

ΘΕΜΕΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

09/09/2025

1. Έστω A, B, C , σύνολα. (α) Να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C) \iff A \subseteq C.$$

- (β) Να υπολογίσετε το σύνολο $\mathbb{Z} \Delta (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$.

2. (α) Έστω X, Y σύνολα και $f : X \rightarrow Y$ απεικόνιση. Αν $A \subseteq Y$, να ορίσετε την αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(A)$ του A , και να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $A_1, A_2 \subseteq Y$, ισχύει

$$f^{-1}(A_1 \cap A_2) = f^{-1}(A_1) \cap f^{-1}(A_2).$$

- (β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(t) = t^2$ και $h(x) = [x]$, όπου $[x]$ το ακέραιο μέρος του x . Να υπολογίσετε τα σύνολα $g([-2, 1])$, $g^{-1}([1, 4])$, $h((-1, 1))$ και $h^{-1}((-3, 2))$.

3. Στο σύνολο $\mathbb{R}$ δίνονται οι διμελείς σχέσεις

$$xPy \iff x - y \in \mathbb{Z} \text{ άρτιος}$$

$$xQy \iff x - y \in \mathbb{Z} \text{ περιττός}$$

$$xRy \iff \sin x = \sin y.$$

- (α) Να εξετάσετε ποιές από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

- (β) Για όσες από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας να υπολογίσετε την κλάση $[\pi]$ του π . Βρείτε την ισχύ (:πληθυστικότητα) αυτής της κλάσης.

4. (α) Έστω A, B σύνολα, με $B \neq \emptyset$. Να δείξετε ότι το $A \times B$ έχει μεγαλύτερη ισχύ από το A .

- (β) Τί ισχύ έχουν τα παρακάτω σύνολα:

$$A = \{C(K, \sqrt{3}) \subset \mathbb{R}^2 \mid C(K, \sqrt{3}) \text{ κύκλος με κέντρο } K = (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ και ακτίνα } \sqrt{3}\}$$

$$B = \{XYZ \subset \mathbb{R}^2 \mid XYZ \text{ τρίγωνο με κορυφές } X, Y, Z \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q}\}$$

$$C = \{\rho \in \mathbb{R} \mid \rho \text{ ρίζα ενός τριωνύμου } ax^2 + bx + c \text{ με } a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες

Να γράψετε και τα 4 θέματα

Τα θέματα είναι ισοδύναμα

Καλή επιτυχία!