ΜΑΘΗΜΑ 09

12 Απεικονίσεις

12.1 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Μια διμελής σχέση $R \subseteq A \times B$ από το A στο B λέγεται ***συνάρτηση*** ή ***απεικόνιση***, αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει *ακριβώς ένα* $b \in B$ με $(a, b) \in R$, δηλ. αν ισχύει η επόμενη συνθήκη:

$$\forall\, a \in A \quad \exists!\, b \in B \;:\; (a, b) \in R.$$

Λέμε ότι το A είναι το ***πεδίο ορισμού*** και το B το ***πεδίο τιμών*** της f.

Ιδιαιτέρως για τις απεικονίσεις γράφουμε:
f αντί R,
$f : A \to B$ αντί $f \subseteq A \times B$,
$f(a) = b$ αντί $(a, b) \in f$.

12.2 Ορισμός. Δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ και $g : C \to D$ λέγονται ***ίσες***, αν $A = C$, $B = D$ και $f(a) = g(a)$, για κάθε $a \in A = C$.

Ο ορισμός της απεικόνισης απαιτεί κάθε σημείο του A να συμμετέχει σε ένα ακριβώς διατεταγμένο ζεύγος (a, b) της σχέσης, αλλά δεν βάζει κανένα περιορισμό στα στοιχεία του B. Κάποια από αυτά μπορεί να εμφανίζονται σε περισσότερα διατεταγμένα ζεύγη και άλλα να μην εμφανίζονται καθόλου.

12.3 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται **ενεικόνιση** (ή απλά **ένα προς ένα**) (συμβ. 1-1) αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$a_1, a_2 \in A \text{ με } a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

ή, ισοδύναμα, η συνεπαγωγή

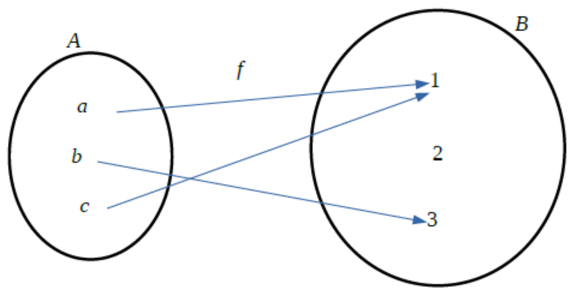
$$a_1, a_2 \in A \text{ με } f(a_1) = f(a_2) \implies a_1 = a_2.$$

Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται **επεικόνιση** (ή απλά **επί**) αν

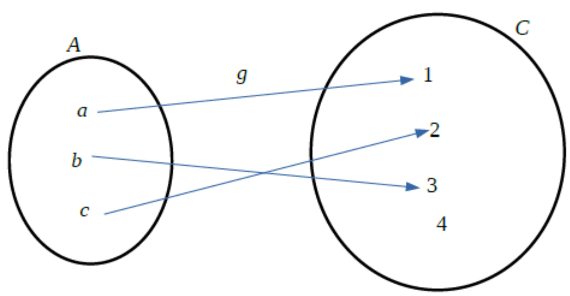
$$\forall\, b \in B \ \ \exists\, a \in A \ : \ f(a) = b.$$

Μια απεικόνιση που είναι και 1-1 και επί λέγεται **αμφιμονοσήμαντη**.

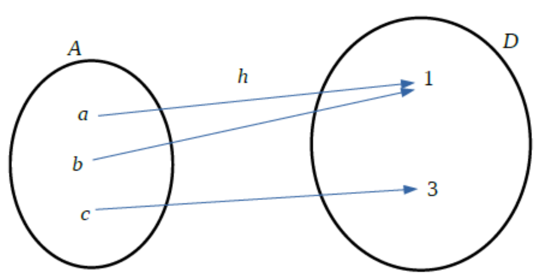
12.4 Παραδείγματα. (1) Έστω $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ και $f : A \to B$ με $f(a) = f(c) = 1,\ f(b) = 3$. Η f είναι απεικόνιση από το A στο B, που δεν είναι ούτε 1-1 ($f(a) = f(c)$), ούτε επί ($\nexists\, x \in A$ με $f(x) = 2$).



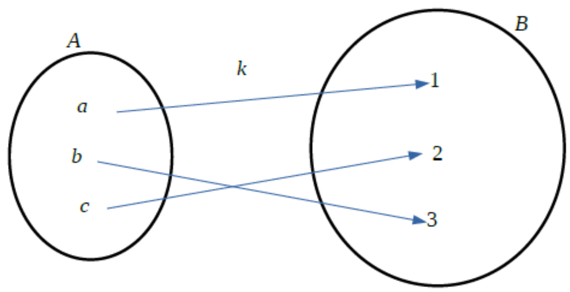
(2) Έστω τώρα $C = \{1, 2, 3, 4\}$ και $g : A \to C$ με $g(a) = 1,\ g(b) = 3,\ g(c) = 2$. Η g είναι 1-1 απεικόνιση από το A στο C, που δεν είναι επί.



