9. Φυσικοί αριθμοί

Σκοπός του μαθήματος είναι να ορίσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών και να καταγράψουμε τις βασικές ιδιότητές τους.

Ο Peano (το 19ο αιώνα) όρισε με αξιωματικό τρόπο το σύνολο $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$ των φυσικών αριθμών μέσω μιας συνάρτησης $\varepsilon:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ (ο $\varepsilon(n)$ είναι ο επόμενος φυσικός αριθμός του n) ως ακολούθως:

Αξίωμα ύπαρξης του συνόλου των φυσικών αριθμών
Υπάρχουν ένα σύνολο $\mathbb{N}_0$ και μια συνάρτηση $\varepsilon:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ που ικανοποιούν τα αξιώματα:

(Φ_1) Η συνάρτηση ε δεν είναι επί του $\mathbb{N}_0$, διότι υπάρχει στοιχείο $0\in\mathbb{N}_0$ ώστε:
$$\varepsilon(n)\neq 0 \text{ για κάθε } n\in\mathbb{N}_0.$$

(Φ_2) Η συνάρτηση ε είναι 1-1, δηλαδή αν $m,n\in\mathbb{N}_0$ με $\varepsilon(m)=\varepsilon(n)$ τότε $m=n$.

(Φ_3) Αν $S\subseteq\mathbb{N}_0$ ώστε:
(i) $0\in S$, και
(ii) αν $n\in S$, τότε $\varepsilon(n)\in S$
τότε $S=\mathbb{N}_0$
(αρχή επαγωγής)

Δεχόμενοι αυτό το Αξίωμα μπορούμε να αποδείξουμε Προτάσεις της Αριθμητικής αλλά και να κατασκευάσουμε τους ακέραιους, τους ρητούς, αλλά και τους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση 1.

Αν $n \in \mathbb{N}_0$ και $n \neq 0$, τότε υπάρχει μοναδικό $m \in \mathbb{N}_0$ ώστε $n = \varepsilon(m)$. $(\mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = \{\varepsilon(m) : m \in \mathbb{N}_0\})$

Απόδειξη

Θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{0\} \cup \{\varepsilon(m) : m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 .$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\boxed{S = \mathbb{N}_0}$.
Σύμφωνα με το αξίωμα Φ_3 αρκεί να αποδείξουμε ότι:

(i) $0 \in S$, και

(ii) αν $n \in S$, τότε $\varepsilon(n) \in S$

Προφανώς $0 \in S$ και άρα ισχύει η (i).
Επίσης, αν $n \in S$, τότε απο τον ορισμό του S, έχουμε ότι $n \in \mathbb{N}_0$ και άρα $\varepsilon(n) \in S$. Επομένως, ισχύει η (ii).
Σύμφωνα με το αξίωμα Φ_3 ισχύει $S = \mathbb{N}_0$
Επομένως, αν $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\} = S \setminus \{0\}$, τότε $n = \varepsilon(m)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}_0$.

Για κάθε $n \neq 0$ υπάρχει μοναδικό $m \in \mathbb{N}_0$ ώστε $n = \varepsilon(m)$.
Πράγματι, αν $n = \varepsilon(m_1) = \varepsilon(m)$ για $m, m_1 \in \mathbb{N}_0$ τότε απο το αξίωμα Φ_2 θα έχουμε ότι $m_1 = m$.

Παρατηρήσεις:

(1) Απο την Προταση 1 έχουμε ότι:
$$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \{\varepsilon(m) : m \in \mathbb{N}_0\}.$$

(2) Απο το αξίωμα Φ_1 έχουμε ότι
$$\varepsilon(m) \neq 0 \text{ για καθε } m \in \mathbb{N}_0$$

(3) Το 0 είναι το μόναδικό στοιχειο του $\mathbb{N}_0$ που δεν είναι επόμενο άλλου στοιχείου.

