

Ασκήσεις 3

Αλγεβρική Τοπολογία

1. Δείξτε ότι αν $f : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(S^1)$ ομομορφισμός τότε υπάρχει συνεχής απεικόνιση $\phi : S^1 \rightarrow S^1$ τέτοια ώστε $\phi_* = f$.

2. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συστολή από τον 'στερεό torus' $S^1 \times D^2$ στο σύνορό του $S^1 \times S^1$.

3. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συστολή από την ταινία Möbius στο σύνορό της.

4*. Έστω G τοπολογική ομάδα συνεκτική κατά τόξα. Δηλαδή η G είναι τοπολογικός χώρος εφοδιασμένος με πράξη ομάδας και η πράξη της ομάδας είναι συνεχής ως προς την τοπολογία του χώρου. Δείξτε ότι η $\pi_1(G, e)$ είναι αβελιανή.

5. Δείξτε ότι οι ακόλουθες παραστάσεις είναι παραστάσεις της τετριμμένης ομάδας:

i) $\langle a, b, c \mid aba^{-1} = b^2, bcb^{-1} = c^2, cac^{-1} = a^2 \rangle$

ii) $\langle a, b \mid a^n = b^{n+1}, aba = bab \rangle$

iii) $\langle a, b \mid ab^n a^{-1} = b^{n+1}, ba^n b^{-1} = a^{n+1} \rangle$.

6. Δείξτε ότι η ομάδα

$$G = \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle$$

δεν είναι τετριμμένη.