3 Ασκήσεις για διμελείς σχέσεις

23. $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad \alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$j:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ $\quad (\beta^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \beta\notin\{1,-1\})$

24. $\varphi:(-\infty,1]\cup[2,3]\cup[4,+\infty)\to\mathbb{R}$ | $V:(-1,1)\to\mathbb{R}$

διότι πρέπει $(u-1)(u-2)(u-3)(u-4)\geq 0$ | διότι $1-t^2>0 \Leftrightarrow |t|<1$

25.-26. (α) x^3 είναι 1-1 και επί, διότι

$f(\sqrt[3]{y})=y \ \forall y\in\mathbb{R}$, $x_1^3=x_2^3 \Leftrightarrow x_1=x_2$

(β) Η $f(x)=x-4$ είναι 1-1 και επί, διότι

$x_1-4=x_2-4 \Leftrightarrow x_1=x_2$ και $f(y+4)=y \ \forall y\in\mathbb{R}$

(γ) Η $f(x)=e^x+3$

$f(\mathbb{R})=(3,+\infty)$ όχι επί, είναι 1-1 ($e^{x_1}=e^{x_2}\Leftrightarrow x_1=x_2$)

(δ) $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x=0\\ \frac{1}{x} & \text{αν } x\neq 0\end{cases}$ είναι επί διότι $0=f(0)$

και $f(\frac{1}{y})=y$ για $y\neq 0$

και είναι 1-1 διότι αν $x_1\neq x_2$, τότε

αν $x_1,x_2\neq 0$ $f(x_1)\neq f(x_2)$ και αν $x_1=0$ $x_2\neq 0$

$f(x_1)=0\neq\frac{1}{x_2}$

27-28 (β) $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$ άρα όχι επί

και όχι 1-1 διότι $|2|=f(2)=|-2|=f(-2)$

Η g είναι 1-1 και επί (όπως παραπάνω)

29. $f_\alpha:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad f_\alpha(z)=2z$ $\quad$ (1-1 όχι επί)

$f_\beta:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad f_\beta(z)=\begin{cases}k & \text{αν } z=2k \text{ για } k\in\mathbb{Z}\\ 1 & \text{αν } z=2k+1,\ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

(επί, όχι 1-1)

$f_\gamma:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad f_\gamma(z)=z$ $\quad$ (1-1 και επί)

$f_\delta:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ $\quad f_\delta(z)=\begin{cases}0 & \text{αν } z=2k \text{ για } k\in\mathbb{Z}\\ 1 & \text{αν } z=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}$

όχι επί, όχι 1-1

30 Η f είναι επί του $\mathbb{R}$ (γιατί;)
Η f δεν είναι 1-1 (αν έχουμε δίσκους ίσους με διαφορετικά κέντρα)

31 Η g είναι 1-1 και επί του $\mathbb{R}$ (γιατί;)

35 $f\circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f\circ f(n) = f(f(n)) = f(n+1) = n+2$
$f\circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f\circ g(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n+1$
$g\circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad g\circ f(n) = g(f(n)) = 2f(n) = 2(n+1)$
$g\circ h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad g\circ h(n) = g(h(n)) = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ 2 & n \text{ περιττός} \end{cases}$
$h\circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad h\circ g(n) = h(g(n)) = h(2n) = 0$
$(f\circ g)\circ h(n) = f\circ g(h(n)) = \begin{cases} 1 & n \text{ άρτιος} \\ 3 & n \text{ περιττός} \end{cases}$

36 Αν $f: X \to Y$ και $g: Z \to W$ ώστε $f(X) \subseteq Z$
ορίζεται η $g\circ f : X \to W$ $\quad g\circ f(x) = g(f(x))$ $\forall x \in X$
(α) αν η $g\circ f$ είναι επί, για κάθε $z \in W$
υπάρχει $x \in X$ ώστε:
$$z = g\circ f(x) = g(f(x)) \text{ με } f(x) \in f(X) \subseteq Z$$
Άρα η g είναι επί.
(β) αν η $g\circ f$ είναι 1-1, τότε για
$x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε
$g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$
Οπότε η f είναι 1-1
Παραδείγματα: (άσκηση)

37 Έστω $g\circ f(x_1) = g\circ f(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (g είναι 1-1) $\Rightarrow x_1 = x_2$ (f είναι 1-1)
Άρα $g\circ f$ 1-1
Έστω $c \in C$, τότε υπάρχει $b \in B$ ώστε
$c = g(b)$ (g επί). Επίσης υπάρχει $a \in A$
ώστε $b = f(a)$ (f επί).
Επομένως $c = g(f(a)) = g\circ f(a)$
Άρα $g\circ f$ επί

38 (γ) Η f είναι 1-1. Τότε
Ισχύει $f(U\cap V) \subseteq f(U)\cap f(V)$ (προφανώς)
Έστω $y \in f(U)\cap f(V)$. Τοτε $y = f(x_1)$ για $x_1 \in U$
και $y = f(x_2)$ για $x_2 \in V$.
Έχουμε $f(x_1) = f(x_2) = y$. Αφού η f είναι 1-1
ισχύει $x_1 = x_2 \in U\cap V$. Επομένως $y \in f(U\cap V)$.
Αποδείξαμε ότι $f(U)\cap f(V) \subseteq f(U\cap V)$.
άρα έχουμε την ισότητα.

(ε) $f^{-1}(X\cap Y) = f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$
Έστω $a \in f^{-1}(X\cap Y)$. Τότε $f(a) \in X\cap Y$.
Άρα $f(a) \in X$ και $f(a) \in Y$.
Επομένως $a \in f^{-1}(X)$ και $a \in f^{-1}(Y)$ και
τελικά $a \in f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$
Επομένως $f^{-1}(X\cap Y) \subseteq f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$.
Έστω $a \in f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y)$. Τότε
$f(a) \in X$ και $f(a) \in Y$. Άρα $f(a) \in X\cap Y$
και τελικά $a \in f^{-1}(X\cap Y)$
Επομένως $f^{-1}(X)\cap f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(X\cap Y)$
και τελικά ισχύει η ισότητα.

39 (α) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 4x+2$
$y = 4x+2 \iff y-2 = 4x \iff x = \frac{y-2}{4}$
Άρα $f\left(\frac{y-2}{4}\right) = y$. Άρα η f είναι επί και (1-1);.
Και $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{4}$
η αντίστροφη συνάρτηση (δεξιά και αριστερή)
διότι $f^{-1}\circ f(x) = f^{-1}(4x+2) = \frac{(4x+2)-2}{4} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
και $f\circ f^{-1}(x) = f\left(\frac{x-2}{4}\right) = (x-2)+2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$,
άρα $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = I_{\mathbb{R}}$.

39(β) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με $g(x) = x^2$

Η συνάρτηση g είναι επί, διότι για $y \in \mathbb{R}^+$ έχουμε $g(\sqrt{y}) = y$. Άρα έχει δεξιά αντίστροφο $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

$(g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = x = id_{\mathbb{R}^+}(x))$

40. (i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: f(x) = 4x + 2$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+: g(x) = x^2$

$f([-1, 1]) = [-2, 6]$, διότι

αν $x \in [-1, 1] \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$, τότε $-2 \le f(x) \le 6$

άρα $f([-1, 1]) \subseteq [-2, 6]$

Επίσης, αν $y \in [-2, 6] \Leftrightarrow -2 \le y \le 6$

τότε $-1 \le \frac{y-2}{4} \le 1$ και $f\left(\frac{y-2}{4}\right) = y$

Άρα $y \in f([-1, 1])$, καθώς $y = f(x), x \in [-1, 1]$, και άρα $[-2, 6] \subseteq f([-1, 1])$.

Επομένως έχουμε την ισότητα.

$$f([-1, 1]) = [-2, 6]$$

$$f^{-1}([0, 2]) = \{x \in \mathbb{R}: 0 \le f(x) \le 2\} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R}: 0 \le 4x + 2 \le 2\} = \{x \in \mathbb{R}: -2 \le 4x \le 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}: -\frac{1}{2} \le x \le 0\} = [-\frac{1}{2}, 0]$$

(ii) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ $\quad g(x) = x^2$

$g([-3, -2]) = [4, 9]$

Αν $x \in [-3, -2]$, τότε $-3 \le x \le -2$ και $4 \le g(x) = x^2 \le 9$. Άρα, $g([-3, -2]) \subseteq [4, 9]$

Αν $y \in [4, 9]$, τότε $4 \le y \le 9$.

Για $x = -\sqrt{y}$, έχουμε $g(x) = y$ και $x \in [-3, -2]$. Άρα $y \in g([-3, -2])$

Επομένως $[4, 9] \subseteq g([-3, -2])$ και τελικά $[4, 9] = g([-3, -2])$

$g^{-1}([2, 4]) = \{x \in \mathbb{R}: 2 \le x^2 \le 4\} = [-2, -\sqrt{2}] \cup [2, \sqrt{2}]$

44 (α) Ορίζουμε $x \circ y = x - y$ για $x, y \in \mathbb{Z}$

Η πράξη $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ώστε $(x, y) \to x - y$ είναι συνάρτηση. άρα καλά ορισμένη.

Η πράξη αυτή δεν είναι μεταθετική διότι

$3 \circ 5 = 3 - 5 \neq 5 - 3 = 5 \circ 3$,

και δεν είναι προσεταιριστική διότι

$(3 \circ 5) \circ 9 = (3 - 5) - 9 \neq 3 - (5 - 9) = 3 \circ (5 \circ 9)$

(β), (γ), (δ) (ανάλογα).

45 (α) Έστω $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία, δηλαδή $A_{n+1} \subseteq A_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$ για καθε $k \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$, απότε ισοδύναμα έχουμε ότι $x \in A_n$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$

Τότε $x \in A_n$ για κάθε $n = k, k+1, \ldots$

Άρα $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Οπότε $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$

Αντίστροφα.

Έστω $x \in \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. Τότε $x \in A_n$ για κάθε $n = k, k+1, \ldots$

Η ακολουθία $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα άρα $A_k \subseteq A_m$ για $m \leq k$.

Αφου $x \in A_k$, θα ισχύει $x \in A_m$ για $m = 0, 1, \ldots, k$

Επομένως $x \in A_n$ για $n = 0, 1, \ldots, k, k+1, \ldots$

δηλαδή $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Άρα $\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

και άρα

ισχύει η ισότητα.

4.5 (β) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσες
δηλαδή: $A_{n+1}\subseteq A_n$ $B_{n+1}\subseteq B_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n\cup B_n)=\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n\right)$$

Έστω $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}(A_n\cup B_n)$. Τότε $x\in A_n\cup B_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Οπότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ είτε $x\in A_n$ είτε $x\in B_n$,
ισοδύναμα: $\mathbb{N}=\{n\in\mathbb{N}: x\in A_n\}\cup\{n\in\mathbb{N}: x\in B_n\}$

Επειδή το $\mathbb{N}$ είναι άπειρο συνολο είτε το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: x\in A_n\}$ είναι άπειρο είτε το συνολο $\{n\in\mathbb{N}: x\in B_n\}$ είναι άπειρο.

Αν το $\{n\in\mathbb{N}: x\in A_n\}$ είναι άπειρο, τότε
$x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$.

Έστω $n\in\{0,1,2,\dots\}$. Αφού το σύνολο $\{n\in\mathbb{N}: x\in A_n\}$ είναι άπειρο θα υπάρχει
$m\in\{n\in\mathbb{N}: x\in A_n\}$ ώστε $n<m$, οπότε
Άρα, $x\in A_m$. και $A_m\subseteq A_n$, διοτι $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα
Επομένως $x\in A_n$, για κάθε $n\in\{0,1,2,\dots\}$
και τελικά $x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$

Ομοίως αν το $\{n\in\mathbb{N}: x\in B_n\}$ είναι άπειρο, τότε
$x\in\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n$

Τελικά σε καθε περίπτωση $x\in\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n\right)$

Οπότε $\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)\subseteq\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}B_n\right)$

Προφανώς $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\right)\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cup B_n)$
και έχουμε την ισότητα.