Διμελείς σχέσεις συνόλων
Μάθημα 5
Σχέσεις ισοδυναμίας

(5)

Ορισμός

Έστω A, B δύο σύνολα. **Διμελής σχέση** από το A στο B είναι κάθε υποσύνολο του συνόλου $A \times B$.

Αν $R \subseteq A \times B$ είναι μια σχέση από το A στο B γράφουμε xRy αντί $(x, y) \in R$.

Αν $A = B$ και $R \subseteq A \times A$, τότε το σύνολο R είναι μια σχέση στο A.

Παραδείγματα:

(1) Έστω $A \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Η σχέση ισότητας στο A είναι το σύνολο

$$R_{=} = \{(x, y) \in A \times A : x = y\} = \{(x, x) : x \in A\} \subseteq A \times A$$

Για παράδειγμα: Αν $A = \{1, 2, a\}$

$R_{=} = \Delta_A = \{(1,1), (2,2), (a,a)\} \subseteq A \times A$,

και συνήθως ονομάζεται διαγώνιος στο A.

(2) Έστω $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X.

Η **σχέση εγκλεισμού** στο $\mathcal{P}(X)$ είναι το σύνολο

$$R_{\subseteq} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X).$$

δηλαδή $(A, B) \in R_{\subseteq} \iff A \subseteq B$, για $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Για παράδειγμα αν $X = \{1, 2, a\}$, τότε

$\mathcal{P}(X) = \{\{1\}, \{2\}, \{a\}, \{1,2\}, \{1,a\}, \{2,a\}, \{1,2,a\}, \emptyset\}$

και

$R_{\subseteq} = \{(\emptyset, \{1\}), (\emptyset, \{2\}), (\emptyset, \{a\}), (\emptyset, \{1,2\}), (\emptyset, \{1,a\}),$
$(\emptyset, \{2,a\}), (\emptyset, \{1,2,a\}), (\emptyset, \emptyset), (\{1\}, \{1\}),$
$(\{1\}, \{1,2\}), (\{1\}, \{1,a\}), (\{1\}, \{1,2,a\}), (\{2\}, \{2\})$
$(\{2\}, \{1,2\}), (\{2\}, \{2,a\}), (\{2\}, \{1,2,a\}), (\{a\}, \{a\})$
$(\{a\}, \{1,a\}), (\{a\}, \{2,a\}), (\{a\}, \{1,2,a\}),$
$(\{1,2\}, \{1,2\}), (\{1,2\}, \{1,2,a\}), (\{2,a\}, \{2,a\}),$
$(\{2,a\}, \{1,2,a\}), (\{1,a\}, \{1,a\}), (\{1,a\}, \{1,2,a\}),$
$(\{1,2,a\}, \{1,2,a\})\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$

Δηλαδή για A, B υποσύνολα του X ισχύει

$A \subseteq B \iff (A, B) \in R_{\subseteq}$

(3) Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο του X. Μια **σχέση από το σύνολο X στο $\mathcal{P}(X)$** είναι η σχέση «ανήκει»

$$R_{\in} = \{ (x, A) \in X \times \mathcal{P}(X) : x \in A \} \subseteq X \times \mathcal{P}(X).$$

Για παράδειγμα αν $X = \{1, 2, a\}$, τότε

$$R_{\in} = \{ (1,\{1\}), (1,\{1,2\}), (1,\{1,a\}), (1,\{1,2,a\}), (2,\{2\}), (2,\{1,2\}), (2,\{2,a\}), (2,\{1,2,a\}), (a,\{a\}), (a,\{1,a\}), (a,\{2,a\}), (a,\{1,2,a\}) \}$$

Δηλαδή, $x \in A \iff (x, A) \in R_{\in}$

(4) Έστω $A = \{1, 3, 4, 8, 6\}$. Η **σχέση** «μικρότερο» **στο** A είναι $R_{<} = \{ (x,y) \in A \times A : x < y \} =$

$$= \{ (1,3), (1,4), (1,8), (1,6), (3,4), (3,8), (3,6), (4,8), (4,6), (6,8) \} \subseteq A \times A.$$

Η **σχέση** διαιρετότητας **στο** A είναι:

$$R_{\delta} = \{ (x, y) \in A \times A : x \mid y \} \subseteq A \times A, \text{ και}$$

$$R_{\delta} = \{ (1,3), (1,4), (1,8), (1,6), (3,3), (3,6), (1,1), (4,4), (4,8), (6,6), (8,8) \}.$$

(5) Γενικά μια **σχέση σε ένα** συνολο A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \times A$. Επισης μια **σχέση από ένα** συνολο A σε **ένα** σύνολο B είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$.

