Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης

Τμήμα Μαθηματικών - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-24
1η Εργασία
Σύνολα - Σχέσεις - Συναρτήσεις

1. *Σωστό ή Λάθος;* Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A,\ B,\ C \subseteq E$. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις ακόλουθες σχέσεις. Αφού σχεδιάσετε κατάλληλο διάγραμμα, αποδείξτε όσες είναι σωστές και δώστε αντιπαράδειγμα για όσες είναι λανθασμένες:

(i) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

(ii) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

(iii) $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$.

(iv) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$.

(v) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(A^c) = \{\emptyset\}$.

2. (α) Έστω E ένα σύνολο αναφοράς και $A,\ B \subseteq E$. Αποδείξτε τις ακόλουθες ισοδυναμίες:

(i) $A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c$.

(ii) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

(β) Βρείτε (αν υπάρχει) ένα μη κενό σύνολο A με $A \subseteq \mathcal{P}(A)$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f(n) = 2n^2 + 1$.
(α) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1 και αν είναι επί του $\mathbb{N}$.
(β) Να βρείτε τις εικόνες $f(A_i)$ $(i = 1, 2)$ των συνόλων

$$A_1 = \{1, 2, 3, 5, 7\} \quad \text{και} \quad A_2 = \{3k : k \in \mathbb{N}\}.$$

(γ) Να βρείτε τις αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(B_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ των συνόλων

$$B_1 = \{1, 5, 19, 21, 33\}, \quad B_2 = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 100\}, \quad B_3 = \{2k : k \in \mathbb{N}\}.$$

4. Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε μια σχέση R ως εξής:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \iff a = c.$$

Να αποδείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας και να περιγράψετε γεωμετρικά τις κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την R.

5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμβολίζουμε με $\mathrm{int}(x)$ το *ακέραιο μέρος* του x, δηλαδή τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x. Στο $\mathbb{N}$ ορίζουμε μια σχέση S ως εξής:

$$m\, S\, n \iff \mathrm{int}\left(\frac{m}{10}\right) = \mathrm{int}\left(\frac{n}{10}\right).$$

(α) Να αποδείξετε ότι η S είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας του 26 και του 108.

(β) Να περιγράψετε τη διαμέριση του $\mathbb{N}$ που ανιστοιχεί στη σχέση ισοδυναμίας S.

6. Έστω A, B τυχόντα μη κενά σύνολα και $f : A \to B$ συνάρτηση. Ορίζουμε τη σχέση $\sim$ στο A ως εξής:

$$x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y).$$

(α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι, για κάθε $x \in A$, η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ του x είναι το σύνολο $f^{-1}\Big(\{f(x)\}\Big)$.

(β) Υποθέτουμε ότι το σύνολο B έχει m στοιχεία και ότι η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι επί του B. Πόσες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\sim$;

(γ) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$ που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $x \in \mathbb{Z}$,

$$f(x) = \text{το υπόλοιπο της διαίρεσης του } x \text{ με το } 5.$$

Ποια είναι η διαμέριση του $\mathbb{Z}$ που ορίζεται από την $\sim$; Ποια είναι η σχέση $\sim$;

7. Στο σύνολο $\mathbb{Z}$ ορίζουμε τις σχέσεις R και S ως εξής:

$$x\,R\,y \Longleftrightarrow \text{ο } x - y \text{ είναι περιττός.}$$

$$x\,S\,y \Longleftrightarrow \text{ο } x + 3y \text{ διαιρείται με το } 4.$$

Εξετάστε για καθεμία αν είναι σχέση ισοδυναμίας και, αν ναι, βρείτε την κλάση ισοδυναμίας του 1.

8. Στο σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε τις σχέσεις R, S, ρ, σ ως εξής:

$$(m_1, n_1)\,R\,(m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 \leq m_2 \;\text{ ή }\; n_1 \leq n_2$$
$$(m_1, n_1)\,S\,(m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 \leq m_2 \;\text{ και }\; n_1 \leq n_2$$
$$(m_1, n_1)\,\rho\,(m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 < m_2 \;\text{ ή }\; (m_1 = m_2 \;\text{ και }\; n_1 \leq n_2)$$
$$(m_1, n_1)\,\sigma\,(m_2, n_2) \Longleftrightarrow m_1 + n_1 \leq m_2 + n_2$$

Εξετάστε ποιες από τις R, S, ρ, σ είναι διατάξεις. Για όσες είναι διατάξεις, εξετάστε επιπλέον αν είναι ολικές διατάξεις.

9. Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις έχουν (i) δεξιά αντίστροφη, (ii) αριστερή αντίστροφη, (iii) αντίστροφη. Για όσες έχουν μόνο δεξιά ή μόνο αριστερή αντίστροφη, βρείτε δύο τέτοιες αντίστροφες:

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = e^x$.

(β) $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ με $g(x) = \cos x$.

(γ) $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \ln x$.

(δ) $\varphi : \{a, b\} \to \{1, 2, 3\}$, με $\varphi(a) = 1, \varphi(b) = 3$.

10. (α) *Σωστό ή Λάθος:* Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές για οποιαδήποτε σύνολα X, Y, συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$. Αποδείξτε όσες είναι σωστές και δώστε αντιπαράδειγμα για όσες είναι λανθασμένες.

(i) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(ii) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(iii) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

(β) Μπορείτε να βρείτε κάποια επιπλέον υπόθεση για τη συνάρτηση f, που εξασφαλίζει ότι όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν;

11. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε τη *χαρακτηριστική συνάρτηση* του A, $\chi_A : X \to \{0,1\}$ ως εξής:

$$\chi_A(x) = 1, \text{ αν } x \in A \quad \text{και} \quad \chi_A(x) = 0, \text{ αν } x \notin A.$$

Αποδείξτε ότι, για οποιαδήποτε υποσύνολα A, B του X, ισχύουν τα εξής:

(α) $A = B$ αν και μόνο αν $\chi_A = \chi_B$.

(β) $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.

(γ) $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$.

(δ) $\chi_{A\setminus B} = \chi_A \cdot (1 - \chi_B)$.

12. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Συμβολίζουμε με $\{0,1\}^X$ το σύνολο των συναρτήσεων από το X στο δισύνολο $\{0,1\}$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση

$$\Phi : \mathcal{P}(X) \to \{0,1\}^X \ \text{ με } \ \Phi(A) = \chi_A \ , \text{ για κάθε } \ A \subseteq X,$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.