

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

1. Έστω  $A, B, C$  σύνολα. Εξετάστε αν ισχύουν οι ισότητες

$$(i) (A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C).$$

$$(ii) (A \Delta B) \times C = (A \times C) \Delta (B \times C).$$

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \setminus B) \times C &\implies (x \in A \wedge x \notin B) \wedge y \in C \\ &\implies (x \in A \wedge y \in C) \wedge x \notin B \\ &\implies (x, y) \in A \times C \wedge (x, y) \notin B \times C \\ &\implies (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) \end{aligned}$$

άρα  $(A \setminus B) \times C \subseteq (A \times C) \setminus (B \times C)$ . Επίσης,

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times C) \setminus (B \times C) &\implies (x, y) \in (A \times C) \wedge (x, y) \notin (B \times C) \\ &\implies (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \notin B \vee y \notin C) \\ &\implies (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \\ &\quad \vee (x \in A \wedge y \in C \wedge y \notin C) \\ &\implies (x \in A \wedge y \in C \wedge x \notin B) \\ &\implies x \in A \setminus B \wedge y \in C \\ &\implies (x, y) \in (A \setminus B) \times C \end{aligned}$$

άρα  $(A \times C) \setminus (B \times C) \subseteq (A \setminus B) \times C$  και δείξαμε την πρώτη ισότητα.

(ii) Εφαρμόζοντας κατά σειρά την ισότητα (i) αυτής της άσκησης, την (iii) της Πρότασης 7.5 και την (iv) της ίδιας πρότασης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \times C &= [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \times C \\ &= [(A \cup B) \times C] \setminus [(A \cap B) \times C] \\ &= [(A \times C) \cup (B \times C)] \setminus [(A \times C) \cap (B \times C)] \\ &= (A \times C) \Delta (B \times C). \end{aligned}$$

2. Δίνονται δύο μη κενά σύνολα  $X$  και  $Y$  και έστω  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$  και  $(A \times B)^c$  το συμπλήρωμα του  $A \times B$  στο  $X \times Y$ .

(i) Αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση  $A^c \times B^c \subseteq (A \times B)^c$ .

(ii) Δώστε παράδειγμα στο οποίο ο ανωτέρω εγκλεισμός δεν είναι ισότητα.

*Απάντηση.* (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x, y) \in A^c \times B^c &\iff x \in A^c \wedge y \in B^c \\ &\iff x \notin A \wedge y \notin B \\ &\implies (x, y) \notin A \times B \\ &\iff (x, y) \in (A \times B)^c\end{aligned}$$

Η τρίτη συνεπαγωγή, που δεν είναι ισοδυναμία, μας οδηγεί στο αντιπαράδειγμα. Έστω  $X = \{1, 2\}$ ,  $A = \{1\}$ ,  $Y = \{a, b\}$  και  $B = \{b\}$ . Τότε

$$A^c \times B^c = \{(2, a)\},$$

ενώ

$$(A \times B)^c = \{(1, a), (2, a), (2, b)\}.$$

**3.** Θεωρούμε δύο ανακλαστικές σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $X$ . Δείξτε ότι οι σχέσεις  $\rho \cup \sigma$  και  $\rho \cap \sigma$  είναι επίσης ανακλαστικές.

*Απάντηση.* Μια σχέση  $R \subseteq X \times X$  είναι ανακλαστική, αν και μόνον αν

$$\mathcal{D}_X \subseteq R,$$

όπου  $\mathcal{D}_X$  η διαγώνιος. Επομένως, από την υπόθεση,  $\mathcal{D}_X \subseteq \rho$  και  $\mathcal{D}_X \subseteq \sigma$ . Άρα  $\mathcal{D}_X \subseteq \rho \cap \sigma$  και  $\mathcal{D}_X \subseteq \rho \cup \sigma$  και οι  $\rho \cap \sigma$  και  $\rho \cup \sigma$  είναι ανακλαστικές.

**4.** Θεωρούμε δύο συμμετρικές σχέσεις  $\rho$  και  $\sigma$  στο  $X$ . Να εξετάσετε αν οι σχέσεις  $\rho \cup \sigma$ ,  $\rho \cap \sigma$  και  $\rho \setminus \sigma$  είναι επίσης συμμετρικές.

*Απάντηση.* Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho \cup \sigma &\implies (x, y) \in \rho \vee (x, y) \in \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \vee (y, x) \in \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \cup \sigma\end{aligned}$$

και η  $\rho \cup \sigma$  είναι συμμετρική. Επίσης,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho \cap \sigma &\implies (x, y) \in \rho \wedge (x, y) \in \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \wedge (y, x) \in \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \cap \sigma\end{aligned}$$

και η  $\rho \cap \sigma$  είναι συμμετρική. Τέλος,

$$\begin{aligned}(x, y) \in \rho \setminus \sigma &\implies (x, y) \in \rho \wedge (x, y) \notin \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \wedge (y, x) \notin \sigma \\ &\implies (y, x) \in \rho \setminus \sigma\end{aligned}$$

και η  $\rho \setminus \sigma$  είναι επίσης συμμετρική.

**5.** Έστω  $R_1$  και  $R_2$  δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο ίδιο σύνολο  $X$ , με  $R_1 \subseteq R_2$ . Τί σχέση υπάρχει ανάμεσα στις διαμερίσεις  $\mathcal{D}_1$  και  $\mathcal{D}_2$  του  $X$  που αντιστοιχούν στις  $R_1$  και  $R_2$ ;

*Απάντηση.* Σταθεροποιούμε ένα  $x \in X$ . Ο εγκλεισμός  $R_1 \subseteq R_2$  σημαίνει ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$xR_1y \implies xR_2y,$$

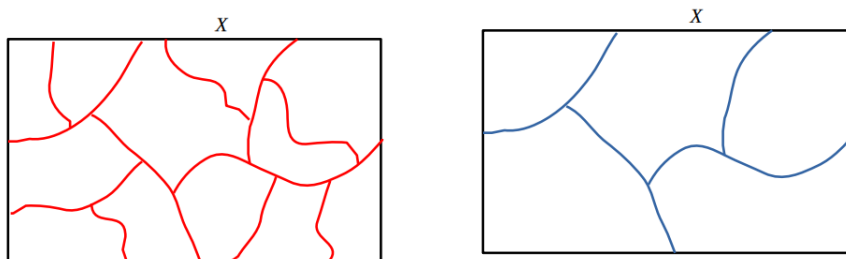
απ' όπου προκύπτει ότι  $[x]_1 \subseteq [x]_2$ . Δείχνουμε γενικότερα ότι

$$\forall y \in [x]_2 : [y]_1 \subseteq [x]_2.$$

Πράγματι, έστω  $y \in [x]_2$ , οπότε  $yR_2x$  και έστω  $z \in [y]_1$ . Τότε  $zR_1y$ , άρα  $zR_2y$ . Από την μεταβατικότητα της  $R_2$ , έχουμε  $zR_2x$ . Επομένως  $z \in [x]_2$ , που δείχνει ότι  $[y]_1 \subseteq [x]_2$ . Συμπεραίνουμε ότι η κλάση  $[x]_2$  διαμερίζεται σε κλάσεις της  $R_1$ , ως εξής:

$$[x]_2 = \bigcup_{y \in [x]_2} [y]_1.$$

Στο πρώτο σχήμα παρακάτω φαίνεται η διαμέριση  $\mathcal{D}_1$  και στο δεύτερο, η  $\mathcal{D}_2$ .



**6.** Στο  $\mathbb{Z}$  θεωρούμε τις σχέσεις  $\equiv_4$  και  $\equiv_6$ . Ποιά είναι η σχέση  $\equiv_4 \cap \equiv_6$ ;

*Απάντηση.* Γνωρίζουμε ότι ένας ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6, εάν και μόνο εάν είναι πολλαπλάσιο του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου

τους, του 12. Συμβολίζουμε με  $R$  την  $\equiv_4 \cap \equiv_6$ . Τότε  $xRy$  αν και μόνον αν  $x - y$  είναι πολλαπλάσιο του 4 και του 6, άρα αν και μόνον αν είναι πολλαπλάσιο του 12. Επομένως, η  $R$  είναι η ισοδυναμία  $\equiv_{12}$ .

**7.** Στο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  ορίζουμε την σχέση  $S$  ως εξής:

$$(a, b)S(c, d) \iff b = d.$$

(i) Δείξτε ότι η  $S$  είναι σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathbb{R}^2$ .

(ii) Περιγράψτε γεωμετρικά τις κλάσεις ισοδυναμίας.

*Απάντηση.* (i) Για κάθε  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , έχουμε  $b = b$ , άρα  $(a, b)S(a, b)$  και η  $S$  είναι ανακλαστική. Αν  $(a, b)S(c, d)$ , τότε  $b = d$ , οπότε  $d = b$ , άρα  $(c, d)S(a, b)$  και η  $S$  είναι συμμετρική. Τέλος, αν  $(a, b)S(c, d)$  και  $(c, d)S(e, f)$ , τότε  $b = d = f$ , άρα  $(a, b)S(e, f)$  και η  $S$  είναι μεταβατική. Επομένως είναι σχέση ισοδυναμίας.

(ii) Για κάθε  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , είναι

$$[(a, b)] = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 \mid d = b\} = \{(x, b) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Γεωμετρικά, η κλάση του ζεύγους  $(a, b)$  είναι η οριζόντια ευθεία που τέμνει τον άξονα των  $y$  στο  $b$ .

**8.** Στο σύνολο  $\mathbb{R}$  δίνονται οι διμελείς σχέσεις

$$xPy \iff x - y = \text{ακέραιος, άρτιος}$$

$$xQy \iff x - y = \text{ακέραιος, περιττός}$$

$$xRy \iff \cos x = \cos y.$$

(α) Να εξετάσετε ποιές από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

(β) Για όσες από αυτές είναι σχέσεις ισοδυναμίας να υπολογίσετε την κλάση  $[\pi]$  του  $\pi$ .

*Απάντηση.* (1) Για την σχέση  $P$ : Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - x = 0 = \text{άρτιος}$ , άρα  $xPx$  και η  $P$  είναι ανακλαστική. Αν  $xPy$ , δηλ.  $x - y = \text{άρτιος}$ , τότε  $y - x$  είναι ο αντίθετος άρτιος, δηλ.  $yPx$  και η  $P$  είναι συμμετρική. Τέλος, αν  $xPy$  και  $yPz$ , δηλ.  $x - y = \text{άρτιος}$  και  $y - z = \text{άρτιος}$ , τότε  $x - z$  είναι άρτιος, σαν άθροισμα δύο άρτιων, άρα  $xPz$  και η  $P$  είναι μεταβατική, συνεπώς και σχέση ισοδυναμίας.

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff y - x = 2a, a \in \mathbb{Z} \\ &\iff y = x + 2a, a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\pi] = \{\pi + 2a \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$

(2) Για την σχέση  $Q$ : Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$  δεν είναι περιττός, άρα η  $Q$  δεν είναι ανακλαστική και κατά συνέπεια ούτε σχέση ισοδυναμίας. Για την πληρότητα σημειώνουμε ότι δεν είναι ούτε μεταβατική, ενώ είναι συμμετρική.

(3) Για την σχέση  $R$ : Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos x = \cos x$ , άρα  $xRx$  και η  $R$  είναι ανακλαστική. Αν  $xRy$ , δηλ.  $\cos x = \cos y$ , τότε  $\cos y = \cos x$ , δηλ.  $yRx$  και η  $R$  είναι συμμετρική. Τέλος, αν  $xRy$  και  $yRz$ , δηλ.  $\cos x = \cos y$  και  $\cos y = \cos z$ , τότε  $\cos x = \cos z$ , άρα  $xRz$  και η  $R$  είναι μεταβατική, συνεπώς και σχέση ισοδυναμίας.

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff \cos y = \cos x \\ &\iff y = 2k\pi \pm x, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\pi] = \{2k\pi \pm \pi \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

**9.** Στο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  θεωρούμε την διμελή σχέση

$$uRv \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : u = \lambda v.$$

Να δείξετε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε την κλάση  $[(1, 0, -1)]$ .

*Απάντηση.* Η σχέση  $R$  είναι ανακλαστική, αφού για κάθε  $u \in \mathbb{R}^3$  ισχύει  $u = 1 \cdot u$ . Είναι συμμετρική, διότι αν  $uRv$ , δηλ.  $u = \lambda v$ , με  $\lambda \neq 0$ , τότε  $v = \lambda^{-1}u$  και  $vRu$ . Τέλος, αν  $uRv$  και  $vRw$ , τότε υπάρχουν  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  με  $\lambda\mu \neq 0$ , για τους οποίους ισχύει  $u = \lambda v$  και  $v = \mu w$ . Επομένως  $u = \lambda\mu w$ , οπότε  $uRw$ , η  $R$  είναι μεταβατική άρα και σχέση ισοδυναμίας.