<u>Ορισμός</u> Έστω $R \subseteq A \times B$ μία σχέση από το σύνολο A στο σύνολο B. Ορίζεται η **αντίστροφη σχέση** R^{-1} απο το σύνολο B στο σύνολο A:

$$R^{-1} = \{ (y, x) \in B \times A : (x, y) \in R \}.$$

δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \iff (y, x) \in R$

<u>Ορισμός</u> Έστω $R \subseteq A \times B$ μια σχέση από το σύνολο A στο σύνολο B, και έστω $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$. Τότε ορίζεται μια σχέση απο το X στο Y:

$$R|_{X \times Y} = \{ (x, y) \in R : x \in X, y \in Y \} \subseteq X \times Y$$

που ονομάζεται **περιορισμός** της R στο $X \times Y$.

Σχέσεις ισοδυναμίας

Ορισμός Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ μία σχέση στο X. Η σχέση $\mathcal{R}$ είναι μια **σχέση ισοδυναμίας** στο X αν:

(i) είναι **ανακλαστική** (ή αυτοπαθής), δηλαδή αν:
$$(x,x) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \mathcal{R} x \quad \text{για κάθε } x \in X,$$

(ii) είναι **συμμετρική**, δηλαδή αν:
$$(x,y) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}, \quad \text{και}$$

(iii) είναι **μεταβατική**, δηλαδή αν:
$$(x,y) \in \mathcal{R} \text{ και } (y,z) \in \mathcal{R} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$$

Παρατηρήσεις

Μια σχέση $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ στο X:

1. είναι **ανακλαστική** αν και μόνο αν:
$$\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\} \subseteq \mathcal{R},$$

2. είναι **συμμετρική** αν και μόνο αν:
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$$

Παραδείγματα

(1) Η σχέση ισότητας σε ένα σύνολο $A \neq \emptyset$ (Παράδειγμα (1))
$$\mathcal{R}_= = \{(x,y) \in A \times A : x = y\} = \{(x,x) : x \in A\}$$
είναι **σχέση ισοδυναμίας**.

(2) Η σχέση $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ πραγματικών αριθμών στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών)
($\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών)
είναι **σχέση ισοδυναμίας**, διότι:

(i) $(x,x) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Q} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ (ανακλαστική)

(ii) $(x,y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow (y,x) \in \mathcal{R}$ (συμμετρική)

(iii) $(x,y) \in \mathcal{R}$ και $(y,z) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow$
$x - y \in \mathbb{Q}$ και $y - z \in \mathbb{Q} \Longrightarrow (x-y)+(y-z) = x - z \in \mathbb{Q}$
$\Longrightarrow x - z \in \mathbb{Q} \Longrightarrow (x,z) \in \mathcal{R}$ (μεταβατική)

(3) Η σχέση $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x - y \notin \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας διότι δεν είναι αυτοπαθής π.χ. $(1,1) \notin \mathcal{R} \Leftrightarrow 1 - 1 = 0 \in \mathbb{Q}$

(4) Η σχέση υποσύνολο στο $\mathcal{P}(\{1,2\})$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας. Γιατί;

<u>Ορισμός</u> Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X και έστω $x \in X$. Ονομάζουμε **κλάση ισοδυναμίας του x** ως πρός την σχέση R το σύνολο:

$$[x] = \{y \in X : (y, x) \in R\}$$

<u>Λήμμα</u> Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X και $x, y \in X$. Τότε:

$$(x, y) \in R \iff [x] = [y].$$

<u>Απόδειξη</u>

($\Rightarrow$) Εστω $(x, y) \in R$. Θα αποδείξουμε ότι $[x] \subseteq [y]$ και ακολούθως ότι $[y] \subseteq [x]$, οπότε θα έχουμε την ισότητα $[x] = [y]$.

