Περίληψη 1ου μαθήματος
Συναρτήσεις

Ορισμός 1 Έστω A, B δύο σύνολα.
Μια (διμελής) σχέση $R \subseteq A \times B$ από το A στο B λέγεται συνάρτηση (ή απεικόνιση) αν ισχύει η συνθήκη:

Για κάθε $a \in A$ υπάρχει μοναδικό $b \in B$ ώστε $(a, b) \in R$

Παραδείγματα

1. Έστω $R = \{(1, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha)\}$
   Η R είναι συνάρτηση από το $A = \{1, 2, 3\}$ στο $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$
2. Έστω $R_1 = \{(1, n) : n \in \mathbb{N} \text{ και } n = 2k+1 \text{ για } k \in \mathbb{N}\}$
   δεν είναι συνάρτηση διότι $(1,3) \in R_1$, $(1,5) \in R_1$
3. $R_2 = \{(n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συνάρτηση.

Για τις συναρτήσεις συνήθως γράφουμε:

- $f, g, h, \varepsilon, \gamma, \ldots$ αντί R
- Γράφουμε $f : A \to B$ για μια συνάρτηση f από το A στο B αντί $f \subseteq A \times B$ και
- γράφουμε $f(a) = \beta$ αντί $(a, \beta) \in f$

Ορισμός 2
Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται ένα προς ένα (1-1) αν ισχύει η συνεπαγωγή:

$$a_1, a_2 \in A \text{ με } f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$$

ή ισοδύναμα αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$a_1, a_2 \in A \text{ με } a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Ορισμός 3
Μια συνάρτηση $f : A \to B$ λέγεται επί του B αν για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε

$$f(a) = \beta \Leftrightarrow (a, \beta) \in f$$

Η συνάρτηση $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\})$ με $f(n) = 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι **1-1** διότι αν $f(n_1) = 2n_1 = f(n_2) = 2n_2$ τότε $n_1 = n_2$ και **δεν είναι επί** διότι $m = 3$ δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ με $f(n) = 3$.

<u>Ορισμός 4</u> Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **αμφιμονοσήμαντη** αν είναι **1-1** και **επί** του B

<u>Ορισμός 5</u> Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **αντιστρέψιμη** αν η αν η αντίστροφη σχέση $f^{-1} = \{(b, \alpha) \in B \times A : (a, b) \in f\}$ είναι συνάρτηση από το B στο A.

<u>Πρόταση</u>
Μια συναρτηση $f: A \to B$ είναι **αντιστρέψιμη** αν και μόνο αν είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί).
<u>Απόδειξη</u>
Η f είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν η $f^{-1}: B \to A$ είναι συνάρτηση αν και μόνο αν για **κάθε** $b \in B$ υπάρχει **μοναδικό** $a \in A$ ώστε:
$$[(b, a) \in f^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in f \Leftrightarrow b = f(a)]$$
και ισοδύναμα
$$\text{η } f \text{ είναι } \mathbf{1-1} \text{ και } \mathbf{επί} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{ η } f \text{ είναι αμφιμονοσήμαντη.}$$
<u>Παρατήρηση</u>
Η αντιστροφη συνάρτηση της $f: A \to B$ υπάρχει μόνο αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη ενώ η αντιστροφη σχέση της f ορίζεται πάντα.

<u>Ορισμός</u> Έστω μια συνάρτηση $f: A \to B$
Για κάθε $X \subseteq A$ ορίζουμε:

$$f(X) = \{ f(x) : x \in X \} \subseteq B$$

Για κάθε $Y \subseteq B$ ορίζουμε:

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in A : f(x) \in Y \} \subseteq A$$

Για παράδειγμα: Έστω $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ ώστε:

$f(n) = 0$ αν n άρτιος, και
$f(n) = 1$ αν n περιττός

Τότε: $f(\{1, 3, 13\}) = \{1\}$ $\quad f(\{2, 3, 5, 8\}) = \{0, 1\}$
$f^{-1}(\{0, 1\}) = \mathbb{N}$ $\quad f^{-1}(\{1\}) = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$
$f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

<u>Πρόταση</u> Έστω συνάρτηση $f: A \to B$. Ισχύουν:

(i) Αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, τότε $f(X_1) \subseteq f(X_2) \subseteq B$.
(Έστω $y \in f(X_1)$. Τότε $y = f(x)$ για $x \in X_1$.
Αφού $x \in X_1 \subseteq X_2$, $x \in X_2$, άρα $y = f(x) \in f(X_2)$)

(ii) Αν $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$, τότε $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2) \subseteq A$
(Έστω $x \in f^{-1}(Y_1)$. Τότε $f(x) \in Y_1 \subseteq Y_2$.
Άρα, $f(x) \in Y_2$ και ακολούθως $x \in f^{-1}(Y_2)$)

(iii) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ $\forall$ $X \subseteq A$.
(Έστω $x \in X$. Τότε $f(x) \in f(X)$, άρα $x \in f^{-1}(f(X))$.)

(iv) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$ $\forall$ $Y \subseteq B$.
(Έστω $y \in f(f^{-1}(Y))$. Τότε $y = f(x)$ για $x \in f^{-1}(Y)$.
Άρα $f(x) \in Y$ και τελικά $y = f(x) \in Y$.

(v) Αν $X_1, X_2 \subseteq A$, τότε $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.
(Έστω $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Τότε $y = f(x)$ για $x \in X_1 \cup X_2$
Άρα είτε $x \in X_1$, οπότε $y \in f(X_1)$
είτε $x \in X_2$ οπότε $y \in f(X_2)$

Επομένως $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.
Άρα $f(X_1 \cup X_2) \subseteq f(X_1) \cup f(X_2)$
Τώρα έστω $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$.
Τότε είτε $y = f(x_1)$ για $x_1 \in X_1$
είτε $y = f(x_2)$ για $x_2 \in X_2$
Σε κάθε περίπτωση $y = f(x)$ για $x \in X_1 \cup X_2$
οπότε $y \in f(X_1 \cup X_2)$
Άρα, $f(X_1) \cup f(X_2) \subseteq f(X_1 \cup X_2)$ και
τελικά $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.)

$(v)_2$ Αν $X_1, X_2 \subseteq A$, τότε $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.
(Έστω $y \in f(X_1 \cap X_2)$. Τότε $y = f(x)$ για $x \in X_1 \cap X_2$.
Επομένως $y \in f(X_1) \cap f(X_2)$
Τελικά $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$)
Δεν ισχύει η ισότητα: Έστω $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,
$X_1 = \{\alpha, \beta\}$, $X_2 = \{\beta, \gamma\}$, άρα $X_1 \cap X_2 = \{\beta\}$
και $f: A \to \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 2$, $f(\gamma) = 1$
Τότε $f(X_1 \cap X_2) = f(\{\beta\}) = \{2\}$ και
$f(X_1) \cap f(X_2) = \{1, 2\} \cap \{1, 2\} = \{1, 2\}$.

$(vi)_1$ Αν $Y_1, Y_2 \subseteq B$ τοτε $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
(Έστω $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. Τότε $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$, άρα
είτε $f(x) \in Y_1 \iff x \in f^{-1}(Y_1)$,
είτε $f(x) \in Y_2 \iff x \in f^{-1}(Y_2)$. Άρα, $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
Άρα $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
Έστω $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$. Τότε
είτε $x \in f^{-1}(Y_1) \Rightarrow f(x) \in Y_1$
είτε $x \in f^{-1}(Y_2) \Rightarrow f(x) \in Y_2$
Συνεπώς, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ και
τελικά $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
Άρα $f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.
Επομένως $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.
$(vi)_2$ $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ (άσκηση)