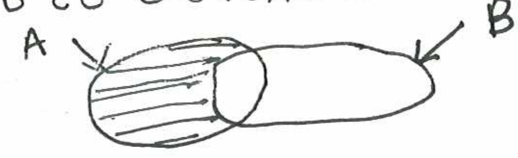
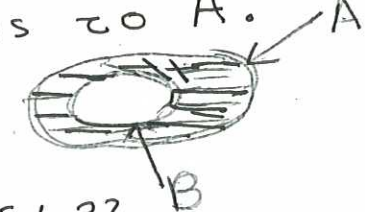
1.5 Διαφορά συνόλων - Συμπλήρωμα

<u>Ορισμός</u> Έστω A, B δύο σύνολα. Ορίζεται η συνολοθεωρητική **διαφορά** $A \setminus B$ ως το σύνολο με στοιχεία όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο σύνολο B και μόνο αυτά.



$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Αν το σύνολο B είναι υποσύνολο του A τότε η διαφορά $A \setminus B$ ονομάζεται **συμπλήρωμα** του B ως προς το A.



<u>Παραδείγματα</u>

Έστω $A = \{1, 3, \{2\}\}$, $B = \{2, 3, 5, \phi\}$, $\Gamma = \{1, 3\}$.
$A \cup B = \{1, 3, \{2\}, 5, \phi, 2\}$, $A \cap B = \{3\}$, $B \cap \Gamma = \{3\}$,
$A \setminus B = \{1, \{2\}\}$, $B \setminus A = \{2, 5, \phi\}$ $\Gamma \setminus B = \{1\}$,
$B \setminus A = B \setminus \Gamma = \{2, 5, \phi\}$, $A \setminus \Gamma = \{\{2\}\}$, $B \setminus \Gamma = \{2, 5, \phi\} \neq \Gamma \setminus B = \{1\}$

<u>Ορισμός</u> Η **συμμετρική διαφορά** $A \triangle B$ δύο συνόλων A, B ορίζεται ως το σύνολο

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

<u>Πρόταση</u>

Για δύο σύνολα A, B ισχύει:

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = B \triangle A.$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x \in A \triangle B$. Τότε $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Δηλαδή, είτε $x \in A \setminus B$ είτε $x \in B \setminus A$.

Άρα, είτε $x \in A$ και $x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B$,
είτε $x \in B$ και $x \notin A \Leftrightarrow x \in B \setminus A$.

Έστω $x \in A$ και $x \notin B$, τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Έστω $x \in B$ και $x \notin A$, τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Άρα, $A \triangle B \subseteq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Τώρα έστω $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Τότε $x \in A \cup B$ και $x \notin A \cap B$.
Οπότε είτε $x \in A$ και $x \notin A \cap B$,
είτε $x \in B$ και $x \notin A \cap B$.
Αν $x \in A$ και $x \notin A \cap B$, τότε $x \in A \setminus B$, και
αν $x \in B$ και $x \notin A \cap B$, τότε $x \in B \setminus A$.
Άρα σε κάθε περίπτωση αν $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, τότε $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \Delta B$.
Επομένως, $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \Delta B$ και τελικά $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Παρατηρήσεις: $A \Delta \phi = (A \cup \phi) \setminus (A \cap \phi) = A \setminus \phi = A$

$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \phi$

$A \Delta B = B \Delta A$ (ασκηση)

Πολλές φορές τα σύνολα που μελετάμε είναι υποσύνολα ενός συγκεκριμένο συνόλου $\mathcal{U}$ που το καλούμε χώρο.
Για παράδειγμα το $\mathcal{U}$ μπορεί να είναι:
το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμων,
το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή
το συνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών.
Σε περίπτωση που έχουμε ένα συγκεκριμένο χώρο $\mathcal{U}$, ορίζουμε το συμπλήρωμα A^c για κάθε υποσύνολο A του $\mathcal{U}$ ως:

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A$$

Πρόταση

Έστω A, B υποσύνολα του χώρου $\mathcal{U}$. Τότε:

(i) $\phi^c = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^c = \phi$,

(ii) $(A^c)^c = A$

(iii) Αν $A \subseteq B$, τότε $B^c \subseteq A^c$

(iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (κανόνας De Morgan)

(v) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (κανόνας De Morgan)

(vi) $A \setminus B = A \cap B^c$

<u>Απόδειξη</u> (i) $\emptyset^c = \mathcal{U} \setminus \emptyset = \mathcal{U}$, $\mathcal{U}^c = \mathcal{U} \setminus \mathcal{U} = \emptyset$

(ii) $(A^c)^c = (\mathcal{U} \setminus A)^c = A$, διότι $x \in A \Leftrightarrow x \in \mathcal{U}$ και $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^c$

(iii) Έστω $A \subseteq B$. Τότε $B^c \subseteq A^c$ διότι αν $x \in B^c$ τότε $x \in \mathcal{U}$ και $x \notin B$. Αφού $x \notin B$, έχουμε ότι $x \notin A$, διότι $A \subseteq B$. Άρα, $x \in A^c$.

(iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Έστω $x \in (A \cup B)^c$. Τότε $x \in \mathcal{U}$ και $x \notin A \cup B$, άρα $x \in \mathcal{U}$, $x \notin A$ και $x \notin B$, οπότε $x \in A^c$ και $x \in B^c$ και συνεπώς $x \in A^c \cap B^c$. Επομένως,

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c.$$

Έστω $x \in A^c \cap B^c$. Τότε $x \in A^c$ και $x \in B^c$. Άρα, $x \in \mathcal{U}$, $x \notin A$ και $x \notin B$, οπότε $x \notin A \cup B$ και $x \in \mathcal{U}$ και συνεπως $x \in (A \cup B)^c$.

