

Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης
Εξέταση περιόδου Σεπτεμβρίου (11-9-2024)

Θέμα 1ο

6 × 0,5 = 3 μον.

Σωστό ή Λάθος; Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A, B, C \subseteq E$. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθενιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

- (i) $(A \cup B^c)^c \subseteq B$.
- (ii) Αν $A \cup C = B \cup C$, τότε $A = B$.
- (iii) $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c$.
- (iv) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (v) Αν $A \subsetneq B$, τότε $|A| < |B|$.
- (vi) Αν το A είναι υπεραριθμήσιμο, τότε το A είναι ισοπληθικό με το \mathbb{R} .

Θέμα 2ο

1 + 1 + 1 = 3 μον.

(α) Δείξτε με κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι η ισότητα $(A \times B)^c = A^c \times B^c$ δεν ισχύει γενικά.

(β) Στο σύνολο \mathbb{N} θεωρούμε τη σχέση σ που ορίζεται ως εξής:

$$n \sigma m \iff n^2 | m \quad (\text{o } n^2 \text{ διαιρεί τον } m).$$

Αποδείξτε ότι η σχέση σ είναι μεταβατική, αλλά δεν είναι διάταξη.

(γ) Στο \mathbb{R}^2 θεωρούμε τη σχέση \sim που ορίζεται ως εξής:

$$(x, y) \sim (t, z) \iff y^2 = z^2.$$

Αποδείξτε ότι η \sim είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του στοιχείου $(1, 2)$.

Θέμα 3ο

1,5 + 1,5 = 3 μον.

Έστω A, B, C μη κενά σύνολα και $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ συναρτήσεις.

- (α) Υποθέτουμε ότι η $g \circ f$ είναι ένα προς ένα.
 - (i) Είναι κατ' ανάγκη η g ένα προς ένα;
 - (ii) Είναι κατ' ανάγκη η f ένα προς ένα;
- (β) Αποδείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
 - (i) Η συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ είναι ένα προς ένα.
 - (ii) Για κάθε $U, V \subseteq A$, ισχύει $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$.

Θέμα 4ο

1,2 + (3 × 0,6) = 3 μον.

(α) Αποδείξτε με τη μέθοδο της επαγωγής την ακόλουθη πρόταση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, αν ένα σύνολο A έχει n στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του, $\mathcal{P}(A)$, έχει 2^n στοιχεία.

(β) Να εξετάσετε αν καθένα από τα ακόλουθα σύνολα είναι αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{Z}\}$$

$$B = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{Q} \text{ και } b = a\sqrt{3}\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N} \text{ και } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$$

Καλή Επιτυχία!