1. # Ασκήσεις Πληθάριθμοι

(1.) Κάθε άπειρο σύνολο έχει άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο.

<u>Λύση</u>

Έστω A ένα άπειρο σύνολο

Θα ορίσουμε επαγωγικά $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \neq x_m$ αν $n, m \in \mathbb{N}$ και $n \neq m$.

$A \neq \emptyset$, άρα υπάρχει $x_1 \in A$.

Έστω οτι ορίσθηκαν $x_1, \dots, x_k \in A$ ώστε:
$x_n \neq x_m$ αν $n \neq m$, $n, m \in \{1, \dots, k\}$

Τότε $A \setminus \{x_1, \dots, x_k\} \neq \emptyset$, διότι A άπειρο σύνολο, άρα υπάρχει $x_{k+1} \in A \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$

Προφανώς $x_{k+1} \neq x_m$ αν $m \in \{1, \dots, k\}$

Άρα επαγωγικά υπάρχει $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \neq x_m$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $m < n$

Το $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο υποσύνολο του A, διοτι $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}$ (γιατί;).

(2) Κάθε άπειρο συνολο A είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο υποσύνολό του.

<u>Λύση</u>

Έστω A άπειρο σύνολο. Απο την προηγούμενη άσκηση υπάρχει συνολο $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ώστε $x_n \neq x_m$ αν $n \neq m$, $n, m \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $h : A \to A \setminus \{x_1\}$ ως:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{άν } x \in A \setminus B \\ x_{n+1} & \text{αν } x = x_n \in B \end{cases}$$

Η h είναι 1-1 και επί του $A \setminus \{x_1\}$, άρα το A είναι ισοπληθικό με το $A \setminus \{x_1\}$.

3. Αν $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, η συνάρτηση $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με

$$f(m,n) = 2^m(2n+1) - 1$$

είναι 1-1 και επί.

Άρα $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}_0$

Απόδειξη

Η <u>f είναι επί</u>, διότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}_0$ υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}_0$ ώστε $\lambda = 2^m(2n+1) - 1$.

Για $\lambda = 0$ έχουμε $0 = 2^0(2.0+1) - 1$ $(m = n = 0)$.

Αν $\lambda \neq 0$ περιττός αριθμός τότε $\lambda+1$ είναι άρτιος. Έστω $m \in \mathbb{N}$ είναι ο μέγιστος φυσικός αριθμός ώστε ο 2^m να διαιρεί τον $\lambda+1$. Τότε $\lambda + 1 = 2^m . p$, όπου p περιττός αριθμός ($p = 2n+1$ για $n \in \mathbb{N}_0$).

Επομένως. $\lambda = 2^m . (2n+1) - 1$ για $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$

Αν $\lambda \neq 0$ άρτιος αριθμός, τότε $\lambda + 1$ είναι περιττός αριθμός. Άρα, $\lambda + 1 = 2n+1$ για $n \in \mathbb{N}_0$ οπότε $\lambda = 2^0(2n+1) - 1$ για $n \in \mathbb{N}_0$ και $m = 0$.

Η <u>f είναι 1-1</u>.

Πράγματι, αν $2^{m_1}(2n_1+1) - 1 = 2^{m_2}(2n_2+1) - 1$, τότε $2^{m_1}(2n_1+1) = 2^{m_2}(2n_2+1)$ οπότε $m_1 = m_2$ (δεν μπορούμε να έχουμε ισότητα άρτιου με περιττό) και ακολούθως $n_1 = n_2$.

Άρα, $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N}_0$

4. Το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο;

Το σύνολο $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο, και το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι άπειρο αριθμήσιμο. Έχουμε

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \quad (\text{προφανώς } \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset)$$

Έστω ότι:

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και έστω $f : \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ 1-1 και επί.

Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο και

έστω $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ 1-1 και επί.
Τότε Θεωρούμε την συνάρτηση
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ με

$$h(x) = \begin{cases} 2g(x) & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 2f(x)-1 & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Η h είναι επί του $\mathbb{N}$, διότι οι f, g είναι επί του $\mathbb{N}$ και είναι προφανώς 1-1 διότι οι f, g είναι 1-1.
Άρα η h είναι 1-1 και επί του $\mathbb{N}$
Επομένως το $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο. **Άτοπο!**
Άρα το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

5. Μια αριθμητική πρόοδος φυσικών αριθμών είναι μια ακολουθία $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$t_{n+1} = t_n + d \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Άρα καθορίζεται από το t_1 και το $d \in \mathbb{N}$
Επομένως αν A είναι το σύνολο όλων των αριθμητικών προόδων φυσικών αριθμών η συνάρτηση

$$h : A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad h((t_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (t_1, d)$$

είναι 1-1 και επί
Άρα, το σύνολο A ως ισοδύναμο με το $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο άπειρο.

7 (α) Σε κάθε ένα κυκλικό δίσκο $\delta \in A$ (κυκλομοχτάρι) επιλέγουμε ένα σημείο του, έστω το $t_\delta = (p_\delta, q_\delta) \in \delta$ ώστε $(p_\delta, q_\delta) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
Τότε το σύνολο

$$B = \{(p_\delta, q_\delta) : \delta \in A\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q},$$

ως υποσύνολο του αριθμήσιμου συνόλου $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, είναι αριθμήσιμο και η συνάρτηση

$$f : A \to B \quad f(\delta) = (p_\delta, q_\delta) \quad \text{1-1 και επί}$$