Επαγωγικές αποδείξεις

Η απόδειξη της Πρότασης 1 είναι παράδειγμα απόδειξης με χρήση της αρχής της επαγωγής (Φ_3) ακολουθώντας τα ακόλουθα 3 βήματα:

1. Ορίσαμε ένα κατάλληλο υποσύνολο S του $\mathbb{N}_0$.
2. Αποδείξαμε ότι:
   (i) $0 \in S$ και
   (ii) αν $n \in S$ τότε $\varepsilon(n) \in S$
3. Απο το αξίωμα Φ_3 συμπεράναμε ότι
   $S = \mathbb{N}_0$

Όλες οι επαγωγικές αποδείξεις έχουν την ίδια δομή.
Έστω $P(n)$ μια πρόταση που είναι αληθής ή ψευδής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1. Ορίζουμε $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ αληθής}\} \subseteq \mathbb{N}$
2. Αποδεικνύουμε ότι:
   (i) $0 \in S$, δηλαδή η $P(0)$ είναι αληθής
   και (ii) αν $n \in S$ τότε $\varepsilon(n) \in S$
   δηλαδή αν $P(n)$ αληθής τότε $P(\varepsilon(n))$ αληθής.
3. Απο το αξίωμα Φ_3 συμπεραίνουμε ότι
   $S = \mathbb{N}_0$
   δηλαδή η $P(n)$ είναι αληθής
   για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>Ορισμός</u>

Ορίζουμε $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ και $1 = \varepsilon(0) \neq 0$

Οπότε $1 \in \mathbb{N}$ και $1 \neq 0$

Θεώρημα 2 (αναδρομής)
Έστω ένα σύνολο X, μία συνάρτηση $f: X \to X$ και $c \in X$. Τότε υπάρχει μοναδική ακολουθία $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \subseteq X$ (δηλαδή συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N}_0 \to X$ με $\varphi(n) = \varphi_n$) ώστε:

(α) $\varphi_0 = c$ $\quad(\varphi(0) = c)$ και

(β) $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$ $\quad(\varphi(\varepsilon(n)) = f(\varphi(n)))$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη

Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{N}_0 \to X$ (δηλαδή η ακολουθία $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ που αναζητούμε) είναι μια σχέση φ απο το $\mathbb{N}_0$ στο X, δηλαδή,

$$\varphi \equiv \{(n, \varphi(n)) : n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times X$$

τέτοια ώστε:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ υπάρχει $x \in X$ ώστε: $(n, x) \in \varphi$, και

(ii) Αν $(n, x) \in \varphi$, και $(n, y) \in \varphi$, τότε $x = y$.

και επιπλέον:

(α) $(0, c) \in \varphi$ $\quad(\varphi(0) = c)$ και

(β) Αν $(n, x) \in \varphi$, τότε $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi$ (αν $\varphi(n) = x$, τότε $\varphi(\varepsilon(n)) = f(x)$).

Προφανώς το σύνολο $\mathbb{N}_0 \times X$ ορίζει μία σχέση απο το $\mathbb{N}_0$ στο X που ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β).

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η τομή όλων των σχέσεων $U \subseteq \mathbb{N}_0 \times X$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (α) και (β), ικανοποιεί τις συνθήκες (α) και (β), αλλά και τις συνθήκες (i) και (ii).

Έστω $\mathcal{T} = \{\mathcal{U} \subseteq \mathbb{N}_0 \times X : (0, c) \in \mathcal{U}$ και $(\varepsilon(n), f(x)) \in \mathcal{U}$ αν $(n, x) \in \mathcal{U}\}$, η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{N}_0 \times X$ που ικανοποιούν τις συνθήκες (α) και (β).

Προφανώς $\mathcal{T} \neq \emptyset$, διότι $\mathbb{N}_0 \times X \in \mathcal{T}$.

Ορίζουμε:

$$\varphi = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{T}} \mathcal{U} \subseteq \mathbb{N}_0 \times X.$$

Το σύνολο φ ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β) προφανώς (μάλιστα είναι το μικρότερο σύνολο που τις ικανοποιεί).

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο φ ικανοποιεί και τις ιδιότητες (i) και (ii), δηλαδή η σχέση $\varphi \subseteq \mathbb{N}_0 \times X$ είναι **συνάρτηση** από το $\mathbb{N}_0$ ~~στο~~ X.

(i) Έστω $S = \{n \in \mathbb{N}_0 :$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $(n, x) \in \varphi\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Τότε $0 \in S$, διότι $(0, c) \in \varphi$ (από την **(α)**) και αν $n \in S$, τότε $\varepsilon(n) \in S$, διότι αν $n \in S$, τότε $(n, x) \in \varphi$ για $x \in X$ και άρα ((β)) $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi$. Άρα, $\boxed{S = \mathbb{N}_0}$, απο το αξίωμα Φ_3.

(ii) Έστω $M = \{n \in \mathbb{N}_0 :$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $(n, x) \in \varphi\}$. Τότε $[0 \in M]$: Έχουμε ότι $(0, c) \in \varphi$. Έστω $(0, d) \in \varphi$ και $d \neq c$. Ορίζουμε την σχέση $\varphi_1 = \varphi \setminus \{(0, d)\}$. Τότε: $(0, c) \in \varphi_1$, άρα η σχέση φ_1 ικανοποιεί την συνθήκη (α). Επίσης, αν $(n, x) \in \varphi_1 \subseteq \varphi$, τότε $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi$, διότι η φ ικανοποιεί την ιδιότητα (β), άρα ($\varepsilon(n) \neq 0$) $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi \setminus \{(0, d)\} = \varphi_1$, και η φ_1 ικανοποιεί την (β). Άτοπο, διότι το φ είναι το μικρότερο σύνολο που ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β)). Άρα, $0 \in M$.

Επίσης, $[n \in M \Rightarrow \varepsilon(n) \in M]$ Έστω $n \in M$. Επομένως, υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε $(n, x) \in \varphi$.

Αφού η σχέση φ ικανοποιεί την ιδιότητα (β), και $(n, x) \in \varphi$, έχουμε ότι $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi$.
Για να αποδείξουμε ότι $\varepsilon(n) \in M$, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $y \in X$ ώστε $(\varepsilon(n), y) \in \varphi$ και $y \neq f(x)$.
Θεωρούμε το σύνολο $\varphi_2 = \varphi \setminus \{(\varepsilon(n), y)\}$.
Τότε:
(α) $(0, c) \in \varphi_2$, διότι $(0, c) \in \varphi$ και $(0, c) \neq (\varepsilon(n), y)$ διότι $0 \neq \varepsilon(n)$.
(β) Έστω $(m, z) \in \varphi_2$. Τότε $(\varepsilon(m), f(z)) \in \varphi_2$. Πράγματι
($β_1$) Αν $m = n$, τότε $(n, z) \in \varphi_2$, άρα $(n, z) \in \varphi$.
Αφού $(n, x) \in \varphi$ και φ συνάρτηση, έχουμε ότι $z = x$. Επίσης, αφού $(n, x) \in \varphi$, έχουμε $(\varepsilon(n), f(x)) \in \varphi$ και $(\varepsilon(n), y) \neq (\varepsilon(n), f(x))$, διότι $y \neq f(x)$.
($β_2$) Αν $m \neq n$, τότε $(\varepsilon(m), f(z)) \in \varphi$ και $\varepsilon(m) \neq \varepsilon(n)$, άρα $(\varepsilon(m), f(z)) \neq (\varepsilon(n), y)$ και συνεπώς $(\varepsilon(m), f(z)) \in \varphi_2$

Σε όλες τις περιπτώσεις το φ_2 ικανοποιεί το (β) και αφού το $\varphi_2 \subsetneq \varphi$ (φ_2 γνήσιο υποσύνολο του φ) έχουμε καταλήξει σε άτοπο.
Επαγωγικά έχουμε λοιπόν $M = \mathbb{N}_0$ και η σχέση φ ικανοποιεί και την (ii)

Η μοναδικότητα της φ έπεται από τον ορισμό της ως τομή.

Με χρήση του Θεωρήματος αναδρομής μπορούμε να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς:

Ορισμός Πρόσθεσης αριθμών

Έστω $m \in \mathbb{N}_0$.

Για $X = \mathbb{N}_0$, $f = \varepsilon : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με $f(n) = \varepsilon(n)$ και $c = m$ εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2 (αναδρομής) έχουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση.

$\varphi_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ώστε:

(α) $\varphi_m(0) = m$ και

(β) $\varphi_m(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\varphi_m(n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ορίζοντας $\boxed{m+n = \varphi_m(n)}$ έχουμε τον αναδρομικό ορισμό της πράξης της πρόσθεσης:

$$+ \quad \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad (m,n) \to \varphi_m(n) = m+n,$$

ώστε $m + 0 = m$ και

$$m + \varepsilon(n) = \varepsilon(m+n)$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_0$

Ορισμός Πολλαπλασιασμού αριθμών

Έστω $m \in \mathbb{N}_0$.