① ($[x] \subseteq [y]$). Έστω $z \in [x]$. Τότε $(z, x) \in R$. Εφ' όσον $(z, x) \in R$ και $(x, y) \in R$, απο την μεταβατική ιδιοτητα της R, έχουμε ότι $(z, y) \in R$ και ακολούθως ότι $z \in [y]$. Άρα, $[x] \subseteq [y]$.

② ($[y] \subseteq [x]$). Έστω $z \in [y]$. Τότε $(z, y) \in R$. Εφ' όσον $(x, y) \in R$ και R έχει την συμμετρική ιδιότητα (ως σχέση ισοδυναμίας), έχουμε ότι $(y, x) \in R$. Απο την μεταβατική ιδιότητα της R, έχουμε ότι $(z, x) \in R$, και ακολούθως ότι $z \in [x]$. Επομένως $[y] \subseteq [x]$, και τελικά $[x] = [y]$.

($\Leftarrow$) Αντίστροφα, έστω $[x] = [y]$ για $x, y \in X$. Τότε έχουμε $x \in [x]$, αφού $(x, x) \in R$ (αυτοπαθής ιδιότητα της R), άρα $x \in [y]$, αφού $[x] = [y]$. Επομένως $(x, y) \in R$.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. $x \in [x]$ για κάθε $x \in X$, διότι $(x, x) \in R$ και R είναι σχέση ισοδυναμίας. Άρα $[x] \neq \emptyset$ για κάθε $x \in X$.
2. Αν $x, y \in X$ και $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, τότε $[x] = [y]$. Πράγματι, έστω $z \in [x] \cap [y]$. Τότε $(z, x) \in R$ και $(z, y) \in R$. Απο την συμμετρική ιδιότητα της R, έχουμε ότι $(x, z) \in R$ και επίσης $(z, y) \in R$, άρα $(x, y) \in R \overset{\text{Λημμα}}{\iff} [x] = [y]$.

Ασκήσεις 1 – 15

<u>Ορισμός</u> Έστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μία διαμέριση του X είναι ένα σύνολο $D \subseteq \mathcal{P}(X)$ (δηλαδή τα στοιχεία του D είναι υποσύνολα του X) με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Κάθε στοιχείο A του D είναι μη κενό ($A \in D \Rightarrow A \neq \emptyset$).

(ii) Τα στοιχεία του D είναι ξένα ανά δύο ($A, B \in D$ και $A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$)

(iii) Η ένωση όλων των στοιχείων του D ισούται με το σύνολο X. ($\bigcup_{A \in D} A = X$)

<u>Θεώρημα</u> Έστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο X ορίζει μία διαμέριση στο X και αντίστροφα κάθε διαμέριση στο X ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο και R μία σχέση ισοδυναμίας στο X. Τότε το σύνολο $D = \{[x] : x \in X\}$ των κλάσεων ισοδυναμίας της σχέσης R είναι μία διαμέριση του X. Πράγματι:

(i) $[x] \neq \emptyset$, διότι $x \in [x]$ για κάθε $x \in X$

(ii) Αν $[x], [y] \in D$ είτε $[x] = [y]$ είτε $[x] \cap [y] = \emptyset$ (Παρατήρηση 2)

(iii) $\bigcup_{x \in X} [x] = X$, διότι $x \in [x]$ για κάθε $x \in X$.

Αντίστροφα, έστω D μια διαμέριση του X. Η σχέση

$$R = \{(x,y) \in X \times X : \text{υπάρχει } A \in D \text{ ώστε } \{x,y\} \subseteq A\}$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο X, διότι:

(i) $(x,x) \in R$ $\forall x \in X$, διότι υπάρχει $A \in D$ ώστε $x \in A$.

(ii) Προφανώς, αν $(x,y) \in R$, τότε $(y,x) \in R$.

(iii) Αν $(x,y) \in R$ και $(y,z) \in R$, τότε υπάρχουν $A, B \in D$ ώστε $\{x,y\} \subseteq A$ και $\{y,z\} \subseteq B$.

Όμως τότε $y \in A \cap B \neq \emptyset$.

Αφού D είναι διαμέριση του X, και $A, B \in D$ έχουμε ότι $A = B$ και επομένως $\{x,z\} \subseteq A \Leftrightarrow (x,z) \in R$.

Άρα, η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας.