε $\pi_1(W) \hookrightarrow \pi_1(X)$ τετριμμένη.
   Τότε $W_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]} \cap V_{[\delta]}$
   Πράγματι, αν $[\alpha \cdot \eta] \in W_{[\alpha]}$

   $$[\alpha] \in U_{[\gamma]} \Rightarrow [\alpha] = [\gamma \cdot \eta_1] \Rightarrow [\alpha \cdot \eta] = [\gamma \cdot \eta_1 \cdot \eta],\, \eta_1\eta \in U \Rightarrow W_{[\alpha]} \subset U_{[\gamma]}$$

   Όμοια $W_{[\alpha]} \subset V_{[\delta]}$.

□

Δείχνουμε τώρα ότι η $p : \tilde{X} \to X$ είναι συνεχής.
Έστω $x \in X$ και $[\gamma] \in \tilde{X}$ με $\gamma(1) = x$. Θεωρούμε U ανοικτή γειτονιά του x και $V \subset U$ ανοικτό, συνεκτικό κατά τόξα τέτοιο ώστε $x \in V$ και $\pi_1(V) \hookrightarrow \pi_1(X)$ τετριμμένη. Τότε $p(V_{[\gamma]}) \subset U$: Αν $[\gamma \cdot \eta] \in V_{[\gamma]}$, $(\gamma \cdot \eta)(1) \in V \subset U$.
Η απεικόνιση $p : \tilde{X} \to X$ είναι προβολή επικάλυψης: Έστω $x \in X$ και $x \in U$, όπου U ανοικτό, συνεκτικό κατά τόξα με $\pi_1(U) \hookrightarrow \pi_1(X)$ τετριμμένη. Τότε

$$p^{-1}(U) = \{U_{[\gamma]} : \gamma \text{ μονοπάτι από το } x_0 \text{ στο } x\}$$

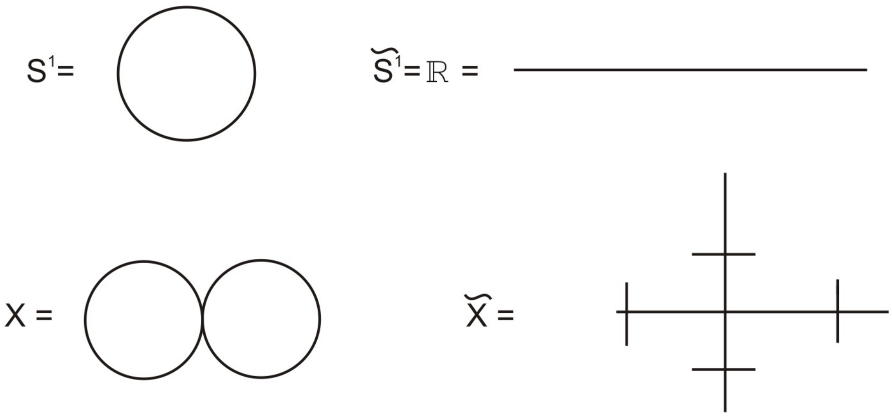
και η $p : U_{[\gamma]} \to U$ είναι ομοιομορφισμός.
Πράγματι, έστω $[\delta] \in p^{-1}(U)$ και η μονοπάτι στο U από το $\delta(1)$ στο x. Τότε $[\delta] = [\delta \cdot \eta \cdot \bar{\eta}]$, δηλαδή $[\delta] \in U_{[\delta \cdot \eta]}$, όπου $\delta \cdot \eta$ μονοπάτι από το x_0 στο x.
Αν $p(\gamma \cdot \eta) = p(\gamma \cdot \eta')$, όπου $\eta, \eta' \in U$, τότε $\eta \simeq \eta'$ αφού $[\eta \cdot \eta'] = 1$ στην $\pi_1(X)$. Άρα $[\gamma \cdot \eta] = [\gamma \cdot \eta']$, δηλαδή η $p : U_{[\gamma]} \to U$ είναι $1-1$. Προφανώς p επί. Επίσης $p^{-1} : U \to U_{[\gamma]}$ συνεχής.
Παρατηρούμε ότι τα $U_{[\gamma]}$ είναι ανοιχτά και ξένα ανά 2. Πράγματι, αν $U_{[\gamma]} \cap U_{[\delta]} \neq \emptyset$, με $U_{[\gamma]}, U_{[\delta]} \subset p^{-1}(U)$, τότε $[\gamma \cdot \eta] = [\delta \cdot \eta_1]$ για κάποια $\eta, \eta_1 \subset U$. Αλλά $[\delta \cdot \eta] = [\delta \cdot \eta_1]$ και

