

## Ασκήσεις 2

### Αλγεβρική Τοπολογία

1. Δείξτε ότι η  $S^{n-1}$  είναι συστολή παραμόρφωσης του  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ .
2. Δείξτε ότι μία απεικόνιση ομοτοπική με μία ομοτοπική ισοδυναμία, είναι ομοτοπική ισοδυναμία.
3. Δείξτε ότι ο χώρος  $X$  είναι συσταλτός αν και μόνο αν κάθε απεικόνιση  $f : X \rightarrow Y$ , για οποιοδήποτε  $Y$ , είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.  
Δείξτε ότι ο χώρος  $X$  είναι συσταλτός αν και μόνο αν κάθε απεικόνιση  $f : Y \rightarrow X$ , για οποιοδήποτε  $Y$ , είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
4. Δείξτε ότι υπάρχει συστολή παραμόρφωσης από το *torus* πλην ένα σημείο στο  $S^1 \vee S^1$ .
5. Έστω  $v, e, f$  ακέραιοι τ.ω.  $v - e + f = 2$ . Δείξτε ότι μπορούμε να παραστήσουμε τη σφαίρα  $S^2$  σε  $CW$ -σύμπλεγμα με  $v$  κορυφές,  $e$  ακμές και  $f$  2-κελιά.
6. Έστω  $X$  τοπολογικός χώρος. Δείξτε ότι οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:
  1. Κάθε απεικόνιση  $f : S^1 \rightarrow X$  είναι ομοτοπική με σταθερή απεικόνιση.
  2. Κάθε απεικόνιση  $f : S^1 \rightarrow X$  επεκτείνεται σε  $\bar{f} : D^2 \rightarrow X$ .
  3.  $\pi_1(X, x_0) = 1$  για κάθε  $x_0 \in X$ .
7. Δείξτε ότι ο ισομορφισμός αλλαγής σημείου βάσης  $\beta_h$  εξαρτάται μόνο από την κλάση ομοτοπίας του  $h$ .