Σχετικά με την κλάση ισοδυναμίας, έχουμε

$$\begin{aligned} [(1, 0, -1)] &= \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u = \lambda(1, 0, -1), \lambda \neq 0\} \\ &= \{(\lambda, 0, -\lambda) \in \mathbb{R}^3 \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \end{aligned}$$

- 10.** (1) Στο  $\mathbb{Z}_5$  να λυθούν οι εξισώσεις  $[3] \cdot [x] = [4]$  και  $[2] \cdot [y] = [4]$ .  
 (2) Να λυθούν οι ίδιες εξισώσεις στο  $\mathbb{Z}_6$ .

*Απάντηση.* Στους δύο παρακάτω πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο  $\mathbb{Z}_5$ :

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

Από τον δεύτερο πίνακα βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση έχει μοναδική λύση  $[x] = [3]$  και η δεύτερη έχει μοναδική λύση  $[y] = [2]$ .

Στους επόμενους πίνακες φαίνονται τα αποτελέσματα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο  $\mathbb{Z}_6$ :

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]
[5]	[5]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]

·	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[2]	[0]	[2]	[4]	[0]	[2]	[4]
[3]	[0]	[3]	[0]	[3]	[0]	[3]
[4]	[0]	[4]	[2]	[0]	[4]	[2]
[5]	[0]	[5]	[4]	[3]	[2]	[1]

Από τον δεύτερο πίνακα βλέπουμε ότι η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση ενώ η δεύτερη έχει δύο λύσεις:  $[y] = [2]$  και  $[y] = [5]$ .

- 11.** Έστω  $R$  μια διάταξη στο σύνολο  $X$ . Δείξτε ότι η αντίστροφη σχέση  $R^{-1}$  είναι επίσης διάταξη.

*Απάντηση.* Η αντίστροφη σχέση ορίζεται από την ισοδυναμία

$$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R^{-1}.$$

(i) Επειδή για κάθε  $x \in X$  είναι  $(x, x) \in R$ , έχουμε  $(x, x) \in R^{-1}$  και η  $R^{-1}$  είναι ανακλαστική.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$(x, y) \in R^{-1} \wedge (y, x) \in R^{-1} \implies (y, x) \in R \wedge (x, y) \in R \implies x = y$$

και η  $R^{-1}$  είναι αντισυμμετρική.

(iii) Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} (x, y) \in R^{-1} \wedge (y, z) \in R^{-1} &\implies (y, x) \in R \wedge (z, y) \in R \\ &\implies (z, x) \in R \\ &\implies (x, z) \in R^{-1} \end{aligned}$$

και η  $R^{-1}$  είναι μεταβατική.

**12.** (1) Θεωρούμε το σώμα των μιγαδικών  $\mathbb{C}$  εφοδιασμένο με την λεξικογραφική διάταξη. Βρείτε μια τριάδα μιγαδικών  $z_1, z_2, z$  που ικανοποιούν τις  $z_1 \leq z_2$  και  $0 \leq z$ , αλλά δεν ισχύει  $z_1 z \leq z_2 z$ .

(2) Δείξτε ότι το  $\mathbb{C}$  δεν μπορεί να εφοδιαστεί με ολική διάταξη που να ικανοποιεί τα αξιώματα (Π12)-(Π13) των πραγματικών αριθμών (βλ. Σ.Νεγρεπόντης - Σ. Γιωτόπουλος - Ε. Γιαννακούλιας : Απειροστικός Λογισμός , Τόμος I, σελ. 6).

*Απάντηση.* (1) Έστω  $z_1 = 0 + 1i$ ,  $z_2 = 0 + 2i$  και  $z = 0 + 1i$ . Τότε  $z_1 \leq z_2$  και  $0 \leq z$ , αλλά  $z_1 z = -1 \geq -2 = z_2 z$ .

(2) Αν ένα σώμα  $F$  έχει ολική διάταξη που ικανοποιεί τα αξιώματα (Π12)-(Π13), τότε για κάθε  $x \in F$ , είναι  $x^2 \geq 0$ , πράγμα που δεν συμβαίνει στους μιγαδικούς.