

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

23/01/2023

ΘΕΜΑ 1. Έστω A, B, C σύνολα.

(α) Να δείξετε ότι εν γένει $A \setminus B \neq B \setminus A$ και $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ (δώστε αντιπαράδειγματα).

(β) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$A \setminus B \neq B \setminus A \iff A = B$$

και

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C \iff A \cap C = \emptyset.$$

(γ) Να δείξετε ότι $A = B$ αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο X με $A \cup X = B \cup X$ και $A \cap X = B \cap X$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Στο σύνολο \mathcal{F} όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ορίζουμε την σχέση

$$f \sim g \iff \exists a \in \mathbb{Z} : f(x) - g(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Να προσδιορίσετε την κλάση της ταυτοτικής απεικόνισης $[\text{id}_{\mathbb{R}}]$ και να εξετάσετε αν είναι πεπερασμένο, άπειρο αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο σύνολο.

ΘΕΜΑ 3. (α) Να δείξετε ότι μια συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ είναι επί, αν και μόνον αν έχει αντίστροφη από δεξιά.

(β) Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, και τα διαστήματα $A = [0, \pi/4]$, $B = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την εικόνα $f(A)$ και την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$.

ΘΕΜΑ 4. (α) Να δείξετε ότι η ένωση δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(β) Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Να γράψετε και τα 4 θέματα

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία!