Κεφάλαιο 1
Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων
Μάθημα 2

1.3 Το παράδοξο του Russel:

Η συλλογή Ω όλων των συνόλων
δεν είναι σύνολο!

Απόδειξη

Έστω ότι η συλλογή Ω όλων των συνόλων είναι σύνολο.
Τότε το

$$S = \{ A \in \Omega \mid A \notin A \}$$

είναι σύνολο, αφού υποθέσαμε ότι το Ω είναι σύνολο και μάλιστα το S είναι υποσύνολο του Ω

Άρα, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(1) $S \in S$, (2) $S \notin S$.

(1) Αν $S \in S$, τότε $S \notin S$, από τον ορισμό του συνόλου S.
Άτοπο!

(2) Αν $S \notin S$, τότε $S \in S$, από τον ορισμό του συνόλου S.
Άτοπο!

Άρα, δεν ισχύει ούτε η (1) ούτε η (2) περίπτωση.
Επομένως η συλλογή S δέν είναι σύνολο και ακολούθως η υποθεσή μας ότι η συλλογή Ω όλων των συνόλων είναι σύνολο δέν ισχύει!

Πράξεις συνόλων

1.4 Ενωση - Τομή

Ορισμός Έστω A, B δύο σύνολα. Ορίζεται η ένωση $A\cup B$ των A, B, ως το σύνολο με στοιχεία: όλα τα στοιχεία του A, όλα τα στοιχεία του B και μόνο αυτά.
Δηλαδή

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ είτε } x\in B \text{ (είτε και στα δύο)}\}$$

Παραδείγματα

1. Αν $A=\{2,4,5\}$, $B=\{2,4,7,9\}$, τότε
$A\cup B=\{2,4,5,7,9\}$ (γράφουμε μια φορά τα στοιχεία).

2. Αν $A=\{1,3,\{2\}\}$, $B=\{2,4,7,9\}$, $\Gamma=\{1,3\}$

$A\cup B=\{1,3,\{2\},2,4,7,9\}$
$A\cup\Gamma=\{1,3,\{2\}\}=A$, διότι $\Gamma\subseteq A$
$(A\cup B)\cup\Gamma=\{1,3,\{2\},2,4,7,9\}\cup\{1,3\}=A$
$A\cup(B\cup\Gamma)=\{1,3,\{2\}\}\cup\{1,2,3,4,7,9\}=$
$=\{1,3,\{2\},2,4,7,9\}=(A\cup B)\cup\Gamma.$

3. Αν $A=\{2,3,\phi\}$ $B=\{\{2\},3,\{\phi\}\}$
$A\cup B=\{2,3,\phi,\{2\},3,\{\phi\}\}$

4. Αν A, B δύο σύνολα, τότε:
$A\cup\phi=A$, $A\cup A=A$, $A\cup B=B\cup A$
$A\subseteq A\cup B$, $B\subseteq A\cup B$

Πρόταση

$A\subseteq B$ αν και μόνο αν $A\cup B=B$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $A\subseteq B$. Τότε $A\cup B\subseteq B$, διότι αν $x\in A\cup B$ τότε είτε $x\in A$, οπότε $x\in B$, αφού $A\subseteq B$, είτε $x\in B$. Οπότε σε κάθε περίπτωση έχουμε $x\in B$. Άρα $A\cup B\subseteq B$.
Προφανώς $B\subseteq A\cup B$. Άρα $A\cup B=B$

($\Leftarrow$) Αν $A\cup B=B$, προφανώς $A\subseteq B$.

Πρόταση 1.4.2

Έστω A, B, Γ σύνολα, τότε $(A\cup B)\cup\Gamma = A\cup(B\cup\Gamma)$.
(επιμεριστική ιδιότητα)