Συνεπώς $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$. και τελικά

$$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c.$$

(v.) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Έστω $x \in (A \cap B)^c$. Τότε $x \notin A \cap B$ και $x \in \mathcal{U}$. Άρα, είτε $x \notin A$, είτε $x \notin B$. και $x \in \mathcal{U}$.

Αν $x \notin A$, τότε $x \in A^c$ και άρα $x \in A^c \cup B^c$.

Αν $x \notin B$, τότε $x \in B^c$ και άρα $x \in A^c \cup B^c$.

Οπότε σε κάθε περίπτωση $x \in A^c \cup B^c$.

Επομένως $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$.

Έχουμε $A \cap B \subseteq A$, άρα $A^c \subseteq (A \cap B)^c$ από την (iii), και $A \cap B \subseteq B$, άρα $B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

Επομένως, $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$.

Τελικά, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

(vi) $A \setminus B = A \cap B^c$

Ισχύει διότι:

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \notin B \Leftrightarrow x \in A$ και $x \in B^c = \mathcal{U} \setminus B$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$.

Άσκηση 1.5.4.

Απλοποιήστε τις ακόλουθες εκφράσεις:

(α) $(D^c \cup F)^c \cup (D \cap F) =$

$((D^c)^c \cap F^c) \cup (D \cap F) =$

$(D \cap F^c) \cup (D \cap F) =$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$D \cap (F^c \cup F) = D \cap \mathcal{U} = D$

(β) $((X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c))^c =$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$(X^c \cup (Y \cap Y^c))^c = (X^c \cup \emptyset)^c = (X^c)^c = X.$

Στην άσκηση (α) χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες:

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ και

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Χρησιμοποιώντας συμπληρώματα απο την (1) ισότητα μπορουμε να αποδείξουμε την (2) και αντίστροφα απο την (2) την (1).

Εστω οτι γνωρίζουμε οτι ισχύει η (1), δηλαδή ισχύει για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C η ισότητα:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Τότε ισχύει και η ισότητα

$$A^c \cup (B^c \cap C^c) = (A^c \cup B^c) \cap (A^c \cup C^c)$$

Οπότε ισχύει, συμφωνα με την Πρόταση 1.5.3,

$$A^c \cup (B \cup C)^c = (A \cap B)^c \cap (A \cap C)^c$$

Οπότε

$$(A^c \cup (B \cup C)^c)^c = ((A \cap B)^c \cap (A \cap C)^c)^c$$

Δηλαδή, απο την 1.5.3

$$(A^c)^c \cap ((B \cup C)^c)^c = ((A \cap B)^c)^c \cup ((A \cap C)^c)^c$$

Οπότε ισχύει

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Αυτή η παρατήρηση ονομάζεται αρχή δυϊσμού του De Morgan.

$\boxed{\text{Εργασία}}$ Ασκήσεις 5 έως και 12

Σύνολα με στοιχεία σύνολα

Έστω X ένα σύνολο. Ορίζεται το δυναμοσύνολο του X που συμβολίζεται συνήθως $\mathcal{P}(X)$ ως το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X.

$$\mathcal{P}(X)=\{Y \mid Y\subseteq X\}$$

Προφανώς $X\in\mathcal{P}(X)$ και $\phi\in\mathcal{P}(X)$.

Έστω $X=\{a,b,\gamma\}$. Τότε

$$\mathcal{P}(X)=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{\gamma\}, \{a,b\}, \{a,\gamma\}, \{b,\gamma\}, \{a,b,\gamma\}\}.$$

Γενικά αν το X έχει n στοιχεία, τότε το $\mathcal{P}(X)$ έχει 2^n στοιχεία.

Όταν έχουμε ένα σύνολο $\mathcal{S}$ που τα στοιχεία του όλα είναι σύνολα, όπως του $\mathcal{P}(X)$, τότε γενικεύοντας τις έννοιες της ένωσης και της τομής μπορούμε να ορίσουμε:

$$\bigcup\mathcal{S}=\{x / x\in A \text{ για κάποιο } A\in\mathcal{S}\} \text{ και}$$

$$\bigcap\mathcal{S}=\{x / x\in A \text{ για κάθε } A\in\mathcal{S}\}.$$

Για παράδειγμα αν $\mathcal{S}=\{\{a,\zeta\},\{a,\gamma,\delta\},\{a,\varepsilon\}\}$

$\bigcap\mathcal{S}=\{a\}$ $\quad \bigcup\mathcal{S}=\{a,\zeta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$.

Άσκηση 1.6.1.

Έστω $X=\{a,\gamma,\omega\}$, τότε

$$\mathcal{P}(X)=\{\phi, \{a,\gamma,\omega\}, \{a\}, \{\gamma\}, \{\omega\}, \{a,\gamma\}, \{a,\omega\}, \{\gamma,\omega\}\}$$

Έστω $A=\{a,\{a,b\}\}$, τότε

$$\mathcal{P}(A)=\{\phi, \{a,\{a,b\}\}, \{a\}, \{\{a,b\}\}\}.$$

Άσκηση 1.6.2

$S=\{A\subseteq\mathbb{Z} : 0\in A\}$

$\bigcup S=\mathbb{Z}$ διότι $\mathbb{Z}\in S$ και $A\subseteq\mathbb{Z}$ για κάθε $A\in S$

$\bigcap S=\{0\}$ διότι $\{0\}\in S$ και $\{0\}\subseteq A$ για κάθε $A\in S$.

Εργασία

Ασκήσεις 13 έως 23