Για $X = \mathbb{N}_0$, $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ με $f(r) = r + m$ και $c = m$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2, έχουμε ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\mu_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ώστε:

(α) $\mu_m(0) = 0$ και

(β) $\mu_m(\varepsilon(n)) = f(\mu_m(n)) = \mu_m(n) + m$

Ορίζοντας $\boxed{m \cdot n = \mu_m(n)}$ έχουμε τον αναδρομικό ορισμό της πράξης του πολλ/σμού:

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad (m,n) \to \mu_m(n) = m \cdot n,$$

ώστε $m \cdot 0 = 0$

$$m \cdot \varepsilon(n) = m \cdot n + m = m(n+1)$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Άσκηση

Με χρήση του Θεωρήματος 2 ορίστε:
την δύναμη m^n για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}_0$
μέσω της συνάρτησης

$\pi_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ ώστε $\pi_m(0) = 1$ και
$\pi_m(\varepsilon(n)) = \pi_m(n) \cdot m$

(Εφαρμόστε το Θεώρημα αναδρομής
για $X = \mathbb{N}$, $c = 1$, $f(r) = r \cdot m$
ώστε να ορίσετε το $m^n = \pi_m(n)$ για $m \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}_0$)

2 Κανόνες αριθμητικής

Από τον ορισμό της πρόσθεσης έχουμε ότι:

$$m + \varepsilon(0) = \varepsilon(m+0) = \varepsilon(m) \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}_0$$

Συμβολίζοντας το $\varepsilon(0)$ με το 1 $(\varepsilon(0) = 1)$
έχουμε ότι: $\boxed{m + 1 = \varepsilon(m)}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$

Λήμμα 3

Για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν:

$0 + m = m$, $1 + m = \varepsilon(m)$, $0 \cdot m = 0$, $1m = m$

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε την αρχή επαγωγής (Φ_3).
Ενδεικτικά αποδεικνύουμε $0 \cdot m = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$
Έστω το σύνολο $S = \{m \in \mathbb{N}_0 : 0 \cdot m = 0\}$
Εφ' όσον ισχύει $m \cdot 0 = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ (Ορισμός)
έχουμε ότι $0 \cdot 0 = 0$, άρα $\boxed{0 \in S}$.
Έστω $\boxed{m \in S}$, οπότε $0 \cdot m = 0$.
Έχουμε ότι $0 \cdot \varepsilon(m) = 0 \cdot m + 0 = 0 + 0 = 0$,
επειδή $m \cdot \varepsilon(n) = m \cdot n + m$ $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$.
και $m + 0 = m$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ (Ορισμοί $+, \cdot$)
Άρα, $\boxed{\varepsilon(m) \in S}$.
Από την Φ_3 έχουμε ότι $0 \cdot m = 0$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 4

Για κάθε $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν:

1. Προσεταιριστική ιδιότητα πρόσθεσης:
$$(m+n)+p = m+(n+p)$$
2. Μεταθετική ιδιότητα πρόσθεσης:
$$m+n = n+m$$
3. Προσεταιριστική ιδιότητα πολλαπλασιασμού:
$$(m.n).p = m.(n.p)$$
4. Μεταθετική ιδιότητα πολλαπλασιασμου:
$$m.n = n.m$$
5. Επιμεριστική ιδιότητα πολ/σμού - πρόσθεσης:
$$m.(n+p) = m.n + m.p.$$

Απόδειξη

2. Έστω τυχαίος αριθμός $m \in \mathbb{N}_0$.
Θα αποδείξουμε ότι:
$$m+n = n+m \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}_0 \text{(επαγωγικά)}$$
Έστω σταθερό $m \in \mathbb{N}_0$. και
$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : m+n = n+m\}.$$
Τότε $\boxed{0 \in S}$, διότι $m+0 = m = 0+m$.
Έστω $\boxed{n \in S}$ οπότε $n \in \mathbb{N}_0$ και $m+n = n+m \ \forall m \in \mathbb{N}_0$
και
$$m+\varepsilon(n) = \varepsilon(m+n) = \varepsilon(n+m) = n+\varepsilon(m) =$$
$$= n+(m+1) = (n+1)+m = \varepsilon(n)+m$$

Άρα $\boxed{\varepsilon(n) \in S}$. Άρα $S = \mathbb{N}_0$

3. Σταθεροποιούμε τούς $m, n \in \mathbb{N}_0$, και θα αποδείξουμε επαγωγικά ως προς p ότι:
$$(m.n).p = m.(n.p) \text{ για κάθε } p \in \mathbb{N}_0:$$
Για $p=0$ ισχύει η ισότητα.
Έστω ισχύει η ισότητα για το p.
Τότε ισχύει και για το $\varepsilon(p)$.
Συνεχίζουμε την απόδειξη ανάλογα.