(3) Έστω επίσης $D = \{1, 3\}$ και $h : A \to D$ με $h(a) = h(b) = 1,\ h(c) = 3$. Η h είναι απεικόνιση επί από το A στο D, που δεν είναι 1-1.



(4) Για τα σύνολα A και B, όπως στο (1), η απεικόνιση $k : A \to B$ με $k(a) = 1,\ k(b) = 3,\ k(c) = 2$ είναι αμφιμονοσήμαντη.



(5) Η διμελής σχέση $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με

$$(x, y) \in R \iff y = x^2$$

είναι μια απεικόνιση $R = f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία δεν είναι ούτε 1-1, ούτε επί. Ο περιορισμός της f

$$g = f|_{[0,+\infty)} : [0, +\infty) \to \mathbb{R} \ : \ g(x) = x^2$$

είναι 1-1, αλλά δεν είναι επί. Αν θεωρήσουμε πεδίο τιμών το $[0, +\infty)$, η απεικόνιση

$$h : \mathbb{R} \to [0, +\infty) \ : \ h(x) = x^2$$

είναι επί, αλλά δεν είναι 1-1. Τέλος η

$$k : [0, +\infty) \to [0, +\infty) \ : \ k(x) = x^2$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Όπως για κάθε διμελή σχέση, έτσι και για μια απεικόνιση $f : A \to B$ υπάρχει η αντίστροφη διμελής σχέση $f^{-1} \subseteq B \times A$.

12.5 Ορισμός. Μια απεικόνιση $f : A \to B$ λέγεται ***αντιστρέψιμη*** αν και η διμελής σχέση $f^{-1} \subseteq B \times A$ είναι απεικόνιση.

Ισχύει η επόμενη

12.6 Πρόταση. *Μια απεικόνιση $f : A \to B$ είναι αντιστρέψιμη, εάν και μόνον εάν είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τους Ορισμούς 12.3 και 12.5,

$$\begin{aligned} f \text{ αντιστρέψιμη} &\Leftrightarrow f^{-1} \text{ απεικόνιση} \\ &\Leftrightarrow \forall\, b \in B \;\; \exists!\, a \in A \; : \; (b, a) \in f^{-1} \\ &\Leftrightarrow f \text{ είναι αμφιμονοσήμαντη} \end{aligned}$$ □

12.7 Ορισμός. Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση, $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$. Ονομάζουμε ***εικόνα του*** X ***μέσω της*** f το σύνολο

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} \subseteq B$$

και ***αντίστροφη εικόνα του*** Y ***μέσω της*** f το σύνολο

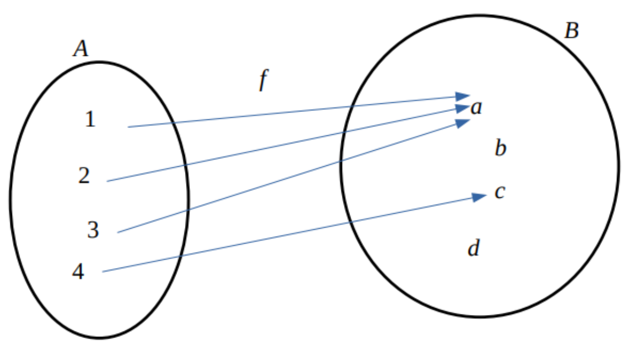
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\} \subseteq A.$$

12.8 Παρατήρηση. (1) Η αντίστροφη *απεικόνιση* $f^{-1} : B \to A$ υπάρχει *μόνο* αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη.

(2) Η αντίστροφη *εικόνα* $f^{-1}(X)$ ενός συνόλου υπάρχει *πάντοτε.*

12.9 Παράδειγμα. Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ και την απεικόνιση $f : A \to B$ με

$$f(1) = f(2) = f(3) = a \;\text{ και }\; f(4) = c.$$



Η f δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί. Όμως, υπάρχει η εικόνα $f^{-1}(X)$, για κάθε $X \subseteq A$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} &f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \\ &f^{-1}(\{b, c\}) = \{4\} \\ &f^{-1}(\{a, c\}) = f^{-1}(B) = A \\ &f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(\{a, d\}) = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Για τις εικόνες και τις αντίστροφες εικόνες συνόλων ισχύουν οι επόμενες προτάσεις. Η πρώτη είναι προφανής.

