Περίληψη 8ου μαθήματος
Συναρτήσεις (συνέχεια)

Ορισμός Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to B$ και $g: \Gamma \to \Delta$, όπου $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subseteq \Gamma$.
Τότε ορίζεται η συνάρτηση:

$$g \circ f : A \to \Delta \quad \text{όπου } g\circ f(x) = g(f(x)) \text{ για κάθε } x \in A.$$

(η συνάρτηση $g\circ f$ είναι καλά ορισμένη διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \in f(A) \subseteq \Gamma$, άρα $f(x) \in \Gamma$ και άρα ορίζεται το $g\circ f(x) = g(f(x)) \in \Delta$.)

Η συνάρτηση $g\circ f : A \to \Delta$ ονομάζεται σύνθεση της f με την g και ορίζεται αν $f(A) \subseteq \Gamma$

Πρόταση Έστω οι συναρτήσεις $f: A \to B$, $g: \Gamma \to \Delta$, $h: E \to Z$ όπου $f(A) \subseteq \Gamma$ και $g(\Gamma) \subseteq E$.
Τότε ορίζονται οι συναρτήσεις

$$h\circ(g\circ f) : A \to Z \quad \text{και}$$
$$(h\circ g)\circ f : A \to Z,$$

και μάλιστα $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ (προσαιτεριστική)

Απόδειξη

Αφού $f(A) \subseteq \Gamma$, ορίζεται η $g\circ f : A \to \Delta$ συνάρτηση και αφού $g\circ f(A) = g(f(A)) \subseteq g(\Gamma) \subseteq E$, ορίζεται και η συνάρτηση $h\circ(g\circ f) : A \to Z$ και μάλιστα για $x \in A$ έχουμε:

$$h\circ(g\circ f)(x) = h(g\circ f(x)) = h(g(f(x))).$$

Αφού $g(\Gamma) \subseteq E$, ορίζεται η $h\circ g : \Gamma \to Z$ συνάρτηση και αφού $h\circ g(\Gamma) = h(g(\Gamma)) \subseteq h(E) \subseteq Z$, ορίζεται και η συνάρτηση $(h\circ g)\circ f : A \to Z$ και μάλιστα

$$(h\circ g)\circ f(x) = h\circ g(f(x)) = h(g(f(x))) = h\circ(g\circ f)(x)$$

για κάθε $x \in A$.

Παρατηρούμε ότι $h\circ(g\circ f)(x) = (h\circ g)\circ f(x) \ \forall x \in A$.
Άρα $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

Πρόταση Έστω $f: A \to B$ και $g: B \to C$ δύο συναρτήσεις. Ισχύουν οι επόμενες Προτάσεις:
(i) Αν η f και η g είναι 1-1, τότε η $g \circ f$ είναι 1-1.
(ii) Αν η $g \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.
(iii) Αν η f και η g είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επί.
(iv) Αν η $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.

Απόδειξη ($g \circ f(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in A$, $g \circ f: A \to C$.
(σημειώσεις μαθήματος) Πρόταση 2.6.11

Ορισμός

Έστω ένα σύνολο $A \neq \emptyset$.
Η (διμελής) σχέση της ισότητας για τα στοιχεία του A περιγράφεται ως

$$\Delta_A = \{(a,a) : a \in A\} \subseteq A \times A.$$

Η σχέση Δ_A ταυτίζεται με την συνάρτηση

$$id_A : A \to A \quad \text{με } id_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Η συνάρτηση id_A ονομάζεται **ταυτοτική συνάρτηση**.

Παρατηρήσεις

1. Παρατηρούμε ότι για κάθε συνάρτηση $f: A \to B$ ισχύει ότι: $f \circ id_A = f$ και $id_B \circ f = f$, διότι για κάθε $x \in A$ ισχύει $f \circ id_A(x) = f(x) = id_B(f(x)) = id_B \circ f(x)$
2. Επίσης αν $f: A \to B$ συνάρτηση 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη) τότε η σχέση

$$f^{-1} : B \to A \quad \text{μέ } f^{-1}(b) = a \text{ όπου } b = f(a)$$

είναι **συνάρτηση**, όπως αναφέραμε, διότι για κάθε $b \in B$ υπάρχει μοναδικό $a \in A$ ώστε $b = f(a)$.
Μάλιστα, $f^{-1} \circ f : A \to A$ $\quad f \circ f^{-1} : B \to B$
και $f^{-1} \circ f = id_A$, $\quad f \circ f^{-1} = id_B$,
διότι για $a \in A$ έχουμε $f^{-1} \circ f(a) = f^{-1}(f(a)) = a$.
εφ' όσον f είναι 1-1. (Έστω $f^{-1}(f(a)) = c \in A$. Τότε $f(c) = f(a)$ άρα $c = a$.) Για $b \in B$ έχουμε ότι υπάρχει μοναδικό $a \in A$ (f 1-1, επί) ώστε $b = f(a) \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$. Άρα $f(f^{-1}(b)) = b$.

