① 1 Λυσεις ασκήσεων Σημειώσεων

Άσκηση 1.1.1.

(α) $1 \in \{1,2\}$ Α

(β) $3 \in \{1,5,2,3\}$ Α

(γ) $3 \in \{1,5,2\}$ Ψ

(δ) $\{1,3\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(ε) $\{5\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(στ) $2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\}$ Α

(ζ) $\{1,4,2,3\} = \{2,3,1,4,3,2\}$ Α

(η) $\{a,d,b,d\} = \{\alpha,b,d\}$ Α

(θ) $\{\alpha,b,d,d\} = \{\alpha,b,\alpha,d\}$ Α

(ι) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2x=0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-2x=0\}$ Α

Άσκηση 1.2.3.

(α) $1 \subseteq \{1,2\}$ Ψ

(β) $\{3,1\} \subseteq \{1,5,2,3\}$ Α

(γ) $\{3\} \subseteq \{1,5,2\}$ Ψ

(δ) $\{1,3\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(ε) $\{5\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(στ) $2 \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-3x+2=0\}$ Ψ

(ζ) $\{1,4,2,3\} \subseteq \{2,3,1,4,3,2\}$ Α

(η) $\{a,d,b,d\} \subseteq \{a,b,a,d\}$ Α

(θ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 2\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 2\}$ Α

(ι) $\{b \in \mathbb{N} \mid b > 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$ Α

(ια) $\{2\} \subseteq \{1,\{2\}\}$ Ψ

(ιβ) $\{2\} \in \{1,\{2\}\}$ Α

(ιγ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$ Ψ

(ιδ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-2=0\} = \emptyset$ Α

Άσκηση 1.4.1

(α) $\{1,2,\{4\}\} \cup \{2,3,6\} = \{1,2,3,\{4\},6\}$

(β) $\{1,\{2\},4\} \cap \{2,3,6\} = \{\} = \emptyset$

(γ) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 3\} = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 3\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \leq -3\}$

$B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq -3\}$

$A \cup B = A$ διότι $B \subseteq A$ άρα $A \cup B \subseteq A$ και $A \subseteq A \cup B$

(δ) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \geq 3\} = A = (-\infty,-3] \cup [3,+\infty) =$

$D = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 3\}$

$C \cap D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -3\} \cup \{3\}$

2

$\boxed{1.4.4}$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ για σύνολα A, B, C.

Απόδειξη

Έστω $x \in (A \cap B) \cap C$. Τότε $x \in A \cap B$ και $x \in C$.
Αφού $x \in A \cap B$, έχουμε $x \in A$ και $x \in B$.
Άρα $x \in B$ και $x \in C$, επομένως $x \in B \cap C$.
Επομένως $x \in A \cap (B \cap C)$, αφού $x \in A$ και $x \in B \cap C$.
Αποδείξαμε ότι $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$

Έστω $x \in A \cap (B \cap C)$. Τότε $x \in A$ και $x \in B \cap C$.
Αφού $x \in B \cap C$, έχουμε $x \in B$ και $x \in C$.
Επομένως $x \in A \cap B$.
Αφού έχουμε $x \in A \cap B$ και $x \in C$, έχουμε αποδείξει ότι $x \in (A \cap B) \cap C$.
Οπότε αποδείξαμε ότι $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

Τελικά αποδείξαμε ότι $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$\boxed{1.4.5}$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ για σύνολα A, B, C.

Απόδειξη

Έστω $x \in A \cap (B \cup C)$. Τότε $x \in A$ και $x \in B \cup C$.
Αφού $x \in B \cup C$, είτε $x \in B$ είτε $x \in C$.
Αν $x \in B$, τότε $x \in A \cap B$, άρα
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Αν $x \in C$, τότε $x \in A \cap C$, άρα
$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Επομένως σε καθε περίπτωση $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Αποδείξαμε ότι $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Έστω $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Τότε είτε $x \in A \cap B$ είτε $x \in A \cap B$. Αν $x \in A \cap B$, τότε $x \in A$ και $x \in B$, και συνεπώς $x \in A$ και $x \in B \cup C$.
Επομένως $x \in A \cap (B \cup C)$.
Αν $x \in A \cap C$, τοτε αναλογα αποδεικνύεται ότι $x \in A \cap (B \cup C)$.
Άρα αποδείξαμε ότι $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$
και τελικά την ισότητα.

$\boxed{1.4.8}$

Για δύο σύνολα A, B ισχύει
$A \subseteq B$ αν και μόνο αν $A \cup B = B$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $A \subseteq B$. Θα αποδείξουμε ότι $A \cup B = B$.
Πράγματι, έχουμε ότι $B \subseteq A \cup B$ απο τον ορισμό.
Έστω $x \in A \cup B$. Τότε είτε $x \in A$ είτε $x \in B$.
Αν $x \in A$, τότε $x \in B$, διότι $A \subseteq B$.
Άρα, σε καθε περίπτωση $x \in B$ και συνεπώς
$A \cup B \subseteq B$ αν $A \subseteq B$. Άρα $A \cup B = B$ αν $A \subseteq B$.
Αντίστροφα, έστω $A \cup B = B$. Θα αποδείξουμε
ότι $A \subseteq B$.
Έστω $x \in A$. Τότε $x \in A \cup B = B$, άρα $x \in B$.
Συνεπώς $A \subseteq B$.
Άρα $A \subseteq B$ άν $A \cup B = B$.

$\boxed{1.5.1}$ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 5, 6, 7\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$
$A \cap B = \{1\}$
$A \setminus B = \{2, 3\}$ $\quad B \setminus A = \{5, 6, 7\}$
$A \cup B \setminus A \cap B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$

$\boxed{1.5.2}$ Έστω $A \subseteq U$ και $B \subseteq U$.
και U ένας <u>χώρος</u> που μελετάμε.
Τότε ισχύουν:

1. <u>$\phi^c = U$</u>
   $\phi^c = U \setminus \phi = U$
2. <u>$U^c = U \setminus U = \phi$</u>
3. $(A^c)^c = A$.
   Πράγματι, $(A^c)^c = U \setminus A^c = U \setminus (U \setminus A) = A$
4. Αν $A \subseteq B$, τότε $B^c \subseteq A^c$
   Έστω $x \in B^c$. Τότε $x \in U \setminus B$. Άρα $x \notin B$.
   Αφού $x \notin B$, έχουμε $x \notin A$ διότι $A \subseteq B$.
   Άρα, $x \in U \setminus A$, δηλαδή $x \in A^c$.
   Αποδείξαμε ότι $B^c \subseteq A^c$.

1.5.2.

(4) Αν $A \subseteq B$, τότε $B^c \subseteq A^c$.

Έστω $A \subseteq B$ και έστω $x \in B^c = U \setminus B$.
Άρα $x \notin B$ και, αφού $A \subseteq B$, ισχύει $x \notin A$.
Άρα $x \in U$ και $x \notin A$, δηλαδή $x \in U \setminus A = A^c$.
Επομένως, $B^c \subseteq A^c$.

Πρόταση 1.5.3

2. Εάν $A \subseteq U$ και $B \subseteq U$, όπου U ο χώρος μας, τότε $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Απόδειξη

Έστω $x \in (A \cap B)^c$. Τότε $x \in U$ και $x \notin A \cap B$.
Άρα είτε $x \notin A$, είτε $x \notin B$.
Επομένως,
είτε $x \in A^c$ είτε $x \in B^c$.
Δηλαδή $x \in A^c \cup B^c$.
Αποδείξαμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Έστω $x \in A^c \cup B^c$. Τότε είτε $x \in A^c$ είτε $x \in B^c$.
Άρα $x \in U$ και είτε $x \notin A$ είτε $x \notin B$.
Σε κάθε περίπτωση έχουμε
$x \in U$ και $x \notin A \cap B$.
Άρα, $x \in (A \cap B)^c$.
Δηλαδή αποδείξαμε ότι $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.
Τελικά $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$.

Άσκηση 1.5.4. $D \subseteq U$ $F \subseteq U$, U ο χώρος μας.

(α) $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F) =$

$= \left[(D^c)^c \cap F^c\right] \cup (D \cap F) =$

$= (D \cap F^c) \cup (D \cap F) = D \cap (F^c \cup F) = D \cap U = D$

(β) Άσκηση

4

Άσκηση 1.5.4 (β) U ο χώρος

$((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c = (X^c \cup (Y \cap Y^c))^c = (X^c \cup \phi)^c = (X^c)^c = X$

Άσκηση 1.5.5

Έστω U ο χώρος, και $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $\Gamma \subseteq U$

Τότε $A \setminus B = A \cap B^c$

(α) $(A \setminus B) \setminus \Gamma = A \setminus (B \cup \Gamma)$

Πράγματι, $(A \setminus B) \setminus \Gamma = (A \cap B^c) \cap \Gamma^c$.

Επίσης, $A \setminus (B \cup \Gamma) = A \cap (B \cup \Gamma)^c = A \cap (B^c \cap \Gamma^c) =$

$= (A \cap B^c) \cap \Gamma^c$.

(β) $(A \setminus B) \setminus \Gamma = (A \setminus \Gamma) \setminus (B \setminus \Gamma)$

Πράγματι, $(A \setminus B) \setminus \Gamma = (A \cap B^c) \setminus \Gamma = (A \cap B^c) \cap \Gamma^c$, και

$(A \setminus \Gamma) \setminus (B \setminus \Gamma) = (A \cap \Gamma^c) \setminus (B \cap \Gamma^c) =$

$= (A \setminus B) \cap \Gamma^c = (A \cap B^c) \cap \Gamma^c$.

Άσκηση 1.5.7.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Αποδεικνύεται ότι $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Έστω $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Longleftrightarrow$ είτε $x \in A \setminus B$ είτε $x \in B \setminus A$

$\Longleftrightarrow$ είτε $x \in A$ και $x \notin B$, είτε $x \in B$ και $x \notin A$

$\Longleftrightarrow x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.

Άσκηση 1.5.8

$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \phi$

$A \Delta \phi = (A \cup \phi) \setminus (A \cap \phi) = A \setminus \phi = A$

$A \Delta B = B \Delta A = A \cup B \setminus A \cap B$

Άσκηση 1.6.1

Για $A = \{a, \{a, b\}\}$

$\mathcal{P}(A) = \{\phi, \{a, \{a, b\}\}, \{a\}, \{\{a, b\}\}\}$