Απόδειξη

Ισχύει $(A\cup B)\cup\Gamma \subseteq A\cup(B\cup\Gamma)$. Πράγματι, έστω $x \in (A\cup B)\cup\Gamma$. Τότε είτε $x\in A\cup B$, είτε $x\in\Gamma$.
Αν $x\in A\cup B$, τότε είτε $x\in A$, οπότε $x\in A\cup(B\cup\Gamma)$, είτε $x\in B$, οπότε $x\in B\cup\Gamma$ και άρα $x\in A\cup(B\cup\Gamma)$.
Άρα, αν $x\in A\cup B$, τότε $x\in A\cup(B\cup\Gamma)$.
Αν $x\in\Gamma$, τότε $x\in B\cup\Gamma$ και άρα $x\in A\cup(B\cup\Gamma)$.
Επομένως, $(A\cup B)\cup\Gamma \subseteq A\cup(B\cup\Gamma)$
Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $A\cup(B\cup\Gamma)\subseteq(A\cup B)\cup\Gamma$.
Άρα, έχουμε την ισότητα $(A\cup B)\cup\Gamma = A\cup(B\cup\Gamma)$.

Ορισμός Έστω A, B, δύο σύνολα. Ορίζεται η **τομή** $A\cap B$ των συνόλων A, B να είναι το σύνολο με στοιχεία τα **κοινά** στοιχεία των συνόλων A, B.

$$A\cap B = \{x \mid x\in A \text{ και } x\in B\}$$

Παραδείγματα

1. Αν $A=\{1,4,5\}$, $B=\{1,4,7,8\}$, τότε
$A\cap B = \{1,4\}$,
2 Αν $A=\{1, 3, \{2\}\}$, $B=\{2, 3, 5, \phi\}$, $\Gamma=\{1,3\}$
$A\cap\Gamma=\{1,3\}=\Gamma$, $A\cap B=\{3\}$, $\Gamma\cap A=\{1,3\}=\Gamma$, $B\cap\Gamma=\{3\}$.
(Παρατήρηση: $\{2\}$ διαφορετικό του 2, διότι το $\{2\}$ είναι σύνολο, ενώ το 2 αριθμός)

Άσκηση 1.4.1

(α) $\{1, 2, \{4\}\}\cup\{2,3,6\} = \{1,2,3,\{4\},6\}$.
(β) $\{1, \{2\}, 4\}\cap\{2, 3, 6\} = \emptyset$, $(2 \neq \{2\})$

(δ) $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 3\}$, $D=\{y\in\mathbb{Z} \mid y\leq 3\}$, $B=\{y\in\mathbb{Z} \mid y\leq -3\}$.
Τότε $C\cap D=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\geq 3\}\cap\{y\in\mathbb{Z} \mid y\leq 3\}=$
$(\{x\in\mathbb{Z} \mid x\geq 3\}\cup\{x\in\mathbb{Z} \mid x\leq -3\})\cap\{y\in\mathbb{Z} \mid y\leq 3\}=$
$=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\leq -3\}\cup\{3\}$.
(γ) $C\cup B = C$, διότι $B\subseteq C$.

Προφανώς αν A, B είναι δύο σύνολα ισχύουν:

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$
2. $A \cap A = A$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap B \subseteq A$
5. $A \cap B \subseteq B$ (άσκηση)
6. $A \subseteq B$ αν και μόνο αν $A \cap B = A$

<u>Απόδειξη 6.</u>

Έστω $A \subseteq B$. Προφανώς ισχύει $A \cap B \subseteq A$. Έστω $x \in A$, τότε $x \in B$, αφού $A \subseteq B$, άρα $x \in A \cap B$. Επομένως ισχύει και $A \subseteq A \cap B$ και τελικά $A \cap B = A$.

<u>Πρόταση 1.4.3</u>

Έστω A, B, Γ σύνολα, τότε $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$. (επιμεριστική ιδιότητα).

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $x \in (A \cap B) \cap \Gamma$. Τότε $x \in A \cap B$ και $x \in \Gamma$. Άρα, $x \in A$ και $x \in B$ και $x \in \Gamma$. Οπότε $x \in B \cap \Gamma$ και $x \in A$, και συνεπώς $x \in A \cap (B \cap \Gamma)$.
Επομένως $(A \cap B) \cap \Gamma \subseteq A \cap (B \cap \Gamma)$.
Ανάλογα, αν $x \in A \cap (B \cap \Gamma)$, τότε $x \in (A \cap B) \cap \Gamma$, άρα $A \cap (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cap \Gamma$.
Συνεπώς, έχουμε την ισότητα, $A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$.