$$[\gamma \cdot \eta] = [\delta \cdot \eta] \Rightarrow [\gamma \cdot \eta \cdot \bar{\eta}] = [\delta \cdot \eta \cdot \bar{\eta}] \Rightarrow [\gamma] = [\delta]$$

Δηλαδή $U_{[\gamma]} = U_{[\delta]}$.
Τέλος δείχνουμε ότι ο $\tilde{X}$ είναι συνεκτικός κατά τόξα και απλά συνεκτικός. Αν $[\gamma] \in \tilde{X}$, θεωρούμε $\gamma_t = \gamma_{|[0,t]}$ ($\gamma_t : [0,1] \to X$, $\gamma_t(x) = \gamma(tx)$). Τότε $f : [0,1] \to \tilde{X}$, όπου $f(t) = [\gamma_t]$ είναι μονοπάτι από το σταθερό μονοπάτι στο $[\gamma]$. Δηλαδή $\tilde{X}$ συνεκτικός κατά τόξα.

Για να δείξουμε ότι $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 1$, αφού η $p_\star$ είναι $1-1$. Έστω ότι $\gamma \in Im(p_\star)$, τότε $\tilde{\gamma}$ είναι βρόγχος. Αλλά $\tilde{\gamma}$ είναι το μονοπάτι $[\gamma_t]$. Έτσι, $[\gamma_t]$ βρόγχος σημαίνει ότι $[\gamma] = [x_0] \Rightarrow [\gamma] = 1$, δηλαδή $Im(p_\star) = \{1\}$. □

Παράδειγμα 4.3.



Πρόταση 4.7. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα, ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Τότε για κάθε υποομάδα $H \leq \pi_1(X, x_0)$ υπάρχει χώρος επικάλυψης $p : X_H \to X$ τέτοιος ώστε $p_\star(\pi_1(X_H, \tilde{x}_0)) = H$ για κάποιο $\tilde{x}_0 \in X_H$.*

Απόδειξη. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στον καθολικό χώρο επικάλυψης $\tilde{X}$:
$[\gamma] \sim [\gamma']$ αν $\gamma(1) = \gamma'(1)$ και $[\gamma \cdot \bar{\gamma'}] \in H$
Προφανώς,

- $[\gamma] \sim [\gamma]$
- $[\gamma] \sim [\delta] \Rightarrow [\delta] \sim [\gamma]$ και
- $[\gamma] \sim [\delta]$, $[\delta] \sim [\zeta] \Rightarrow [\gamma] \sim [\zeta]$

Αν $[\gamma] \sim [\gamma']$, τότε για κάθε $[\gamma \cdot \eta] \in U_{[\gamma]}$ έχουμε $[\gamma \cdot \eta] \sim [\gamma' \cdot \eta]$. Δηλαδή οι γειτονιές $U_{[\gamma]}$, $U_{[\gamma']}$ ταυτίζονται.
Όπως πριν, η απεικόνιση $p : X_H \to X$, όπου $p(\gamma) = \gamma(1)$ είναι προβολή επικάλυψης.
Έστω $\tilde{x}_0$ το μονοπάτι $c(t) = x_0$, $\forall t \in [0,1]$. Τότε $\gamma \in Im(p_\star)$ αν και μόνο αν το μονοπάτι $[\gamma_t]$ είναι βρόγχος, δηλαδή $[\gamma] \sim [c] \Leftrightarrow [\gamma] \in H$. □

Ορισμός 4.5. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα και $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ χώροι επικάλυψης του X. Η $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ είναι* **ισομορφισμός χώρων επικάλυψης** *αν:*

1. $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ *είναι ομοιομορφισμός και*

2. $p_1 = p_2 \circ f$

Δηλαδή αν το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.6. *Αν ισχύει μόνο η συνθήκη 2 του ορισμού 4.5 λέμε ότι η f είναι* **ομομορφισμός χώρων επικάλυψης**.

Ορισμός 4.7. *Αν $p : \tilde{X} \to X$ χώρος επικάλυψης του X, λέμε ότι ο $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ είναι* **αυτομορφισμός** *του $\tilde{X}$ αν ο f είναι ισομορφισμός.*

Πρόταση 4.8. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα και $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$, $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ συνεκτικοί κατά τόξα χώροι επικάλυψης του X. Τότε υπάρχει ισομορφισμός $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ με $f(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, όπου $\tilde{x}_1 \in p_1^{-1}(x_0)$, $\tilde{x}_2 \in p_2^{-1}(x_0)$, αν και μόνο αν $p_{1\star}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) = p_{2\star}(\pi_2(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$.*

Απόδειξη.

1. Έστω ότι υπάρχει $f : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ ισομορφισμός. Τότε έχουμε:

$$p_2 \circ f = p_1 \Rightarrow p_{2\star} \circ f_\star = p_{1\star} \Rightarrow Im(p_{1\star}) \subset Im(p_{2\star})$$

   Όμοια $p_2 = p_1 \circ f^{-1} \Rightarrow Im(p_{2\star}) \subset Im(p_{1\star})$. Άρα $Im(p_{1\star}) = Im(p_{2\star})$.

2. Αντίστροφα, αν ισχύει η ισότητα έχουμε ανυψώσεις:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, shift right, "\tilde{p_1}"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[ll, shift right, "\tilde{p_2}"'] \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   $p_2\tilde{p_1} = p_1$, $p_1\tilde{p_2} = p_2$ με $\tilde{p_1}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$, $\tilde{p_2}(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$
   Επίσης $p_1(\tilde{p_2}\tilde{p_1}) = p_1$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\tilde{p_2}\tilde{p_1}"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_1 \arrow[dl, "p_1"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

   Η $\tilde{p_2}\tilde{p_1}$ είναι ανύψωση της p_1 με $\tilde{p_2}\tilde{p_1}(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1$. Άρα $\tilde{p_2}\tilde{p_1} = id$.
   Όμοια, $\tilde{p_1}\tilde{p_2} = id$, άρα $\tilde{p_1}$, $\tilde{p_2}$ ισομορφισμοί.

$\square$

Θεώρημα 4.2. *Έστω X συνεκτικός κατά τόξα, τοπικά συνεκτικός κατά τόξα, ημιτοπικά απλά συνεκτικός. Υπάρχει $1-1$ αντιστοιχία*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{χώροι επικάλυψης } (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \textit{ του } X \\ \textit{με σημείο βάσης } \tilde{x}_0. \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \textit{ Υποομάδες της } \pi_1(X, x_0) \right\}$$

$$(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$$

Αν ξεχάσουμε τα σημεία αναφοράς έχουμε την 1-1 αντιστοιχία:

$$\left\{ \textit{ χώροι επικάλυψης } \tilde{X} \textit{ του } X \right\} \longleftrightarrow \left\{ \textit{ Κλάσεις συζυγίας υποομάδων της } \pi_1(X, x_0) \right\}$$

Απόδειξη. Το πρώτο μέρος το έχουμε ήδη αποδείξει.
Θέτουμε $H = p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$
Έστω ότι αλλάζουμε σημείο αναφοράς $(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, όπου $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$.
Θεωρούμε μονοπάτι γ από το $\tilde{x}_0$ στο $\tilde{x}_1$. Αν $\delta \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$, τότε $\gamma\delta\bar{\gamma} \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Έχουμε:

$$p(\gamma\delta\bar{\gamma}) = p(\gamma)p(\delta)p(\gamma)^{-1} = \alpha p(\delta)\alpha^{-1} \in H \Rightarrow p(\delta) \in \alpha^{-1}H\alpha$$

Επίσης, αν $\beta \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, τότε $\beta = \gamma\delta\bar{\gamma}$ για κάποιο δ και $\alpha^{-1}\beta\alpha = p(\delta)$. Επομένως $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \alpha^{-1}H\alpha$.
Αντίστροφα, αν $g \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, έστω γ βρόγχος με $[\gamma] = g^{-1}$ και $\tilde{\gamma}$ ανύψωση του γ από το $\tilde{x}_0$. Αν $\tilde{x}_1 = \gamma(1)$, τότε $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = gHg^{-1}$. $\square$

Παρατήρηση 4.2. *Αν $p : \tilde{X} \to X$ καθολικός χώρος επικάλυψης και $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ χώρος επικάλυψης, τότε, αφού $Im(p_\star) \subset Im(p_{1\star})$, υπάρχει $\tilde{p_1} : \tilde{X} \to \tilde{X}_1$ τέτοια ώστε $p = p_1 \circ \tilde{p_1}$, και η $\tilde{p_1}$ είναι προβολή επικάλυψης.*

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{X} \arrow[dl, "\tilde{p_1}"'] \arrow[d, "p"] \\
\tilde{X}_1 \arrow[r, "p_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

Επίσης ο καθολικός χώρος επικάλυψης $\tilde{X}$ είναι μοναδικός, από το προηγούμενο θεώρημα.

4.3 Μετασχηματισμοί Επικάλυψης (Deck transformations)

Ορισμός 4.8. *Έστω $p : \tilde{X} \to X$ χώρος επικάλυψης. Οι αυτομορφισμοί $f : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ονομάζονται* **μετασχηματισμοί επικάλυψης**. *Συμβολίζουμε με $G(\tilde{X})$ την ομάδα όλων των αυτομορφισμών αυτών, με πράξη τη σύνθεση.*

Παράδειγμα 4.4. *1.* $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

Μετασχηματισμοί επικάλυψης:

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+n \end{array}$$

για $n \in \mathbb{Z}$, *άρα* $G(\tilde{X}) = \mathbb{Z}$.

2. *Αν* $X = S^1$, $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^n$, *τότε* $G(\tilde{X}) = \mathbb{Z}_n$

Παρατήρηση 4.3. *Έστω* $p : \tilde{X} \to X$, $\tilde{X}$ *συνεκτικός και* $g \in G(\tilde{X})$. *Αν* $gx = x$ *για κάποιο* $x \in \tilde{X}$, *τότε* $g = id$.

Απόδειξη. Από τη μοναδικότητα της ανύψωσης:

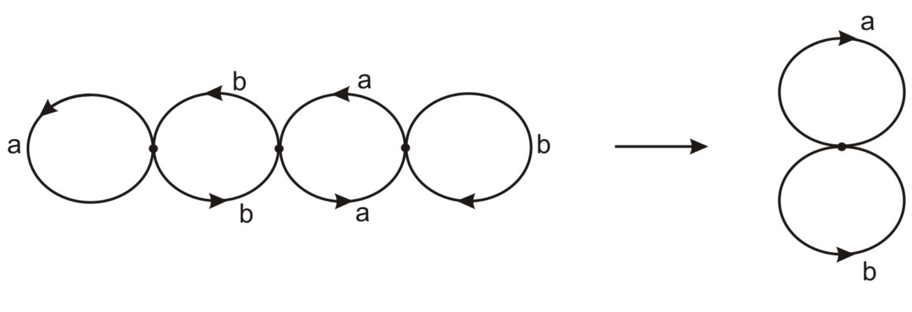
$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "id"'] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

□

Ορισμός 4.9. *Ο χώρος επικάλυψης* $p : \tilde{X} \to X$ *ονομάζεται* **κανονικός** *αν για κάθε* $x \in X$ *και για κάθε* $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}(x)$, *υπάρχει* $g \in G(\tilde{X})$ *τέτοιο ώστε* $g\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

Παράδειγμα 4.5. *1.* $p : \mathbb{R} \to S^1$ *κανονικός.*

2. *Ο παρακάτω χώρος επικάλυψης δεν είναι κανονικός:*



Πρόταση 4.9. *Έστω* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *συνεκτικός κατά τόξα χώρος επικάλυψης του συνεκτικού κατά τόξα, τοπικά συνεκτικού κατά τόξα χώρου* X *και έστω* H *η υποομάδα* $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$. *Τότε*

1. *Ο χώρος επικάλυψης* $\tilde{X}$ *είναι κανονικός αν και μόνο αν* $H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$.

