Μάθημα 4

Διμελείς σχέσεις

Καρτεσιανό γινόμενο

Ο Kuratowski όρισε τα διατεταγμένα ζεύγη, δηλαδή τα δυσύνολα όπου έχει καθορισθεί το πρώτο στη σειρά στοιχείο και το δεύτερο στη σειρά στοιχείο

<u>Ορισμός</u> (Kuratowski) Ονομάζουμε διατεταγμένο ζεύγος των α, β (με πρώτο στοιχείο το α και δεύτερο το στοιχείο β) το σύνολο:

$$(\alpha,\beta)=\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$$

Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι:

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \Longleftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.$$

Με τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους από τον Kuratowski αποδεικνύεται ότι:

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \text{ αν και μόνο αν } \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta.$$

<u>Απόδειξη</u>

($\Rightarrow$) Έστω $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$. Τότε $\boxed{\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}}$.
Άρα, είτε $\{\alpha\}=\{\gamma\}$, είτε $\{\alpha\}=\{\gamma,\delta\}$.

1. Έστω $\boxed{\{\alpha\}=\{\gamma\}}$:
Τότε $\boxed{\alpha=\gamma}$ και άρα $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\delta\}\}$.
Επομένως είτε $\{\alpha,\delta\}=\{\alpha\}$ είτε $\{\alpha,\delta\}=\{\alpha,\beta\}$.

1.1. Αν $\{\alpha\}=\{\alpha,\delta\}$, τότε $\delta=\alpha$ και ακολούθως

$$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\delta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha\}\}=\{\{\alpha\}\}.$$

Άρα, $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}$ και συνεπως $\beta=\alpha=\delta=\gamma$.
Συνεπως, ισχύει στην Περίπτωση 1.1 ότι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.

1.2 Αν $\{\alpha,\delta\}=\{\alpha,\beta\}$, τότε:
είτε $\delta=\alpha$, οπότε έχουμε $\alpha=\beta=\delta=\gamma$.
είτε $\delta=\beta$, οπότε έχουμε $\alpha=\gamma$ και $\delta=\beta$.

2. Έστω $\boxed{\{\alpha\}=\{\gamma,\delta\}}$
Τότε $\alpha=\gamma=\delta$, οπότε, έχουμε
$\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\alpha\},\{\alpha,\alpha\}\}=\{\{\alpha\}\}$.
Επομένως $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}$ και άρα $\alpha=\beta$
Συνεπως και στην Περίπτωση 1.2 ισχύει ότι $\alpha=\gamma$ και $\beta=\alpha=\gamma=\delta$.

($\Leftarrow$) Έστω $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$.
Τότε $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}=\{\{\gamma\},\{\gamma,\delta\}\}$ και ακολούθως $(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)$, σύμφωνα με τον ορισμο του Kuratowski

Ορισμός Έστω A, B δύο σύνολα.
Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B είναι το σύνολο:

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}.$$

Παραδείγματα

1. $A = \{1, 2\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\Gamma = \{3\}$

$A \times B = \{(1,\alpha), (1,\beta), (1,\gamma), (2,\alpha), (2,\beta), (2,\gamma)\}$.

$B \times A = \{(\alpha, 1), (\alpha, 2), (\beta, 1), (\beta, 2), (\gamma, 1), (\gamma, 2)\}$.

$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

Παρατηρήσεις

1. $A \times B \neq B \times A$, διότι $(1,\alpha) \in A \times B$ ενώ $(1,\alpha) \notin B \times A$.
2. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
3. $(A \times B) \times \Gamma = \{((1,\alpha), 3), ((1,\beta), 3), ((1,\gamma), 3), ((2,\alpha), 3), ((2,\beta), 3), ((2,\gamma), 3)\}$

$B \times \Gamma = \{(\alpha, 3), (\beta, 3), (\gamma, 3)\}$

$A \times (B \times \Gamma) = \{(1, (\alpha, 3)), (1, (\beta, 3)), (1, (\gamma, 3)), (2, (\alpha, 3)), (2, (\beta, 3)), (2, (\gamma, 3))\}$

Παρατηρούμε ότι $(A \times B) \times \Gamma \neq A \times (B \times \Gamma)$, διότι
$((1,\alpha), 3) \in (A \times B) \times \Gamma$, ενώ $((1,\alpha), 3) \notin A \times (B \times \Gamma)$

Πρόταση 2.1.4. Έστω τα σύνολα A, B, Γ. Τότε:

(i) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$.

