

**ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**  
**05/09/2022**

**ΘΕΜΑ 1.** Έστω  $X$  σύνολο και  $A, B, C \subseteq X$ .

(α) Να ορίσετε την ένωση  $A \cup B$ , την τομή  $A \cap B$ , την διαφορά  $A \setminus B$ , την συμμετρική διαφορά  $A \Delta B$ , το διατεταγμένο ζεύγος  $(a, b)$  για  $a \in A$  και  $b \in B$ , και το καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$ .

(β) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισότητες

$$\begin{aligned}(A \cup B^c)^c &= A^c \cap B \\ (A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C) \\ (A \Delta B) \Delta A &= B\end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ 2.** (α) Έστω

$$R_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 5k\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

μια σχέση στο σύνολο  $\mathbb{Z}$  των ακεραίων αριθμών. Να δείξετε ότι η  $R_5$  είναι σχέση ισοδυναμίας και να υπολογίσετε την κλάση ισοδυναμίας του  $7 \in \mathbb{Z}$ .

(β) Έστω  $X$  ένα σύνολο με περισσότερα από δύο στοιχεία και  $\mathcal{P}(X)$  το δυναμοσύνολο του. Θεωρούμε την σχέση εγκλεισμού στο  $\mathcal{P}(X)$ , δηλ. το

$$R_{\subseteq} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \mid A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X).$$

Να εξετάσετε αν η  $R_{\subseteq}$  είναι σχέση διάταξης στο  $\mathcal{P}(X)$ . Αν ναι, είναι ολική ή μερική;

**ΘΕΜΑ 3.** (α) Δώστε τον ορισμό μιας συνάρτησης  $f$  από ένα σύνολο  $A$  σε ένα σύνολο  $B$ .

(β) Έστω συναρτήσεις  $f : X \rightarrow Y$  και  $g : Y \rightarrow Z$ . Να ορίσετε την σύνθετη συνάρτηση  $g \circ f : X \rightarrow Z$  και να αποδείξετε ότι:

(β<sub>1</sub>) Αν η  $g \circ f$  είναι 1-1, τότε η  $f$  είναι 1-1.

(β<sub>2</sub>) Αν η  $g \circ f$  είναι επί, τότε η  $g$  είναι επί.

(γ) Να δώσετε τους ορισμούς της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο  $\mathbb{N}$  των φυσικών, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της αναδρομής.

**ΘΕΜΑ 4.** (α) Δώστε τον ορισμό του πεπερασμένου συνόλου και του άπειρου αριθμήσιμου συνόλου.

(β) Αποδείξτε ότι ένα σύνολο  $A$  είναι άπειρο αν και μόνον αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση  $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ .

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες**

**Να γράψετε και τα 4 θέματα**

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 3 μονάδες**

**Καλή επιτυχία!**