Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης

Τμήμα Μαθηματικών - Χειμερινό Εξάμηνο 2023-24
2η Εργασία
Πληθάριθμοι - Μαθηματική επαγωγή

1. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με $f((n, m)) = 2^{n-1}(2m-1)$. Με τη βοήθεια της f, αποδείξτε ότι το σύνολο $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο.

(β) Έστω A_n , $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία συνόλων καθένα από τα οποία είναι άπειρο αριθμήσιμο. Αποδείξτε ότι η ένωσή τους $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ είναι αριθμήσιμο σύνολο.

(*Υπόδειξη:* Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γράφουμε $A_n = \{a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots\}$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to A$, με $\phi((n, m)) = a_m^n$, για κάθε $(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Η ϕ είναι επί του A.)

2. Αποδείξτε με δύο τρόπους ότι, για κάθε φυσικό αριθμό $k \geq 2$, το σύνολο $\mathbb{N}^k$ είναι αριθμήσιμο.

1ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας ότι $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (Άσκηση 1α) και επαγωγή ως προς k.

2ος τρόπος: Χρησιμοποιώντας, για κάθε δεδομένο k, την απεικόνιση $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ με

$$f((n_1, n_2, \ldots, n_k)) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k},$$

όπου $p_1 < p_2 < \ldots p_k$ είναι οι k πρώτοι πρώτοι αριθμοί (δηλαδή $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, κ.ο.κ.).

3. Έχουμε αποδείξει ότι τα διαστήματα $[0, 1)$ και $(0, 1)$ είναι ισοπληθικά, ορίζοντας μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το πρώτο στο δεύτερο. Δώστε μια διαφορετική απόδειξη αυτού του αποτελέσματος χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Schröder - Bernstein.

4. *Σωστό ή Λάθος;* Για οποιοδήποτε σύνολο X, συμβολίζουμε με $|X|$ τον πληθάριθμό του. Να εξετάσετε αν είναι σωστή ή λανθασμένη καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.

(i) Αν το σύνολο A είναι υπεραριθμήσιμο, τότε $|A| = |\mathbb{R}|$.

(ii) Δεν υπάρχει απεικόνιση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επί του $\mathbb{R}$.

(iii) Αν $A \subseteq B \subseteq C$ και ισχύει $|A| = |C|$, τότε είναι και $|A| = |B|$.

(iv) Αν $A \sim B$ και η συνάρτηση $f : A \to B$ είναι $1-1$, τότε είναι και επί του B.

(v) Το σύνολο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ όλων των ακολουθιών με όρους φυσικούς αριθμούς είναι αριθμήσιμο.

5. Εξετάστε αν καθένα από τα ακόλουθα σύνολα είναι αριθμήσιμο ή υπεραριθμήσιμο αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

$$A = \{\, x \in \mathbb{R} : x > 0 \ \text{ και } \ x^2 \in \mathbb{Q} \,\}$$

$$B = \{\, (n, x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \,\}$$

$$C = \{\, (k, x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R} : x = k\sqrt{3} \,\}$$

$$D = \{\, p(x) : \ \text{ το } p(x) \text{ είναι πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές} \,\}.$$

6. Είδαμε ότι με βάση την Αρχή της Επαγωγής αποδεικνύεται η Αρχή Ελαχίστου. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν πάρουμε στη θέση του 3ου αξιώματος την Αρχή Ελαχίστου, τότε με βάση αυτήν αποδεικνύεται η Αρχή της Επαγωγής.

7. Με τη μέθοδο της επαγωγής, αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει η ανισότητα:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \,.$$

8. Οι αριθμοί της μορφής $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, λέγονται αριθμοί του Fermat.

(α) Αποδείξτε με επαγωγή ότι, για κάθε $n \geq 1$, ισχύει

$$F_0 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdots F_{n-1} = F_n - 2.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), αποδείξτε ότι οι αριθμοί F_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, είναι ανά δύο πρώτοι μεταξύ τους (δηλαδή αν $m \neq n$, τότε Μ.Κ.Δ.$(F_m, F_n) = 1$).

(γ) Σύμφωνα με το (β), υπάρχει μια (άπειρη) ακολουθία ανά δύο πρώτων μεταξύ τους φυσικών αριθμών. Με βάση αυτό, δώστε μια διαφορετική απόδειξη για το ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

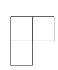
9. Χρησιμοποιώντας την ισχυρή μορφή της επαγωγής, αποδείξτε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 1$ γράφεται ως άθροισμα διαφορετικών δυνάμεων του 2 (για παράδειγμα $19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$, $58 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^1$). Στη συνέχεια δείξτε ότι αυτή η γραφή είναι μονοσήμαντη.

(*Υπόδειξη:* Κατά το επαγωγικό βήμα, εξετάστε χωριστά τις περιπτώσεις n άρτιος και n περιττός.)

10. Το παιχνίδι Νιμ παίζεται με δύο παίκτες ως εξής: Αρχικά υπάρχουν δύο στοίβες με ίσο αριθμό κερμάτων n στην καθεμία. Ο κάθε παίκτης με τη σειρά του, αφαιρεί ένα πλήθος κερμάτων από μία στοίβα. Πρέπει να πάρει τουλάχιστον ένα κέρμα, αλλά μπορεί να πάρει όσα θέλει, αρκεί να προέρχονται από την ίδια στοίβα. Χάνει ο παίκτης που θα αναγκαστεί να πάρει το τελευταίο κέρμα.

Με τη μέθοδο της επαγωγής, αποδείξτε ότι, αν $n \geq 2$, τότε ο παίκτης που παίζει δεύτερος έχει νικητήρια στατηγική.

11. Ένα *τριόμινο* είναι το σχήμα που παίρνουμε αν από ένα τετράγωνο αποτελούμενο από 4 ίσα τετραγωνάκια αφαιρέσουμε ένα από αυτά:



Με τη μέθοδο της επαγωγής αποδείξτε ότι, για κάθε φυσικό $n \geq 1$, η επιφάνεια που παίρνουμε αν από μια «σκακιέρα» αποτελούμενη από $2^n \times 2^n$ τετραγωνάκια αφαιρέσουμε ένα τετραγωνάκι, μπορεί να πλακοστρωθεί με πλακάκια σε σχήμα τριόμινο.