Έστω $(x,y) \in A \times (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A$ και $y \in B \cup \Gamma$
$\Leftrightarrow x \in A$ και (είτε $y \in B$, είτε $y \in \Gamma$)
$\Leftrightarrow$ είτε $x \in A$ και $y \in B$, είτε $x \in A$ και $y \in \Gamma$
$\Leftrightarrow$ είτε $(x,y) \in A \times B$, είτε $(x,y) \in A \times \Gamma$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$.

(ii) $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

Έστω $(x,y) \in A \times (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow x \in A$ και $y \in B \cap \Gamma$
$\Leftrightarrow x \in A$ και ($y \in B$ και $y \in \Gamma$)
$\Leftrightarrow (x,y) \in A \times B$ και $(x,y) \in A \times \Gamma$
$\Leftrightarrow (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.

(iv) $(A \cap B) \times \Gamma = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Gamma)$. (υπάρχει στις Σημειώσεις)

(iii) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

Έστω $(x, y) \in (A \cup B) \times \Gamma \iff x \in A \cup B$ και $y \in \Gamma$

$\iff$ (είτε $x \in A$, είτε $x \in B$) και $y \in \Gamma$

$\iff$ (είτε ($x \in A$ και $y \in \Gamma$) είτε ($x \in B$ και $y \in \Gamma$))

$\iff$ είτε $(x, y) \in A \times \Gamma$ είτε $(x, y) \in B \times \Gamma$

$\iff (x, y) \in (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.

<u>Πρόταση 2.1.5.</u> Έστω τα σύνολα A, B, Γ, Δ. Τότε:

(i) $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$.

Έστω $(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) \iff (x, y) \in A \times B$ και $(x, y) \in \Gamma \times \Delta$

$\iff$ ($x \in A$ και $y \in B$) και ($x \in \Gamma$ και $y \in \Delta$)

$\iff$ ($x \in A$ και $x \in \Gamma$) και ($y \in B$ και $y \in \Delta$)

$\iff x \in A \cap \Gamma$ και $y \in B \cap \Delta$

$\iff (x, y) \in (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$

(ii) $(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \subseteq (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$

Έστω $(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \iff$ είτε $(x, y) \in A \times B$, είτε $(x, y) \in \Gamma \times \Delta$

$\iff$ είτε ($x \in A$ και $y \in B$), είτε ($x \in \Gamma$ και $y \in \Delta$)

$\implies$ (είτε $x \in A$, είτε $x \in \Gamma$) και (είτε $y \in B$, είτε $y \in \Delta$)

$\iff (x, y) \in (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$

Δεν ισχύει η ισότητα: Π.χ. αν $A = \{1\}, B = \{2\}, \Gamma = \{3\}, \Delta = \{4\}$
$(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) = \{(1,2), (3,4)\} \neq \{(1,2), (1,4), (3,2), (3,4)\} = (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$

<u>Άσκηση 2.7 (2)</u>

1. $(A \setminus B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$

Έστω $(x, y) \in (A \setminus B) \times \Gamma \iff x \in A \setminus B$ και $y \in \Gamma$

$\iff x \in A$ και $x \notin B$ και $y \in \Gamma$

$\iff$ ($x \in A$ και $y \in \Gamma$) και $x \notin B$.

$\iff$ ($(x, y) \in A \times \Gamma$) και $(x, y) \notin B \times \Gamma$

$\iff (x, y) \in (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$.

2. $(A \Delta B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \Delta (B \times \Gamma)$.

$(A \Delta B) \times \Gamma = (A \cup B \setminus A \cap B) \times \Gamma = ((A \cup B) \times \Gamma) \setminus ((A \cap B) \times \Gamma) \underset{(iv),(iii)}{=}$
$= ((A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)) \setminus ((A \times \Gamma) \cap (B \times \Gamma)) = (A \times \Gamma) \Delta (B \times \Gamma)$.