

**ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**  
**08/09/2021**

1. Έστω  $A, B, C, D$  σύνολα. (α) Να δείξετε ότι

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

(β) Να δείξετε ότι

$$(C \cap D^c) \Delta (C^c \cap D) = C \Delta D.$$

2. (α) Έστω  $X, Y$  σύνολα και  $f : X \rightarrow Y$  απεικόνιση. Αν  $A \subseteq X$  και  $B \subseteq Y$ , να ορίσετε την εικόνα  $f(A)$  του  $A$  και την αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}(B)$  του  $B$ .

(β) Έστω  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $h(t) = t^2$ . Να υπολογίσετε τα σύνολα  $h([-1, 2])$  και  $h^{-1}([1, 4])$ .

3. Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  δίνονται οι διμελείς σχέσεις

$$xPy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \text{ άρτιος}$$

$$xQy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z} \text{ περιττός}$$

$$xRy \Leftrightarrow \cos x = \cos y.$$

(α) Να εξετάσετε ποιές από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

(β) Για όσες από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας να υπολογίσετε την κλάση  $[\pi]$  του  $\pi$ .

4. (α) Δώστε τον ορισμό του πεπερασμένου συνόλου και του απειροσυνόλου και αποδείξτε ότι ένα σύνολο  $X$  είναι απειροσύνολο αν και μόνον αν υπάρχει  $g : X \rightarrow \mathbb{N}$  επί.

(β) Τί ισχύει (:πληθυκότητα) έχουν τα παρακάτω σύνολα:

$$A = \{C(K, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2 \mid C(K, r) \text{ κύκλος με κέντρο } K = (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \text{ και ακτίνα } \sqrt{2}\}$$

$$B = \{XYZ \subset \mathbb{R}^2 \mid XYZ \text{ τρίγωνο με } X, Y, Z \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}\}$$

$$C = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho \text{ ρίζα ενός τριωνύμου } ax^2 + bx + c \text{ με } a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$