

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
05/02/2025

ΘΕΜΑ 1. (α) Να διατυπώσετε τους νόμους του de Morgan και να αποδείξετε τον ένα από αυτούς.
(β) Έστω A, B, C σύνολα. Να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να ισχύει η ισότητα $A \Delta B = A \Delta C$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω οι απεικονίσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$. Αν η σύνθεση $g \circ f$ είναι 1-1 και επί, να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και η g επί.

(β) Θεωρούμε την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, και τα σύνολα $A = (-\infty, 1]$, $B = [-3, 3]$, $C = [-1, 4]$ και $D = [1, 5]$. Να υπολογίσετε τις εικόνες $f(A)$, $f(B)$ και τις αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(C)$ και $f^{-1}(D)$.

ΘΕΜΑ 3. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δίνεται η διμελής σχέση

$$xRy \Leftrightarrow [x] = [y],$$

όπου $[x]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x .

(α) Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

(β) Αν $\langle x \rangle_R$ συμβολίζει την κλάση του x ως προς την σχέση R , να υπολογίσετε την κλάση $\langle \pi \rangle_R$ του π και την ισχύ της.

(γ) Να βρείτε την ισχύ του συνόλου των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\{\langle x \rangle_R : x \in \mathbb{R}\}.$$

ΘΕΜΑ 4. (α) Να αποδείξετε επαγωγικά την ανισότητα

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν A, B είναι αριθμήσιμα σύνολα, να δείξετε ότι το $A \times B$ είναι αριθμήσιμο.

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Να γράψετε και τα 4 θέματα

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία!