ΜΑΘΗΜΑ 13

16 Φυσικοί Αριθμοί

Ένας από τους (ισοδύναμους) τρόπους που υπάρχουν για να ορίσουμε τους φυσικούς αριθμούς είναι να θέσουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{\emptyset\} \\
2 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}
\end{aligned}$$

και αν έχουμε ορίσει το n, ορίζουμε το επόμενο του n (συμβ. $\varepsilon(n)$) βάζοντας μέσα στο επόμενο σύνολο όλα τα προηγούμενα. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς που έχουν προηγηθεί, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \emptyset \\
1 &= \{0\} \\
2 &= \{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\} \\
3 &= \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\} \\
4 &= \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\}
\end{aligned}$$

και έχοντας ορίσει τον n, ορίζουμε τον επόμενο $\varepsilon(n)$ θέτοντας

$$\varepsilon(n) = n \cup \{n\}.$$

Ονομάζουμε τα σύνολα που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο ***φυσικούς αριθμούς***. Το σύνολο που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς (και μόνον αυτούς) το συμβολίζουμε $\mathbb{N}_o$ και το ονομάζουμε ***σύνολο των φυσικών αριθμών***.

Βέβαια, εγείρονται διάφορα ερωτήματα: η ¨συλλογή¨ όλων των φυσικών είναι σύνολο; μπορεί η διαδικασία του να βρίσκουμε τον επόμενο φυσικό να συνεχίζεται ¨για πάντα¨; είναι το 0 επόμενο κάποιου άλλου φυσικού; κ.α. Τα ερωτήματα αυτά δεν μπορούν να απαντηθούν παρά μόνο με την εισαγωγή νέων αξιωμάτων. Για να συνεχίσουμε, δεχόμαστε λοιπόν το επόμενο

Αξίωμα του Peano: Υπάρχει ένα σύνολο $\mathbb{N}_o$ και μια απεικόνιση $\varepsilon : \mathbb{N}_o \to \mathbb{N}_o$ με τις ιδιότητες:

(P1) Η ε *δεν* είναι επί.

(P2) Η ε είναι 1-1.

(P3) Αν $S \subseteq \mathbb{N}_o$, έτσι ώστε: (i) $0 \in S$, και (ii) ισχύει η συνεπαγωγή

$$n \in S \;\Rightarrow\; \varepsilon(n) \in S,$$

τότε $S = \mathbb{N}_o$.

Η (P3) λέγεται *Αρχή της Επαγωγής*.

Σύμφωνα με το Αξίωμα του Peano, η ε δεν είναι επί, άρα η εικόνα $\varepsilon(\mathbb{N}_o)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}_o$. Ποιά στοιχεία αφήνει απ' έξω; Η απάντηση είναι το 0, και μόνον αυτό· κάθε φυσικός διάφορος του 0 είναι επόμενος κάποιου.

16.1 Πρόταση. *Ισχύει* $\varepsilon(\mathbb{N}_o) = \mathbb{N}_o \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα (P3) (Αρχή της Επαγωγής), θα δείξουμε την ισότητα $\varepsilon(\mathbb{N}_o) \cup \{0\} = \mathbb{N}_o$, που είναι ισοδύναμη με την ζητούμενη. Έστω $S = \varepsilon(\mathbb{N}_o) \cup \{0\}$. Τότε $0 \in S$, δηλ. ισχύει η (i) του (P3). Έστω $n \in S$. Τότε $\varepsilon(n) \in \varepsilon(\mathbb{N}_o) \subseteq S$, άρα $\varepsilon(n) \in S$ και ισχύει και η (ii) του (P3). Επομένως $S = \mathbb{N}_o$. □

Όπως φαίνεται από την προηγούμενη πρόταση, το $\mathbb{N}_o$ του Αξιώματος του Peano περιέχει το 0, και όλους τους ¨επόμενους¨. Συμβολίζουμε με 1 τον $\varepsilon(0)$, με 2 τον $\varepsilon(1)$, με 3 τον $\varepsilon(2)$, κλπ. Επίσης συμβολίζουμε

$$\mathbb{N} = \varepsilon(\mathbb{N}_o) = \mathbb{N}_o \setminus \{0\}.$$

Η Αρχή της Επαγωγής μας δίνει μια μέθοδο να δείχνουμε ότι κάποια ιδιότητα την έχουν όλοι οι φυσικοί αριθμοί, όπως έγινε στην προηγούμενη πρόταση. Μας δίνει όμως κι ένα τρόπο να ορίζουμε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τους φυσικούς:

16.2 Θεώρημα (Θεώρημα της Αναδρομής). *Έστω X σύνολο, $f : X \to X$ μια συνάρτηση και $c \in X$. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\phi : \mathbb{N}_o \to X$ τέτοια ώστε*
(i) $\phi(0) = c$, και
(ii) $\phi(\varepsilon(n)) = f(\phi(n))$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$.