12.10 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση. Τότε:*
(i) Αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, τότε $f(X_1) \subseteq f(X_2) \subseteq B$.
(ii) Αν $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$, τότε $f^{-1}(Y_1) \subseteq F^{-1}(Y_2) \subseteq A$. □

12.11 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση, $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$. Τότε:*
(i) Είναι

$$X \subseteq f^{-1}(f(X)),$$

με την ισότητα να ισχύει για κάθε $X \subseteq A$, αν και μόνον αν η f είναι 1-1.
(ii) Είναι

$$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y,$$

με την ισότητα να ισχύει για κάθε $Y \subseteq B$, αν και μόνον αν η f είναι επί.

Απόδειξη. (*i*) Έστω $x \in X$. Τότε $f(x) \in f(X)$. Εξ ορισμού της αντίστροφης εικόνας συνόλου, $x \in f^{-1}(f(X))$, άρα $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό: Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1 και θεωρούμε ένα $x \in f^{-1}(f(X))$. Τότε $y = f(x) \in f(X)$, άρα υπάρχει $x' \in X$ με $f(x') = y = f(x)$. Λόγω του 1-1, $x = x' \in X$ και ισχύει η ισότητα $X = f^{-1}(f(X))$. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι ισχύει η ισότητα, για κάθε $X \subseteq A$, αλλά η f δεν είναι 1-1. Τότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) = y \in B$. Θέτουμε $X = \{x_1\}$. Τότε $f(X) = \{y\}$ και $x_2 \in f^{-1}(f(X)) \neq X$, άτοπο.

(*ii*) Έστω $y \in f(f^{-1}(Y))$. Τότε υπάρχει $x \in f^{-1}(Y)$ με $f(x) = y$. Όμως η σχέση $x \in f^{-1}(Y)$ συνεπάγεται ότι $f(x) \in Y$. Άρα $y = f(x) \in Y$ και $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό: Αν η f είναι επί, τότε για κάθε $Y \subseteq B$ και $y \in Y \subseteq B$, υπάρχει $x \in f^{-1}(Y)$ με $f(x) = y \in Y$. Άρα ισχύει και $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$. Για το αντίστροφο, έστω ότι ισχύει η ισότητα για κάθε $Y \subseteq B$, αλλά η f δεν είναι επί. Τότε υπάρχει $y \in B$ που δεν είναι εικόνα κανενός $x \in A$. Θέτουμε $Y = \{y\}$. Τότε $f^{-1}(Y) = \emptyset$ και $f(f^{-1}(Y)) = \emptyset \neq Y$, άτοπο. □

12.12 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση. Τότε:*
(i) Αν $X_1, X_2 \subseteq A$, τότε

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$$
$$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2).$$

(ii) Αν $Y_1, Y_2 \subseteq B$, τότε

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \\ f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &= f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2). \end{aligned}$$

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(X_1 \cup X_2) &= \{f(x) \mid x \in X_1 \cup X_2\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X_1 \ \vee \ x \in X_2\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X_1\} \cup \{f(x) \mid x \in X_2\} \\ &= f(X_1) \cup f(X_2) \end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned} y \in f(X_1 \cap X_2) &\Longrightarrow \ \exists\, x \in X_1 \cap X_2 \ : \ f(x) = y \\ &\Longrightarrow \ \exists\, x \in X_1 \ : \ x \in X_2 \ \wedge \ f(x) = y \\ &\Longrightarrow \ y \in f(X_1) \cap f(X_2) \end{aligned}$$

(ii) Για την αντίστροφη εικόνα συνόλων, πρατηρουμε ότι

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) &\Longleftrightarrow \ f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \\ &\Longleftrightarrow \ f(x) \in Y_1 \ \vee \ f(x) \in Y_2 \\ &\Longleftrightarrow \ x \in f^{-1}(Y_1) \ \vee \ x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow \ x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \end{aligned}$$

και ότι

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) &\Longleftrightarrow \ f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \\ &\Longleftrightarrow \ f(x) \in Y_1 \ \wedge \ f(x) \in Y_2 \\ &\Longleftrightarrow \ x \in f^{-1}(Y_1) \ \wedge \ x \in f^{-1}(Y_2) \\ &\Longleftrightarrow \ x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \end{aligned}$$

□

12.13 Παρατήρηση. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η σχέση $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ στην γενική περίπτωση δεν είναι ισότητα. Π.χ., έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για τα σύνολα $X_1 = (-\infty, 0)$ και $X_2 = (0, +\infty)$ ισχύει $f(X_1) = f(X_2) = (0, +\infty)$, άρα και $f(X_1) \cap f(X_2) = (0, +\infty)$, ενώ $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ και $f(X_1 \cap X_2) = \emptyset$.