Κεφάλαιο 1

...τοιχεία Θεωρίας συνόλων

..1. Σύνολα

...Η έννοια του **συνόλου** είναι **αρχική** για τα μαθηματικά, δηλαδή δεν **ορίζεται**.

Ένα σύνολο A καθορίζεται αν γνωρίζουμε ακριβώς τα στοιχεία του, δηλαδή αν για οποιοδήποτε μαθηματικό αντικείμενο x ισχύει **μία** ακριβώς από τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

είτε $x \in A$, δηλαδή το x είναι στοιχείο του A,

είτε $x \notin A$, δηλαδή το x δεν είναι στοιχείο του A

Τα σύνολα συμβολίζονται:

είτε με **αναγραφή** όλων των στοιχείων τους:

π.χ. $A = \{1, 0, \{1\}, 2, \sqrt{3}\}$

είτε περιγράφοντας τα στοιχεία τους:

π.χ $B = \{x \mid x$ άρτιος φυσικός αριθμός$\}$

ή $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ άρτιος$\}$

όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Συμβολίζουμε με $\emptyset$ το σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο, άρα $x \notin \emptyset$ για κάθε μαθηματικό αντικείμενο x, π.χ. $\emptyset \notin \emptyset$.

Το σύνολο $\emptyset$ ονομάζεται **κενό** σύνολο.

<u>Παραδείγματα</u>

$2 \in \{1, 2\}$, $\{2\} \notin \{1, 2\}$ (το $\{2\}$ είναι σύνολο το 2 είναι αριθμός)

$1 \in \{1, 2\}$,

$\emptyset \notin \{1, 2\}$ (το $\emptyset$ είναι σύνολο, όχι αριθμός)

$3 \in \{x \in \mathbb{N} : x - 3 = 0\}$, διότι, $3 \in \mathbb{N}$, $3 - 3 = 0$.

$\{x \in \mathbb{N} \mid x = x + 2\} = \emptyset$, διότι $x + 2 > x \ \forall x \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Άσκηση 1.1.1.

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(α) $1 \in \{1, 2\}$ A

(β) $3 \in \{1, 5, 2\ 3\}$ A

(γ) $3 \in \{1, 5, 2\}$ Ψ

(δ) $\{1, 3\} \in \{1, 3, 5, 2\}$ Ψ, διότι το σύνολο $\{1,3\} \notin \{1, 3, 5, 2\}$

(ε) $\{5\} \in \{1, 3, 5, 2\}$ Ψ, το σύνολο $\{5\} \notin \{1, 3, 5, 2\}$

(στ) $2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ A

(ζ) $\{1, 4, 2, 3\} = \{2, 3, 1, 4, 3, 2\}$ A

διότι περιέχουν τα ίδια στοιχεία

(η) $\{a, d, b, d\} = \{a, b, d\}$ A

(θ) $\{a, b, d, d\} = \{a, b, \alpha, d\} = \{a, b, d\}$ A

(i) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2x = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x = 0\}$ A

διότι και τα δύο σύνολα είναι ίσα με το σύνολο $\{0, 2\}$

($\mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών και $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών)

Ορισμός Δύο σύνολα A, B είναι **ίσα** αν έχουν τα ίδια στοιχεία. Τότε γράφουμε $A = B$.
Αν τα A, B δεν είναι ίσα γράφουμε $A \neq B$.
Για παράδειγμα: $A = \{ \alpha, \gamma, \delta \} = \{ \delta, \alpha, \gamma \} = B$,
$\{ x \in \mathbb{N} / x - 3 = 0 \} = \{3\}$, $\{ \alpha, \beta, \gamma, \beta \} = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$.

$$A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

Ορισμός Ένα σύνολο B είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου A αν κάθε στοιχείο του B είναι στοιχείο του A, δηλαδή, $x \in B \Longrightarrow x \in A$.
Τότε λέμε επίσης ότι το B **περιέχεται** στο A και γράφουμε $B \subseteq A \Longleftrightarrow (x \in B \Longrightarrow x \in A)$
π.χ $B = \{ 1, \beta, \alpha \} \subseteq \{ 3, 1, \alpha, 5, \beta \} = A$

Παρατηρήσεις

Προφανώς, για κάθε σύνολο A ισχύουν:
(1) $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$, και
(2) $A \subseteq \emptyset \Longrightarrow A = \emptyset$ (Έστω $x \in A$, αφού $A \subseteq \emptyset$ έχουμε ότι $x \in \emptyset$, άτοπο. Άρα $A = \emptyset$)

Πρόταση 1.2.1.

Αν A, B είναι δύο σύνολα, τότε:
$A = B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αφού $A = B$, τα A, B έχουν τα ίδια στοιχεία.
Άρα, καθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, οπότε $A \subseteq B$ και επίσης κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A, άρα, $B \subseteq A$.
Αντίστροφα, αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A, σύμφωνα με τον ορισμό του υποσυνόλου.
Δηλαδή, τα A, B έχουν ίδια ακριβώς στοιχεία, οπότε $A = B$.

Πρόταση 1.2.1.

Αν A, B, Γ είναι σύνολα και $A \subseteq B$, $B \subseteq \Gamma$, τότε ισχύει $A \subseteq \Gamma$.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό, αφού $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο και του B και κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του Γ. Άρα, κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του Γ, οπότε από τον ορισμό του υποσυνόλου, έχουμε ότι $A \subseteq \Gamma$.

Άσκηση 1.2.3

(α) $1 \subseteq \{1,2\}$ Ψ

(β) $\{3,1\} \subseteq \{1,5,2,3\}$ Α

(γ) $\{3\} \subseteq \{1,5,2\}$ Ψ

(δ) $\{1,3\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(ε) $\{5\} \in \{1,3,5,2\}$ Ψ

(στ) $2 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ Α

(ζ) $\{1,4,2,3\} \subseteq \{2,3,1,4,3,2\}$ Α

(η) $\{a,d,b,d\} \subseteq \{a,b,a,d\}$ Α

(θ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b > 2\} = \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$ Α

(ι) $\{b \in \mathbb{N} \mid b > 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} \mid a > 2\}$ Α

(ια) $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}\}$ Ψ

(ιβ) $\{2\} \in \{1, \{2\}\}$ Α

(ιγ) $\{b \in \mathbb{N} \mid b \geq 2\} \subseteq \{a \in \mathbb{N} : a > 2\}$ Ψ

(ιδ) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 2 = 0\} = \emptyset$ Α

($\mathbb{N}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών,
$\mathbb{Q}$, το σύνολο των ρητών αριθμών
$\mathbb{R}$, το σύνολο των πραγματικών αριθμών)

Εξετάστε αν οι παραπάνω σχέσεις είναι αληθείς ή ψευδείς, δίνοντας την κατάλληλη εξήγηση.

$\boxed{\text{Εργασία}}$

Ασκήσεις (1.7. Παράγραφος Σημειώσεων)

1, 2 και 3.