Παρατηρούμε ότι η (ii) είναι ισοδύναμη με την μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_o \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathbb{N}_o \arrow[d, "\phi"] \\
X \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

ή, ισοδύναμα, με την ισότητα των δύο συνθέσεων

$$\phi \circ \varepsilon = f \circ \phi.$$

Για την απόδειξη, βλ. τις ¨Σημειώσεις¨ στην η-τάξη.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Αναδρομής θα ορίσουμε τώρα πράξεις στο σύνολο των φυσικών.

17 Πρόσθεση

Σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{N}_o$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα της Αναδρομής για $X = \mathbb{N}_o$, $f = \varepsilon$ και $c = m$. Τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση

$$\phi_m : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{N}_o$$

με τις ιδιότητες:
(i) $\phi_m(0) = m$, και
(ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$, $\phi_m(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\phi_m(n))$.
Συμβολίζουμε

$$m + n = \phi_m(n)$$

Θα υπολογίσουμε την ϕ_m, για μερικά $m \in \mathbb{N}_0$.

(1) Για $m = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\phi_0(0) = 0\\
&\phi_0(1) = \phi_0(\varepsilon(0)) = \varepsilon(\phi_0(0)) = \varepsilon(0) = 1\\
&\phi_0(2) = \phi_0(\varepsilon(1)) = \varepsilon(\phi_0(1)) = \varepsilon(1) = 2\\
&\phi_0(3) = \phi_0(\varepsilon(2)) = \varepsilon(\phi_0(2)) = \varepsilon(2) = 3
\end{aligned}$$

Από τις πρώτες ισότητες φαίνεται να ισχύει

$$\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_o}.$$

Αποδεικνύουμε ότι αυτή η ισότητα πράγματι ισχύει, επαγωγικά: Έστω το σύνολο

$$S = \{n \in \mathbb{N}_o \mid \phi_0(n) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_o}(\mathrm{n}) = \mathrm{n}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \in S$. Έστω $n \in S$, δηλ. $\phi_0(n) = n$. Τότε

$$\phi_0(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\phi_0(n)) = \varepsilon(n),$$

άρα και $\varepsilon(n) \in S$. Από το (P3), $S = \mathbb{N}_o$.

(2) Για $m = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\phi_1(0) = 1 = \varepsilon(0)\\
&\phi_1(1) = \phi_1(\varepsilon(0)) = \varepsilon(\phi_1(0)) = \varepsilon(1)\\
&\phi_1(2) = \phi_1(\varepsilon(1)) = \varepsilon(\phi_1(1)) = \varepsilon(1)\\
&\phi_1(3) = \phi_1(\varepsilon(2)) = \varepsilon(\phi_1(2)) = \varepsilon(2)
\end{aligned}$$

Τώρα από τις πρώτες ισότητες φαίνεται να ισχύει

$$\phi_1 = \varepsilon.$$

Πάλι επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι αυτή η ισότητα ισχύει: Έστω το σύνολο

$$S = \{n \in \mathbb{N}_o \mid \phi_1(n) = \varepsilon(n)\}.$$

Παρατηρούμε ότι $0 \in S$. Έστω $n \in s$, δηλ. $\phi_1(n) = \varepsilon(n)$. Τότε

$$\phi_1(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\phi_1(n)) = \varepsilon(n),$$

άρα και $\varepsilon(n) \in S$. Από το (P3), $S = \mathbb{N}_o$.

(3) Για $m = 2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\phi_2(0) &= 2 = \varepsilon(\varepsilon(0)) \\
\phi_2(1) &= \phi_2(\varepsilon(0)) = \varepsilon(\phi_2(0)) = \varepsilon(2) = 3 = \varepsilon(\varepsilon(1)) \\
\phi_2(2) &= \phi_2(\varepsilon(1)) = \varepsilon(\phi_2(1)) = \varepsilon(3) = 4 = \varepsilon(\varepsilon(2)) \\
\phi_2(3) &= \phi_2(\varepsilon(2)) = \varepsilon(\phi_2(2)) = \varepsilon(4) = 5 = \varepsilon(\varepsilon(3))
\end{aligned}$$

από όπου φαίνεται να ισχύει

$$\phi_1 = \varepsilon \circ \varepsilon = \varepsilon^2,$$

και η τελευταία ισότητα επίσης επαληθεύεται επαγωγικά.

(4) Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\phi_m = \underbrace{\varepsilon \circ \varepsilon \circ \cdots \circ \varepsilon}_{m\text{-φορές}} = \varepsilon^m.$$

17.1 Λήμμα. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}_o$, ισχύει*

(i) $0 + m = m + 0 = m$, *και*

(ii) $1 + m = m + 1 = \varepsilon(m)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό της πρόσθεσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
0 + m &= \phi_0(m) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_o}(\mathrm{m}) = \mathrm{m} \\
m + 0 &= \phi_m(0) = m.
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
1 + m &= \phi_1(m) = \varepsilon(m) \\
m + 1 &= \phi_m(1) = \phi_m(\varepsilon(0)) = \varepsilon(\phi_m(0)) = \varepsilon(m).
\end{aligned}$$ □

17.2 Πρόταση. *Η πρόσθεση στο $\mathbb{N}_o$ είναι προσεταιριστική, δηλ.*

$$m + (n + p) = (m + n) + p, \qquad \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}_o.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $m, n \in \mathbb{N}_o$, και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{p \in \mathbb{N}_o \mid m + (n + p) = (m + n) + p\}.$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $S = \mathbb{N}_o$. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$m + (n + 0) = (m + n) + 0$$

άρα $0 \in S$. Έστω $p \in S$, δηλ. έστω $m + (n + p) = (m + n) + p$. Θα δείξουμε ότι $m + (n + \varepsilon(p)) = (m + n) + \varepsilon(p)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(m+n) + \varepsilon(p) &= \phi_{m+n}(\varepsilon(p)) = \varepsilon(\phi_{m+n}(p)) = \varepsilon((m+n)+p) \\ &= \varepsilon(m + (n+p)) = \varepsilon(\phi_m(n+p)) \\ &= \phi_m(\varepsilon(n+p)) = m + \varepsilon(n+p) \\ &= m + \varepsilon(\phi_n(p)) = m + \phi_n(\varepsilon(p)) \\ &= m + (n + \varepsilon(p))\end{aligned}$$

άρα $S = \mathbb{N}_o$, κι επειδή τα m, n είναι τυχαία, η ισότητα ισχύει για κάθε $m, n, p \in \mathbb{N}_o$. □

17.3 Πρόταση. *Η πρόσθεση στο $\mathbb{N}_o$ είναι μεταθετική, δηλ.*

$$m + n = n + m, \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}_o.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{N}_o$, και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{n \in \mathbb{N}_o \mid m + n = n + m\}.$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $S = \mathbb{N}_o$. Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $m + 0 = 0 + m$, άρα $0 \in S$. Έστω $n \in S$, δηλ. έστω $m + n = n + m$. Θα δείξουμε ότι $m + \varepsilon(n) = \varepsilon(n) + m$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}m + \varepsilon(n) &= \phi_m(\varepsilon(n)) = \varepsilon(\phi_m(n)) = \varepsilon(m+n) \\ &= \varepsilon(n+m) = \varepsilon(\phi_n(m)) = \phi_n(\varepsilon(m)) \\ &= n + (1 + m) = (n+1) + m \\ &= \varepsilon(n) + m\end{aligned}$$

άρα $S = \mathbb{N}_o$, κι επειδή το m είναι τυχαίο, η ζητούμενη ισότητα ισχύει για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_o$. □

Οι ιδιότητες που αποδείξαμε στο Λήμμα και τις δύο προτάσεις κάνουν το $(\mathbb{N}_o, +)$ να μοιάζει με *αβελιανή ομάδα*. Λείπει όμως η τελευταία ιδιότητα, η *ύπαρξη αντιθέτου*. Αν έχουμε ένα $0 \neq m \in \mathbb{N}_o$, δεν υπάρχει $n \in \mathbb{N}_o$ με $m + n = 0$. Παρά την μη-ύπαρξη αντιθέτου, ισχύει ο (ασθενέστερος, αλλά σημαντικός) "Νόμος της Διαγραφής":

17.4 Πρόταση. *Για κάθε* $m, n, q \in \mathbb{N}_o$, *ισχύει η συνεπαγωγή*

$$m + q = n + q \implies m = n. \tag{1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}_o$ όλων των $q \in \mathbb{N}_o$ τα οποία απαλείφονται, δηλ. για τα οποία ισχύει η συνεπαγωγή (1). Χρησιμοποιώντας το (i) του Λήμματος 17.1, παίρνουμε

$$m + 0 = n + 0 \implies m = n,$$

άρα $0 \in S$. Έστω τώρα ότι $q \in S$. Θα δείξουμε ότι $\varepsilon(q) \in S$. Πράγματι, αν $m, n \in \mathbb{N}_o$ με $m + \varepsilon(q) = n + \varepsilon(q)$, τότε

$$\begin{aligned} m + \varepsilon(q) = n + \varepsilon(q) &\implies m + (q + 1) = n + (q + 1) \\ &\implies m + (1 + q) = n + (1 + q) \\ &\implies (m + 1) + q = (n + 1) + q \\ &\implies m + 1 = n + 1 \\ &\implies \varepsilon(m) = \varepsilon(n) \\ &\implies m = n \end{aligned}$$

όπου έχουμε εφαρμόσει κατά σειρά το Λήμμα 17.1(ii), την μεταθετικότητα της πρόσθεσης, την προσεταιριστικότητα, την υπόθεση ότι το q απαλείφεται και το 1-1 της ε. □