<u>Πρόταση 1.4.5.</u>

Έστω A, B, Γ σύνολα, τότε $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ και $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

<u>Απόδειξη</u>

$A \cup (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, ισχύει, διότι αν $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$, τότε είτε $x \in A$, οπότε $x \in A \cup B$ και $x \in A \cup \Gamma$ και άρα $x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, είτε $x \in B \cap \Gamma$, οπότε $x \in B$ και $x \in \Gamma$ και άρα $x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.
Επίσης, $(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$, διότι αν $x \in (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, τότε είτε $x \in A$ είτε $x \notin A$ και άρα $x \in B$ και $x \in \Gamma$.
Αν $x \in A$, τότε $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$.
Αν $x \notin A$, τότε $x \in B$ και $x \in \Gamma$, άρα $x \in B \cap \Gamma$ και συνεπως $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$.
Σε κάθε περιπτωση $x \in A \cup (B \cap \Gamma)$.
Άρα, ισχύει η σχέση $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$ και τελικά η ισότητα:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma).$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι: $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$.
[$x\in A\cap(B\cup\Gamma) \Leftrightarrow x\in A$ και $x\in B\cup\Gamma$
$\Leftrightarrow x\in A$ και (είτε $x\in B$, είτε $x\in\Gamma$),
$\Leftrightarrow$ είτε $x\in A$ και $x\in B$, είτε $x\in A$ και $x\in\Gamma$,
$\Leftrightarrow$ είτε $x\in A\cap B$, είτε $x\in A\cap\Gamma$
$\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$.]

Πρόταση 1.4.8 Έστω δύο σύνολα A, B. Οι επόμενες ιδιότητες είναι ισοδύναμες:
1. $A\subseteq B$ 2. $A\cap B=A$ 3. $A\cup B=B$

Απόδειξη

(1) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$
($\Rightarrow$) Έστω $A\subseteq B$. Προφανώς $A\cap B\subseteq A$.
Επίσης, αφού $A\subseteq B$ και $A\subseteq A$, έχουμε $A\subseteq A\cap B$.
Άρα, ισχύει η ισότητα $A\cap B=A$
($\Leftarrow$) Έστω $A\cap B=A$. Εφ' όσον $A=A\cap B\subseteq B$ και $A\subseteq B$
(2) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$

($\Rightarrow$) Έστω $A\subseteq B$. Τότε $A\cup B\subseteq B$ και προφανώς $B\subseteq A\cup B$. Άρα έχουμε ισότητα $A\cup B=B$
($\Leftarrow$) Έστω $A\cup B=B$. Τότε προφανώς $A\subseteq B$.
Άρα,
$$A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A \Leftrightarrow A\cup B=B$$

Εργασία

4 Άσκηση, 1.7 Παράγραφος Σημειώσεων

1.5 Διαφορά συνόλων - Συμπλήρωμα

Ορισμός Έστω A, B δύο σύνολα. Ορίζεται η συνολοθεωρητική διαφορά $A \setminus B$ ως το σύνολο με στοιχεία όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο σύνολο B και μόνο αυτά.

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Αν το σύνολο B είναι υποσύνολο του A τότε η διαφορά $A \setminus B$ ονομάζεται **συμπλήρωμα** του B ως προς το A.

Παραδείγματα

Έστω $A = \{1, 3, \{2\}\}$, $B = \{2, 3, 5, \phi\}$, $\Gamma = \{1, 3\}$.
$A \cup B = \{1, 3, \{2\}, 5, \phi, 2\}$, $A \cap B = \{3\}$, $\cap \Gamma = \{3\}$,
$A \setminus B = \{1, \{2\}\}$, $B \setminus A = \{2, 5, \phi\}$ $\Gamma \setminus B = \{1\}$,
$B \setminus A = B \setminus \Gamma = \{2, 5, \phi\}$, $A \setminus \Gamma = \{\{2\}\}$, $B \setminus \Gamma = \{2, 5, \phi\} \neq \Gamma \setminus B$.

Ορισμός Η συμμετρική διαφορά $A \Delta B$ δύο συνόλων A, B ορίζεται ως το σύνολο

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$