2. *$G(\tilde{X}) = N(H)/H$, όπου $N(H)$ η κανονικοποιούσα της H στην $\pi_1(X, x_0)$.*
   Ειδικότερα, αν $\tilde{X}$ κανονικός, $G(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)/H$.

Αν $\tilde{X}$ καθολικός χώρος επικάλυψης, τότε $G(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$

Απόδειξη.

1. Έχουμε

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{X}, \tilde{x}_1) \arrow[dl, "p"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

   $p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) = \gamma p_\star(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\gamma^{-1} = \gamma H \gamma^{-1}$, όπου $\gamma = p_\star(\delta)$ και δ μονοπάτι από το $\tilde{x}_1$ στο $\tilde{x}_0$.
   Άρα $\tilde{X}$ κανονικός αν και μόνο αν $H \lhd G(\tilde{X})$
   $\exists g : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ αυτομορφισμός αν και μόνο αν $H = \gamma H \gamma^{-1}$.

2. Αν $\gamma \in N(H)$ και $\tilde{\gamma}$ ανύψωση του γ στο $\tilde{X}$, τότε υπάρχει $g \in G(\tilde{X})$ με $g(\tilde{\gamma}(0)) = \tilde{\gamma}(1)$.
   Ορίζουμε $\varphi : N(H) \to G(\tilde{X})$ με $\varphi(\gamma) = g$.
   φ ομομορφισμός: Αν $\gamma_1, \gamma_2 \in N(H)$, τότε

$$\varphi(\gamma_1\gamma_2)(\tilde{x}_0) = \tilde{\gamma_1}\tilde{\gamma_2}(1) \quad \varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)(\tilde{x}_0) = \varphi(\gamma_1)\tilde{\gamma_2}(1) = \tilde{\gamma_1}\tilde{\gamma_2}(1)$$

   Επομένως, $\varphi(\gamma_1\gamma_2) = \varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)$.
   $\ker(\varphi) = \{\gamma \in N(H) : \tilde{\gamma}(1) = x_0\} = H$

□

4.4 Δράσεις Ομάδων

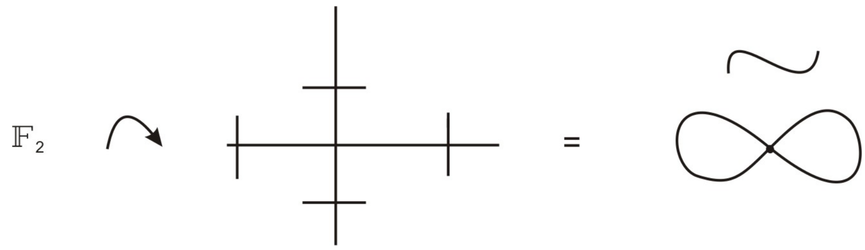
Έστω G ομάδα και Y χώρος.

Ορισμός 4.10. *Μία* **δράση** *της ομάδας G στον χώρο Y είναι ένας ομομορφισμός $\rho : G \to Homeo(Y)$.*
Λέμε απλά ότι η G **δρα στον** *Y και γράφουμε $G \curvearrowright Y$.*
Αν $g \in G$, τότε $\rho(g) : Y \to Y$ ομοιομορφισμός.
Γράφουμε απλούστερα $g : Y \to Y$ και $g \cdot y$ αντί για $g(y)$ αν $y \in Y$.
Ισοδύναμα μία δράση αντιστοιχεί σε κάθε $g \in G$, έναν ομοιομορφισμό $g : Y \to Y$ έτσι ώστε για κάθε $g_1, g_2 \in G$ και για κάθε $y \in Y$, $(g_1 \cdot g_2)y = g_1(g_2 y)$.

Ορισμός 4.11. *Έστω ότι $G \curvearrowright Y$. Λέμε ότι η δράση είναι* **δράση επικάλυψης** *αν για κάθε $x \in Y$ υπάρχει U γειτονιά του x τέτοια ώστε $g(U) \cap U = \emptyset$, $\forall g \neq e$.*

Παρατήρηση 4.4. *Η δράση της $G(\tilde{X})$ στον συνεκτικό χώρο $\tilde{X}$ είναι δράση επικάλυψης. Πράγματι, αν $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $g \neq 1$, και $\tilde{U}$ γειτονιά επικάλυψης τότε $g(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$. Ειδικότερα, αν $\tilde{X}$ καθολικός χώρος επικάλυψης, αφού $G(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0)$, έχουμε ότι $\pi_1(X, x_0) \curvearrowright \tilde{X}$.*

Παράδειγμα 4.6.



Ορισμός 4.12. *Έστω ότι $G \curvearrowright Y$. Ο χώρος πηλίκο της δράσης Y/G ορίζεται με $Y/\sim$, όπου $y \sim g(y)$, $\forall g \in G$, $\forall y \in Y$.*
Ο Y/G λέγεται **χώρος τροχιών**.
Τα σημεία του Y/G είναι οι τροχιές $Gy = \{gy : g \in G\}$.

Παράδειγμα 4.7.

1. *Αν $\tilde{X}$ καθολικός χώρος επικάλυψης του X, τότε $\tilde{X}/G(\tilde{X}) = X$.*
2. *$\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$, $x \to n(x) = x + n$, $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \approx S^1$.*

Απόδειξη.

1. Ορίζουμε $f : \tilde{X}/G(\tilde{X}) \to X$, $G = G(\tilde{X})$
   $f(Gx) = p(x)$ (η G δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$ αφού $\tilde{X}$ κανονικός)
   άρα η f είναι $1-1$.
   Η f είναι συνεχής: Έστω $x \in X$, και $U \ni x$, ανοικτό. Μπορώ να υποθέσω ότι η U είναι γειτονιά επικάλυψης, τότε $p^{-1}(U)$ είναι ξένη ένωση από ανοιχτά $\approx U$.
   $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/G$, $\pi(p^{-1}(U))$ ανοικτό και $f(\pi(p^{-1}(U)) = U$, άρα f συνεχής,
   Προφανώς η f είναι επί.
   Χρησιμοποιώντας γειτονιές επικάλυψης όπως πριν έχουμε ότι η f είναι ανοικτή επομένως η f^{-1} είναι συνεχής.

$\square$

Πρόταση 4.10. *Έστω μία δράση επικάλυψης $G \curvearrowright Y$. Τότε*

1. Η $p : Y \to Y/G$, $p(y) = Gy$ είναι προβολή επικάλυψης και ο Y είναι κανονικός χώρος επικάλυψης.

2. $G = G(Y)$ αν ο Y είναι συνεκτικός κατά τόξα.

3. $G \simeq \pi_1(Y/G)/p_\star(\pi_1(Y))$ αν ο Y είναι συνεκτικός κατά τόξα και τοπικά συνεκτικός κατά τόξα.

Απόδειξη.

1. Έστω $x \in Y$, αν U γειτονιά του x τέτοια ώστε $gU \cap U = \emptyset$ για κάθε $g \in G$, $g \neq 1$ τότε $p(U)$ ανοικτό και $p : U \to p(U)$ ομοιομορφισμός, άρα U γειτονιά επικάλυψης του $p(x)$.
   Εξ'ορισμού η G δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$. Επίσης η G περιέχεται στην ομάδα μετασχηματισμών του χώρου επικάλυψης $G(Y)$ άρα Y κανονικός χώρος επικάλυψης.

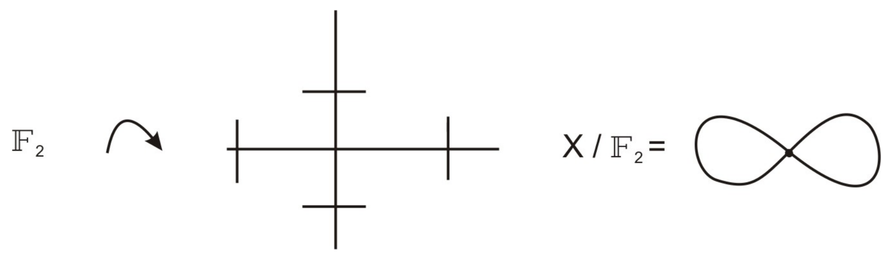
2. Η G δρα μεταβατικά στο $p^{-1}(x)$, $G \subset G(\tilde{X})$, άρα $G = G(\tilde{X})$ (αν για 2 μετασχηματισμούς επικάλυψης ισχύει ότι $g_1 x = g_2 x$, τότε $g_1 = g_2$ αφού Y συνεκτικός κατά τόξα.)

3. Από την προηγούμενη πρόταση.

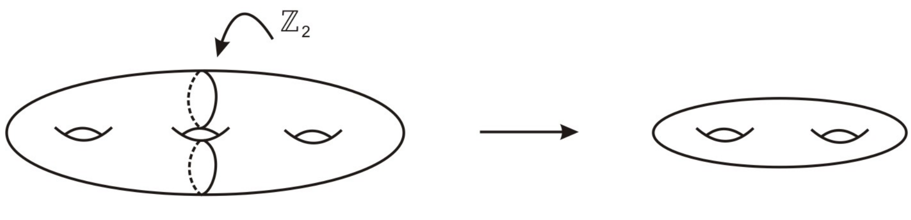
□

Παράδειγμα 4.8.

1.



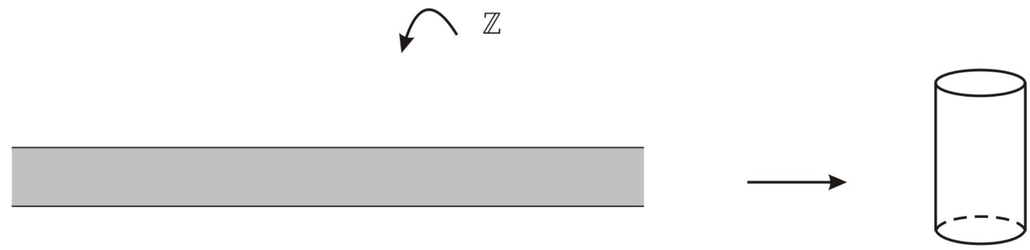
2.



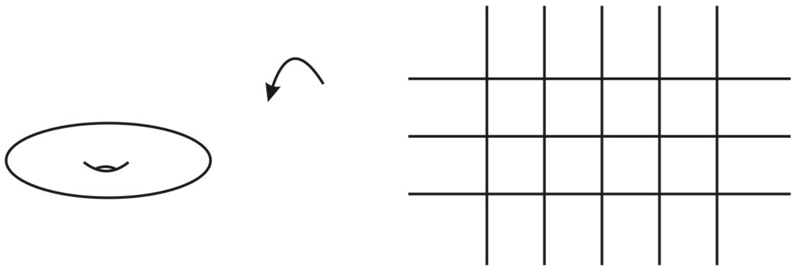
Άρα $\pi_1(S_3) \triangleleft \pi_1(S_2)$
$|\pi_1(S_2) : \pi_1(S_3)| = 2$

3. $\mathbb{Z}_2 = \{e, a\} \curvearrowright S^n$, *όπου* $e(x) = x$, $a(x) = -x$
$S^n/\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}P^n$, *άρα* $\pi_1(\mathbb{R}P^n) = \mathbb{Z}_2$

4.



5. $\tilde{T}^2 = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{Z}^2 \curvearrowright \mathbb{R}^2$ *και* $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$
$(m, n)(x, y) = (m + x, n + y)$



6.