Πρόταση

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η f είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1 και επί)

(ii) Η f είναι **αντιστρέψιμη**, δηλαδή η αντίστροφη σχέση $f^{-1}: B \to A$ με $f^{-1}(b) = a$, αν $f(a) = b$ είναι συνάρτηση

(iii) Υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g: B \to A$ ώστε $g \circ f = id_A$ και $f \circ g = id_B$ $(g = f^{-1})$

Απόδειξη

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι η f είναι 1-1 και επί.
Για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $b = f(a)$, διότι η f είναι **επί** του B.
Το $a \in A$ με την ιδιότητα $b = f(a)$ είναι **μοναδικό** διότι αν υπήρχε $a_1 \in A$ με $b = f(a_1)$, τότε $\beta = f(a_1) = f(a)$ και συνεπώς $a = a_1$, διότι η f είναι 1-1.
Ορίζοντας λοιπόν για $b \in B$ το $f^{-1}(b) = a \in A$ αν $b = f(a)$ έχουμε μια συνάρτηση

$$f^{-1}: B \to A \quad \text{με} \quad f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έστω ότι η f είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή η σχέση $f^{-1}: B \to A$ με $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$ είναι **συνάρτηση**. Τότε η f είναι **επί** διότι για κάθε $b \in B$ υπάρχει $a \in A$ ώστε $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ και είναι 1-1 διότι το a είναι μοναδικό ώστε $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$ ~~και~~ άρα αν $a_1 \neq a$ τότε $f(a_1) \neq f(a) = b$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Η συνάρτηση $f^{-1}: B \to A$ έχει τις ιδιότητες $f^{-1} \circ f = id_A$ και $f \circ f^{-1} = id_B$
Έστω $g \circ f = id_A$ και $f \circ g = id_B$, όπου $g: B \to A$
Τότε $g = g \circ id_B = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$
Άρα, $g = f^{-1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση $g: B \to A$ ώστε $g \circ f = id_A$ και $f \circ g = id_B$

Η f είναι 1-1, διότι αν $f(x_1) = f(x_2)$ για $x_1, x_2 \in A$, τότε $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$.

Η f είναι επί, διότι αν $y \in B$, τότε $y = id_B(y) = f \circ g(y) = f(g(y))$, με $g(y) \in A$.

Άρα για $x = g(y) \in A$ έχουμε ότι $y = f(x)$.

<u>Ορισμός</u> Έστω μια συνάρτηση $f: A \to B$.

(1) Μια συνάρτηση $g: B \to A$ ώστε $g \circ f = id_A$ λέγεται **αριστερή αντίστροφη** της f.

(2) Μια συνάρτηση $h: B \to A$ ώστε $f \circ h = id_B$ λέγεται **δεξιά αντίστροφη** της f.

<u>Πρόταση</u> (i) Μια συνάρτηση $f: A \to B$ έχει αριστερή αντίστροφη αν και μόνο αν είναι 1-1

(ii) Μια συνάρτηση f έχει δεξιά αντίστροφη αν και μόνο αν είναι επί.

<u>Απόδειξη</u>

(i) Έστω $g: B \to A$ αριστερή αντίστροφη της f, δηλαδή $g \circ f = id_A$. Αν $f(x_1) = f(x_2)$, έχουμε ότι $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, άρα η f είναι 1-1

Αντίστροφα, αν η f είναι 1-1, τότε μπορούμε να ορίσουμε μια αριστερή αντίστροφη $g: B \to A$ ως ακολούθως: Έστω $y \in B$. Αν $y \in f(A)$, τότε $y = f(x)$ για μοναδικό $x \in A$, διότι η f είναι 1-1. Θέτουμε λοιπόν $g(y) = x$. Αν $y \notin f(A)$, τότε θέτουμε $g(y) = a_0$ για κάποιο $a_0 \in A$

Τότε $g \circ f = id_A$, διότι για $x \in A$ έχουμε $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$

(ii) Έστω $h: B \to A$ δεξιά αντίστροφος της f, δηλαδή $f \circ h = id_B$. Τότε για $y \in B$, έχουμε ότι $y = f(h(y))$, όπου $h(y) \in A$. Άρα η f είναι επί.
Αντίστροφα αν η f είναι επί. Τότε για κάθε $y \in B$ ~~υπάρχει~~ επιλέγουμε ένα $x_y \in A$ ώστε $f(x_y) = y$. Θέτουμε $h: B \to A$, την συνάρτηση με $h(y) = x_y$ για κάθε $y \in B$.
Τότε $f \circ h = id_B$, διότι για $y \in B$ έχουμε $f(h(y)) = f(x_y) = y$.

<u>Πόρισμα</u> Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Αν η f έχει αριστερή αντίστροφο $g: B \to A$ και δεξιά αντίστροφο $h: A \to B$ τότε είναι αντιστρέψιμη και μάλιστα $f^{-1} = g = h$.

<u>Απόδειξη</u>
Αφού η f έχει αριστερή και δεξιά αντίστροφο η f είναι 1-1 και επί. Άρα είναι αντιστρέψιμη και υπάρχει συνάρτηση f^{-1} ώστε $f \circ f^{-1} = id_B$ και $f^{-1} \circ f = id_A$.
Αφού $g \circ f = id_A$ και $f \circ h = id_B$ έχουμε:
$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h.$$

Άρα η $g = h = f^{-1}$ είναι η αντίστροφη της f.

<u>Ασκήσεις:</u> 23 έως 46