

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3

1. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ που να είναι :

- (i) 1-1 αλλά όχι επί.
- (ii) επί αλλά όχι 1-1.
- (iii) 1-1 και επί.
- (iv) ούτε 1-1 ούτε επί.

Απάντηση. (i) $f(x) = 2x$.

(ii) $f(x) = k$, αν $x = 2k$ ή $x = 2k - 1$.

(iii) $f(x) = x + 1$.

(iv) $f(x) = x^2$.

2. Αν $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$, δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση από το A στο B και δεν υπάρχει συνάρτηση από το B στο A . Υπάρχει συνάρτηση από το $\emptyset$ στο $\emptyset$;

Απάντηση. Έστω $A = \emptyset$ και $B \neq \emptyset$. Τότε $A \times B = \emptyset \times B = \emptyset$. Η μοναδική σχέση από το $A = \emptyset$ στο B , δηλ. το μοναδικό υποσύνολο του $\emptyset \times B$, είναι το $\emptyset$. Το $\emptyset$ είναι συνάρτηση $: \emptyset \rightarrow B$, αν ισχύει η συνθήκη

$$\forall x \in \emptyset \exists ! y \in B : (x, y) \in \emptyset$$

Ισχυριζόμαστε ότι η συνθήκη ισχύει. Το αποδεικνύουμε με άτοπο: Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε ισχύει η άρνηση της συνθήκης, δηλ.

$$\underline{\exists x \in \emptyset} : \forall y \in B, (x, y) \notin \emptyset.$$

που είναι άτοπο. Το αποτέλεσμα αυτό δεν επηρεάζεται αν το B είναι ή δεν είναι κενό, άρα $\emptyset : \emptyset \rightarrow \emptyset$ είναι συνάρτηση.

Όμως αν $B \neq \emptyset$, μια συνάρτηση $f : B \rightarrow A = \emptyset$, αν ισχύει η συνθήκη

$$\forall x \in B \quad \underline{\exists ! y \in \emptyset} : (x, y) \in f,$$

που δεν ισχύει ποτέ, άρα δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση.

3. Αν $f : A \rightarrow B$ είναι συνάρτηση και $X \subseteq B$, δείξτε ότι :

$$f^{-1}(B \setminus X) = A \setminus f^{-1}(X).$$

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
 x \in f^{-1}(B \setminus X) &\iff f(x) \in B \setminus X \\
 &\iff f(x) \in B \wedge f(x) \notin X \\
 &\iff x \in A \wedge x \notin f^{-1}(X) \\
 &\iff x \in A \setminus f^{-1}(X).
 \end{aligned}$$

4. Οι παρακάτω συναρτήσεις έχουν πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ και πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$. Βρείτε σε κάθε περίπτωση ποιό είναι το μεγαλύτερο δυνατό πεδίο ορισμού.

$$h(x) = \ln x, \quad \alpha(v) = -v, \quad j(\beta) = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \quad g(u) = \ln(\ln(\cos u)).$$

Απάντηση.

$$\exists \ln x \in \mathbb{R} \iff x > 0, \text{ άρα } A_h = (0, +\infty)$$

$$\forall v \in \mathbb{R}, \exists -v = \alpha(v) \in \mathbb{R}, \text{ άρα } A_\alpha = \mathbb{R}$$

$$\exists \frac{1}{\beta^2 - 1} \in \mathbb{R} \iff \beta^2 - 1 \neq 0 \iff \beta \neq \pm 1. \text{ Άρα } A_j = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}.$$

Για να υπάρχει το $g(u) = \ln(\ln(\cos u))$, πρέπει $\ln(\cos u) > 0$, το οποίο συμβαίνει αν $\cos u > 1$, άτοπο. Άρα δεν ορίζεται η συνάρτηση g .

5. Προσδιορίστε την εικόνα των ακόλουθων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) $f(x) = x^3$.

(β) $f(x) = x - 4$

(γ) $f(x) = e^x + 3$

(δ) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Απάντηση. (α) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}$ με $x = \sqrt[3]{y}$, επομένως για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x \in \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 = y$. Άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x = y + 4 \in \mathbb{R}$ με $f(x) = y$, άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(γ) $e^x > 0$, άρα $e^x + 3 > 3$, δηλ. $f(\mathbb{R}) \subseteq (3, +\infty)$. Αντίστροφα, έστω $y \in (3, +\infty)$, τότε $y - 3 > 0$, άρα υπάρχει $x = \ln(y - 3)$, για το οποίο έχουμε $f(x) = e^{\ln(y-3)} + 3 = y - 3 + 3 = y$. Επομένως $(3, +\infty) \subseteq f(\mathbb{R})$ και τελικά $f(\mathbb{R}) = (3, +\infty)$.

(δ) $f(0) = 0$, άρα $0 \in f(\mathbb{R})$. Αν $y \neq 0$, υπάρχει ακριβώς ένα $x = \frac{1}{y} \neq 0$, με $f(x) = y$. Άρα f επί και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

6. Να ελέγξετε αν οι συναρτήσεις της Άσκησης 5 είναι 1-1 και επί.

Απάντηση. (α) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση: $x = \sqrt[3]{y}$. Άρα f είναι 1-1 και επί.

(β) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση: $x = y + 4$. Άρα f είναι 1-1 και επί.

(γ) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση για $y > 3$, άρα η f δεν είναι επί. Επειδή για $y > 3$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = \ln(y - 3)$, η f είναι 1-1.

(δ) Η εξίσωση $f(x) = y$: για $y = 0$ έχει μία λύση, την $x = 0$. Για κάθε $y \neq 0$, έχει μία λύση, την $x = 1/y$. Άρα η f είναι 1-1 και επί.

7. Δίνονται $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$f(n) = n + 1$$

$$g(n) = 2n$$

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 1, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε τις συνθέσεις $f \circ f, f \circ g, g \circ f, g \circ h, h \circ g, (f \circ g) \circ h$.

Απάντηση.

$$(f \circ f)(n) = f(f(n)) = f(n + 1) = (n + 1) + 1 = n + 2$$

$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(2n) = 2n + 1$$

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n + 1) = 2(n + 1) = 2n + 2$$

$$(g \circ h)(n) = g(h(n)) = 2h(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιος} \\ 2, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

$$(h \circ g)(n) = h(g(n)) = h(2n) = 0$$

$$(f \circ g) \circ h(n) = (f \circ g)(h(n)) = 2h(n) + 1 = \begin{cases} 1, & n \text{ άρτιος} \\ 3, & n \text{ περιττός} \end{cases}$$

8. Βρείτε το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται η

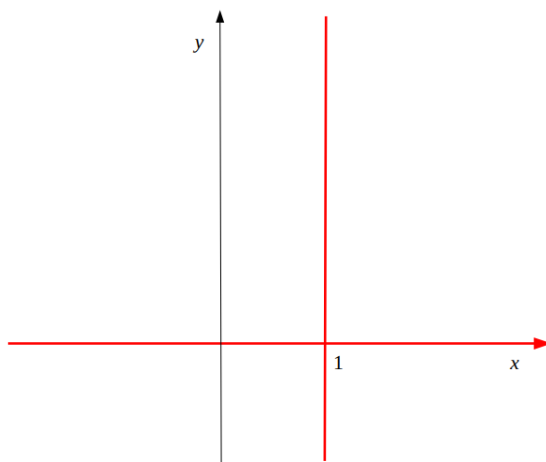
$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3xy}{(x - 1)y}.$$

Απάντηση. Πρέπει $(x - 1)y \neq 0$, δηλ. πρέπει $x \neq 1$ και $y \neq 0$. Άρα πρέπει από το $\mathbb{R}^2$ να αφαιρεθούν όλα τα ζεύγη που έχουν $x = 1$ και όλα τα ζεύγη

που έχουν $y = 0$. Επομένως, μένει το σύνολο

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}).$$

Δείτε στο επόμενο διάγραμμα: αφαιρούνται τα σημεία που έχουν σχεδιαστεί με κόκκινο.



9. Έστω E σύνολο αναφοράς. Για κάθε $A \subseteq E$, θέτουμε:

$$\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R} : \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Να δείξετε ότι

- (α) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$
- (β) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$
- (γ) $\chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A$
- (δ) $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$.

Απάντηση. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap B}(x) = 1 &\iff x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B \\ &\iff \chi_A(x) = 1 \wedge \chi_B(x) = 1 \\ &\iff \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1 \end{aligned}$$

(β) Κάθε $x \in E$ ικανοποιεί ακριβώς μία από τις παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις:

(1) $x \in A$ και $x \in B$. Τότε: $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$ και η ισότητα (β) γίνεται $1 = 1 + 1 - 1$.

(2) $x \in A$ και $x \notin B$. Τότε: $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 0$ και η (β) γίνεται $1 = 1 + 0 - 0$.

(3) $x \notin A$ και $x \in B$: παρόμοια με την (2).

(4) $x \notin A$ και $x \notin B$. Τότε $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$ και η (β) γίνεται $0 = 0 + 0 - 0$.

(γ) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in E$, έχουμε $x \in A$ ή $x \notin A$, άρα $\chi_A(x) = 1$ και $\chi_{E \setminus A}(x) = 0$, ή $\chi_A(x) = 0$ και $\chi_{A \setminus A}(x) = 1$. Σε κάθε περίπτωση, $\chi_{E \setminus A}(x) + \chi_A(x) = 1$.

(δ) Έστω $A \subseteq B$ και $x \in E$. Αν $x \in A$, τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$. Αν $x \notin A$ αλλά $x \in B$, τότε $\chi_A(x) = 0$, ενώ $\chi_B(x) = 1$. Αν τέλος $x \notin B$, τότε $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$.

10. Έστω $f : A \rightarrow B$ συνάρτηση. Θεωρούμε στο A την διμελή σχέση

$$x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

(i) Να δείξετε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και να βρείτε την κλάση ισοδυναμίας ενός $x \in A$.

(ii) Έστω ότι η f είναι επί. Να δείξετε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $F : A/\sim \rightarrow B$, όπου $A/\sim$ το σύνολο-πηλίκο.

Απάντηση. (i) Για κάθε $x \in A$, $f(x) = f(x)$, άρα $x \sim x$ και η $\sim$ είναι ανακλαστική. Αν $x_1 \sim x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$, επομένως $f(x_2) = f(x_1)$, άρα $x_2 \sim x_1$ και η $\sim$ είναι συμμετρική. Τέλος, αν $x_1 \sim x_2$ και $x_2 \sim x_3$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$ και $f(x_2) = f(x_3)$, άρα και $f(x_1) = f(x_3)$, επομένως $x_1 \sim x_3$ και η $\sim$ είναι μεταβατική. Αποδείξαμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η κλάση ισοδυναμίας $[x]$ ενός $x \in A$ είναι το σύνολο

$$[x] = \{z \in A \mid z \sim x\} = \{z \in A \mid f(z) = f(x)\}.$$

(ii) Υποθέτουμε ότι η f είναι επί. Θέτουμε

$$F : A/\sim \longrightarrow B : F([x]) = f(x).$$

Τότε:

(1) Η F είναι *καλά ορισμένη*, δηλ. η τιμή της σε μια κλάση $[x]$ δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο x της κλάσης: αν $[x] = [z]$, τότε $F([x]) = F([z])$. Πράγματι,

$$[x] = [z] \implies f(x) = f(z) \implies F([x]) = F([z]).$$

(2) Η F είναι 1-1: Έστω $F([x]) = F([z])$. Τότε

$$F([x]) = F([z]) \implies f(x) = f(z) \implies x \sim z \implies [x] = [z].$$

(3) Η F είναι επί: Για κάθε $y \in B$, από το επί της f , υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = y$. Τότε $F([x]) = f(x) = y$.

11. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Θωρούμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, έστω

$$\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow \mathbb{R}\},$$

και εφοδιάζουμε το $\mathcal{F}$ με την διμελή σχέση

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in A.$$

(i) Να δείξετε ότι $\eta \leq$ είναι διάταξη.

(ii) Να εξετάσετε αν $\eta \leq$ είναι ολική διάταξη.

(iii) Να ορίσετε την αντίστοιχη αυστηρή διάταξη $<$.

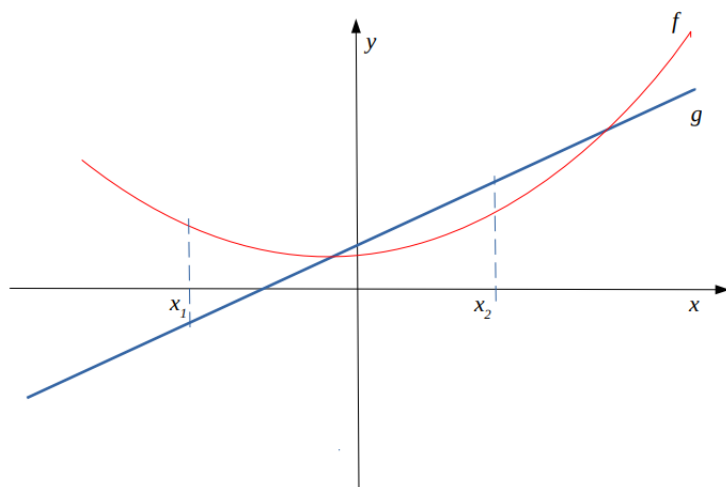
(iv) Θεωρούμε $A = \mathbb{R}$ και $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι συναρτήσεις με $f(x) = 1$, $g(x) = \cos x$ και $h(x) = e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} f \leq g, \quad g \leq f, \quad f \leq h, \quad h \leq f, \quad g \leq h, \quad h \leq g, \\ f < g, \quad g < f, \quad f < h, \quad h < f, \quad g < h, \quad h < g. \end{aligned}$$

Απάντηση. (i) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \leq f(x)$, άρα $f \leq f$ και $\eta \leq$ είναι ανακλαστική. Έστω $f \leq g$ και $g \leq f$. Τότε για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) \leq g(x)$ και $g(x) \leq f(x)$, απ' όπου προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$, και $f = g$, δηλ. $\eta \leq$ είναι αντισυμμετρική. Τέλος, αν $f \leq g$ και $g \leq h$, τότε, για κάθε $x \in A$, ισχύει $f(x) \leq g(x)$ και $g(x) \leq h(x)$, άρα και $f(x) \leq h(x)$. Οπότε και $f \leq h$ και $\eta \leq$ είναι μεταβατική. Δείξαμε ότι $\eta \leq$ είναι διάταξη.

(ii) Η $\leq$ δεν είναι ολική διάταξη: αν υπάρχουν δύο σημεία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \leq g(x_1)$ και $g(x_2) \leq f(x_2)$, τότε ούτε $f \leq g$, ούτε $g \leq f$. Βλ. για

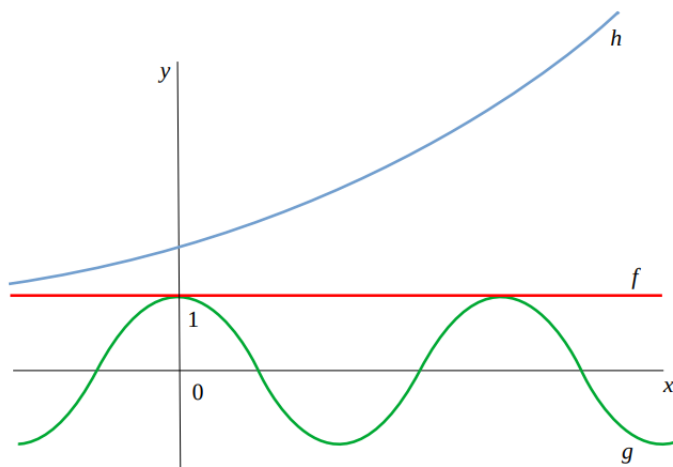
παράδειγμα τις γραφικές παραστάσεις δύο τέτοιων συναρτήσεων στο επόμενο διάγραμμα :



(iii) Η αντίστοιχη αυστηρή διάταξη $f < g$ ορίζεται από την ισοδυναμία

$$\begin{aligned} f < g &\iff f \leq g \wedge f \neq g \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \leq g(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)). \end{aligned}$$

(iv) Στο επόμενο διάγραμμα βλέπουμε γραφικές παραστάσεις των f , g , h .



Η $f \leq g$ δεν ισχύει, διότι υπάρχει $x = \pi/2 \in \mathbb{R}$, με $g(\pi/2) = 0 < f(\pi/2) = 1$.

Η $g \leq f$ ισχύει, διότι $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \cos x \leq 1 = f(x)$.

Η $f \leq h$ ισχύει, διότι, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < e^x$, άρα $f(x) = 1 < e^x + 1 = h(x)$.

Η $h \leq f$ δεν ισχύει, λόγω της προηγούμενης ανισότητας: αν ίσχυε, από την αντισυμμετρία θα είχαμε $h = f$.

Η $g \leq h$ ισχύει, αφού, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \leq 1 < h(x)$.

Η $h \leq g$, δεν ισχύει, πάλι λόγω της αντισυμμετρίας.

Η $f < g$ είναι σύζευξη των $f \leq g$ και $f \neq g$. Αφού η $f \leq g$ δεν ισχύει, δεν ισχύει ούτε η σύζευξη.

Η $g < f$ ισχύει, διότι $g \leq f$ και $g \neq f$.

Η $f < h$, επίσης ισχύει, διότι $f \leq h$ και $f \neq h$.

Η $h < f$ δεν ισχύει διότι δεν ισχύει η $h \leq f$.

Η $g < h$ ισχύει, επειδή $g \leq h$ και $g \neq h$.

Τέλος, η $h < g$ δεν ισχύει, διότι δεν ισχύει η $h \leq g$.

12. Στο σύνολο $\mathcal{F}$ της προηγούμενης άσκησης θεωρούμε την διμελή σχέση

$$f \prec g \iff f(x) < g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να δείξετε ότι η $\prec$ είναι αυστηρή διάταξη.

(ii) Να ορίσετε την αντίστοιχη διάταξη $\preceq$.

(iii) Να συγκρίνετε μέσω της $\prec$ και της $\preceq$ τις f , g , h της προηγούμενης άσκησης.

Απάντηση. (i) Για οποιαδήποτε $f \in \mathcal{F}$, η σχέση $f(x) < f(x)$ δεν ισχύει για κανένα $x \in \mathbb{R}$, άρα $f \not\prec f$. Επίσης, αν $f \prec g$, τότε $f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \not< f(x)$, και $g \not\prec f$. Τέλος, προφανώς, $f \prec g$ και $g \prec h$ συνεπάγονται $f \prec h$. Άρα η $\prec$ είναι αυστηρή διάταξη.

(ii) Η αντίστοιχη διάταξη $\preceq$ δίνεται από την ισοδυναμία

$$f \preceq g \iff f \prec g \vee f = g.$$

(iii) Ισχύει $f \prec h$ και $g \prec h$. Άρα και $f \preceq h$ και $g \preceq h$. Οι f και g δεν σχετίζονται: Δεν ισχύει $f \prec g$, γιατί για κάθε $x \neq 2k\pi$, $g(x) < f(x)$. Επίσης δεν ισχύει $f = g$, άρα ούτε και $f \preceq g$. Ομοίως, δεν ισχύει $g \preceq f$, διότι στα σημεία $2k\pi$, με $k \in \mathbb{Z}$, είναι $f(2k\pi) = 1 \not< 1 = \cos(2k\pi) = g(2k\pi)$. Επίσης δεν ισχύει $f = g$, άρα ούτε $f \preceq g$.