$\mathbb{Z}^2 \star \mathbb{Z}^2 \star \mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}^2 \star \mathbb{Z}$ *δείκτη 2.*

4.5 Εφαρμογή στη Θεωρία Ομάδων

Ορισμός 4.13. *Ένα* **δέντρο** *είναι ένα συσταλτό συνεκτικό γράφημα.*

Πρόταση 4.11. *Έστω Γ συνεκτικό γράφημα.*
Το Γ περιέχει ένα maximal δέντρο T.

Απόδειξη. Υπάρχει μερική διάταξη στο σύνολο των υποδέντρων του Γ.
Αν $T_1 \subset T_2 \subset \cdots \subset T_n \subset \ldots$ αύξουσα ακολουθία υποδέντρων, τότε $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$ υποδέντρο του Γ.
Από το λήμμα του Zorn, υπάρχει maximal δέντρο T. $\square$

Παρατήρηση 4.5. *Το T περιέχει όλες τις κορυφές του Γ.*

Αν Γ είναι ένα γράφημα συμβολίζουμε με $E(\Gamma)$ το σύνολο ακμών του Γ.

Πρόταση 4.12. *Έστω Γ γράφημα T maximal δέντρο του Γ και $E = \{e \in E(\Gamma) - E(T)\}$. Τότε $\pi_1(\Gamma) = \mathop{\star}\limits_{e \in E} \mathbb{Z}_e$, όπου $\mathbb{Z}_e \simeq \mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in T$. Ορίζουμε ομομορφισμό $\varphi : \star\mathbb{Z}_e \to \Gamma$.
Αν $e = [x_1, x_2]$ και γ, δ μονοπάτια από το x_0 σε x_1, x_2, έχουμε $\varphi(e) = \gamma e \bar{\delta}$.
Επαγωγικά, βλέπουμε ότι η πρόταση ισχύει για πεπερασμένα υπογραφήματα.
Θα δείξουμε ότι η φ είναι επί.
Αν $\gamma \in \pi_1(\Gamma, x_0)$, Τότε το γ περιέχεται σε κάποιο πεπερασμένο υπογράφημα Δ. Θεωρούμε A ανοιχτό σύνολο του $\Delta \cup T$ που δεν περιέχει καμία ακμή που δεν ανήκει στο Δ και B ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $\Gamma - \Delta$ και το T ενώ δεν περιέχει καμία ακμή του Δ. Τότε το T είναι συστολή παραμόρφωσης του $A \cap B$ και το Δ είναι συστολή παραμόρφωσης του A. Επομένως από το θεώρημα van-Kampen $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Delta) \star \pi_1(\Gamma')$. Αφού το θεώρημα ισχύει για πεπερασμένα υπογραφήματα έχουμε ότι $[\gamma] \in im\,(\varphi)$
Η φ είναι $1-1$:
Όμοια $\pi_1(\Gamma) = \pi_1(\Delta) \star \pi_1(\Gamma')$. Αν $\varphi(a) \in \pi_1(\Delta)$ και $\varphi(a) = 1$, τότε $a \in \ker\varphi$ για την απεικόνιση στο πεπερασμένο γράφημα Δ που είναι $1-1$. $\square$

Θεώρημα 4.3. *Κάθε υποομάδα της $\mathbb{F}_n$ είναι ελεύθερη.*

Απόδειξη. $\mathbb{F}_n = \pi_1(X)$, όπου X είναι το μπουκέτο από n, το πλήθος, κύκλους. Αν $H \leqslant \mathbb{F}_n$, τότε υπάρχει X_H χώρος επικάλυψης του X με $\pi_1(X_H) = H$. Προφανώς X_H είναι γράφημα επομένως η $\pi_1(X_H) = H$ είναι ελεύθερη. $\square$

Πρόταση 4.13. *Αν $N \lhd \mathbb{F}_n$, N πεπερασμένα παραγόμενη, τότε $|\mathbb{F}_n : N| < \infty$.*

Απόδειξη. (σκιαγράφηση) Έστω $p : X_N \to \mathbb{F}_n$. $|\mathbb{F}_n : N| = |p^{-1}(X)|$ αν $|p^{-1}(X)|$ άπειρο και c κύκλος στο X_N, τότε το X_N έχει άπειρους κύκλους και $\pi_1(X_N)$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη. $\square$

Index