Ασκήσεις Κεφαλαίου 1

1. (α) $1 \subseteq \{1,3,5,2\}$ Σ

(β) $\{1,2\} \subseteq \{1,3,5,2\}$ Σ

(γ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\} \subseteq \{1,3,5\}$ Λ

(δ) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\} \in \mathbb{N}$ Λ

(ε) $\sqrt{2} \in \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2=0\}$ Λ

(στ) $-3 \in \{a \in \mathbb{N} \mid a>2\}$ Λ

(ζ) $\{1\} \in \{1,2,3\}$ Λ

(η) $\{1\} \subseteq \{1,2,3\}$ Σ

(ια) $\{\{2\}\} \in \{1,\{2\}\}$ Λ

(ι) $\{1,2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$ Λ

(θ) $1 \subseteq \{1,2,3\}$ Λ

(ιβ) $\{\{2\}\} \subseteq \{1,\{2\}\}$ Σ

(ιγ) $\phi \subseteq \phi$ Σ

(ιδ) $\phi \in \phi$ Λ

(ιε) $\phi \in \{\phi\}$ Σ

(ιστ) $\phi \subseteq \{\phi\}$ Σ

$\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών, $\mathbb{N}$ το σύνολο φυσικών αριθμών

2. Αν $A=\{1,2,3\}$

(α) $A \cup \{A\} = \{1,2,3,\{1,2,3\}\}$

(β) $\phi \cup \{\phi\} = \{\phi\}$, $\phi \cap \{\phi\} = \phi$

3. $A=\{-1,1,2\}=\{-1,2,1,2\}=B$

$C=\{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 2 \text{ και } n \neq 0\} = \{-1,1,2,-2\} = \{-2,2\} \cup \{1,-1\}$

$\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων

4. (α) $A \cup \phi = A$, $A \cap \phi = \phi$, $A \cap A = A$, $A \cup A = A$

$A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$ (προφανώς από τον ορισμό)

(δ) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$

$x \in (A \cup B) \cup \Gamma \Leftrightarrow$ είτε $x \in A$, είτε $x \in B$ είτε $x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup \Gamma)$

5. Αν $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,5,6,7\}$

$A \cup B = \{1,2,3,5,6,7\}$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = \{2,3\}$

$B \setminus A = \{5,6,7\}$, $A \Delta B = \{2,3,5,6,7\}$

6. $V=\{a,f,X\}$, $W=\{1,f,\phi,\{a\}\}$ $V \setminus W = \{a,X\}$, $W \setminus V = \{1,\phi,\{a\}\}$

7. Αν $A=\{a,b,\{a,\gamma\},\phi\}$, τότε

$A \setminus \{a\} = \{b,\{a,\gamma\},\phi\}$, $A \setminus \phi = A$, $A \setminus \{a,\gamma\} = \{b,\{a,\gamma\},\phi\}$

$A \Delta \{\{a,\gamma\}\} = A \cup \{\{a,\gamma\}\} \setminus A \cap \{\{a,\gamma\}\} = A \setminus \{\{a,\gamma\}\}$

$= \{a,b,\phi\}$.

8. $A = [2,4]$, $B = (1,3]$, $\Gamma = [0,5)$

$A \cap B = [2,3]$, $A \cup B = (1,4]$, $A \setminus B = (3,4]$, $B \setminus A = (1,2)$

$(A \cap \Gamma) \cup B = [2,4] \cup (1,3] = (1,4]$

11 (α) $(A \Delta B) \Delta A = B$

$x \in (A \Delta B) \Delta A \Leftrightarrow x \in [(A\Delta B) \setminus A] \cup [A \setminus (A \Delta B)] \Leftrightarrow$

είτε $(x \in A \Delta B$ και $x \notin A)$, είτε $(x \in A$ και $x \notin A \Delta B)$

$\Leftrightarrow$ είτε $(x \in (A \cup B \setminus A \cap B)$ και $x \notin A)$

είτε $(x \in A$ και $x \notin (A \cup B \setminus A \cap B))$

$\Leftrightarrow$ είτε $(x \in A \cup B$, $x \notin A \cap B$ και $x \notin A)$

είτε $(x \in A$ και $x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow$ είτε $(x \in B$ και $x \notin A \cap B)$

είτε $(x \in A$ και $x \in A \cap B)$

$\Leftrightarrow$ $x \in (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B) \Leftrightarrow x \in B$

12 (α) Αν $A \Delta B = A \Delta \Gamma$, τότε $B = \Gamma$

Άπο την προηγούμενη άσκηση $(A \Delta B) \Delta A = B$

Άρα και $(A \Delta \Gamma) \Delta A = \Gamma$

Οπότε άν $A \Delta \Gamma = A \Delta B$, τότε $B = \Gamma$

(β) $X = A \Delta B$ (άσκηση 11α)

11 (δ) Ισχύει $(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

[$x \in (A \cup B) \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \cup B$ και $x \in \Gamma \Leftrightarrow$ είτε $x \in A$ είτε $x \in B$ και $x \in \Gamma$

$\Leftrightarrow$ είτε $(x \in A$ και $x \in \Gamma)$, είτε $(x \in B$ και $x \in \Gamma)$

$\Leftrightarrow$ είτε $x \in A \cap \Gamma$ είτε $x \in B \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)$

(γ) Ισχύει $(A \setminus B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \setminus (B \cap \Gamma)$.

[$x \in (A \setminus B) \cap \Gamma \Leftrightarrow x \in A \setminus B$ και $x \in \Gamma \Leftrightarrow x \in A$, $x \notin B$ και $x \in \Gamma$

$\Leftrightarrow (x \in A$ και $x \in \Gamma)$ και $(x \in \Gamma$ και $x \notin B)$

$\Leftrightarrow$ $x \in A \cap \Gamma$ και $x \notin \Gamma \cap B$

$\Leftrightarrow$ $x \in (A \cap \Gamma) \setminus (B \cap \Gamma)$

(β) Ισχύει $(A \Delta B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \Delta (B \cap \Gamma)$

$(A \Delta B) \cap \Gamma = (A \cup B \setminus A \cap B) \cap \Gamma \overset{(\gamma)}{=} (A \cup B) \cap \Gamma \setminus (A \cap B) \cap \Gamma =$

$= (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) \setminus A \cap B \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \Delta (B \cap \Gamma)$

14. $A=\{\phi, \{\phi\}\}$, $B=\{a, \{a\}, b\}$ $\mathcal{P}(X)=\{A \mid A\subseteq X\}$

$\phi \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow \phi \subseteq A$ (A), $\phi \subseteq \mathcal{P}(A)$ (A), $\{\phi\} \in \mathcal{P}(A)$ (A)

$\{\{a\}\} \in \mathcal{P}(B)$ (A) , $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ (A)

$\{\{a\}, b\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ (Ψ) , $\{\{a\}, \{\{a\}\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ (A)

15(α) Αν A, B, Γ σύνολα με $A\in B$ και $B\subseteq \Gamma$, τότε $A\in\Gamma$. (A

(β) Αν A,B,Γ σύνολα με $A\in B$ και $B\subseteq\Gamma$, τότε $A\subseteq\Gamma$ (Ψ)

διότι αν $A=\{1\}$, $B=\{\{1\},3,5\}$, $\Gamma=\{\{1\},3,5,7\}$

έχουμε $A\in B$, $B\subseteq\Gamma$ και δεν ισχύει $A\subseteq\Gamma$.

(γ) Αν A,B,Γ σύνολα με $A\subseteq B$ και $B\in\Gamma$, τότε $A\subseteq\Gamma$ (Ψ)

$A=\{1\}$, $B=\{1,2\}$, $\Gamma=\{\{1,2\},3\}$ $A\nsubseteq\Gamma$

(δ) Αν A,B,Γ σύνολα με $A\in B$ και $B\in\Gamma$, τότε $A\in\Gamma$ (Ψ

$A=\{1\}$, $B=\{\{1\},2\}$ $\Gamma=\{\{\{1\},2\},5\}$ $A\notin\Gamma$

16. $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))=\mathcal{P}(\{\phi\})=\{\phi,\{\phi\}\}$,

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))=\mathcal{P}(\{\phi,\{\phi\}\})=\{\phi,\{\phi\},\{\{\phi\}\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$

14 (α) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A\cup B)$

Έστω $X\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow$ είτε $X\subseteq A$ είτε $X\subseteq B \Rightarrow$

$X\subseteq A\cup B \Rightarrow X\in\mathcal{P}(A\cup B)$

(β) $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A\subseteq B$ ή $B\subseteq A$

($\Rightarrow$) Έστω $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$. Ας υποθέσουμε ότι $A\nsubseteq B$ και $B\nsubseteq A$, δηλαδή δεν ισχύει το συμπέρασμα. Τότε υπάρχει $x\in A\setminus B$ και $y\in B\setminus A$, οπότε $x\neq y$. ~~Και~~ Έχουμε ότι $\{x,y\}\in\mathcal{P}(A\cup B)$ ενώ $\{x,y\}\notin\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$. Άτοπο!

Άρα, είτε $A\subseteq B$ είτε $B\subseteq A$.

($\Leftarrow$) Έστω $A\subseteq B$ ή $B\subseteq A$. Αν $A\subseteq B$, τότε $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B)$ και $A\cup B=B$, άρα $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ διότι $A\subseteq B$.

Αν $B\subseteq A$, τότε $\mathcal{P}(B)\subseteq\mathcal{P}(A)$ και $A\cup B=A$, άρα $\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)$ διότι $B\subseteq A$.

17. Έστω ένα σύνολο X και $A \subseteq X$. Αν $Z = X \cup \mathcal{P}(X)$, τότε $A \subseteq Z$ και $A \in Z$.

Αν $Z = X \cup \mathcal{P}(X)$, τότε $A \subseteq X$, άρα $A \subseteq X \cup \mathcal{P}(X) = Z$
Επίσης $A \in \mathcal{P}(X)$ αφού $A \subseteq X$, άρα $A \in Z = X \cup \mathcal{P}(X)$

18. Αν το A έχει n στοιχεία το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ έχει 2^n στοιχεία (απόδειξη με επαγωγή)

20. Αν A, B δύο πεπερασμένα (όχι άπειρα) σύνολα και $|X|$ είναι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου X, τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Πράγματι, $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B)$, ~~που~~ όπου τα σύνολα $A \setminus A \cap B$, $B \setminus A \cap B$, $A \cap B$ είναι ξένα ανά δύο μεταξύ τους και πεπερασμένα. Άρα ισχύει το ζητούμενο

21 $A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma$. Από άσκηση 20 έχουμε:

$$|A \cup B \cup \Gamma| = |(A \cup B) \cup \Gamma| = |A \cup B| + |\Gamma| - |(A \cup B) \cap \Gamma| =$$
$$= |A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)|$$
$$= |A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - (|A \cap \Gamma| + |B \cap \Gamma| - |A \cap B \cap \Gamma|)$$
$$= |A| + |B| + |\Gamma| - |A \cap B| - |A \cap \Gamma| - |B \cap \Gamma| + |A \cap B \cap \Gamma|.$$

22. Προφανής