ΜΑΘΗΜΑ 16

23 Οι Ρητοί Αριθμοί

Σε αυτή την παράγραφο θα επεκτείνουμε περαιτέρω το σύνολο των ακεραίων, ώστε στο μεγαλύτερο σύνολο που θα τους εμφυτεύσουμε οι μη μηδενικοί ακέραιοι να έχουν αντίστροφους. Παρακάτω με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου συμβολίζουμε τους ακεραίους (όπως και τους φυσικούς).

Στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ ορίζουμε την διμελή σχέση

$$(a, m) \approx (b, n) \iff an = bm.$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας:

(i) Για κάθε $(a, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, είναι $am = ma$, άρα $(a, m) \approx (a, m)$ και η $\approx$ είναι ανακλαστική.

(ii) Αν $(a, m) \approx (b, n)$, τότε $an = bm$, ή, ισοδύναμα, $bm = an$, δηλ. $(b, n) \approx (a, m)$ και η $\approx$ είναι συμμετρική.

(iii) Έστω $(a, m) \approx (b, n)$ και $(b, n) \approx (c, p)$, δηλ. $an = bm$ και $bp = cn$. Αν $b = 0$, τότε $a = c = 0$ και $[a, m] \approx [c, d]$. Αν $b \neq 0$, πολλαπλασιάζοντας τις ισότητες κατά μέλη παίρνουμε $anbp = bmcn$, και απαλείφοντας το $bn \neq 0$, έχουμε $aq = cm$, οπότε $(a, m) \approx (c, d)$ και η $\approx$ είναι μεταβατική.

Επομένως η $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας και για κάθε $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ υπάρχει η αντίστοιχη κλάση ισοδυναμίας

$$\begin{aligned} <(a, m)> &= \{(b, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid (b, n) \approx (a, m)\} \\ &= \{(b, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid an = bm\} \end{aligned}$$

Απλοποιώντας τον συμβολισμό, θα γράφουμε $< a, m >$ αντί $< (a, m) >$.

Ονομάζουμε **ρητό αριθμό** κάθε κλάση ισοδυναμίας της σχέσης $\approx$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{Q}$ το σύνολο-πηλίκο $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\approx$, δηλ. το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας

$$\mathbb{Q} = \{< a, m > \mid (a, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}.$$

Οι κλάσεις ισοδυναμίας της $\approx$ μας είναι γνωστές από τα παιδικά μας χρόνια: στο δημοτικό(!) τις λέμε *κλάσματα* και τις συμβολίζουμε με

$$\frac{a}{m} = < a, m > .$$

Στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών ορίζουμε *πρόσθεση*, ως εξής:

$$< a, m > + < b, n > = < an + bm, mn > .$$

23.1 Πρόταση. *Η πρόσθεση στο $\mathbb{Q}$ είναι καλά ορισμένη και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) Είναι μεταθετική.

(ii) Είναι προσεταιριστική.

(iii) Έχει ουδέτερο το $< 0, 1 >$.

(iv) Κάθε $< a, m > \in \mathbb{Q}$ έχει αντίθετο το $< -a, m >$.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι η πρόσθεση είναι καλά ορισμένη, υποθέτουμε ότι $< a, m > = < a', m' >$ και $< b, n > = < b', n' >$, και θα αποδείξουμε ότι

$$< an + bm, mn > = < a'n' + b'm', m'n' > .$$

Πράγματι, από την υπόθεση έχουμε τις ισότητες $am' = a'm$ και $bn' = b'n$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\begin{gathered} < an + bm, mn > = < a'n' + b'm', m'n' > \Longleftrightarrow \\ (an + bm)m'n' = (a'n' + b'm')mn \iff \\ anm'n' + bmm'n' = a'n'mn + b'm'mn \end{gathered}$$

και η τελευταία είναι προφανής, σαν αποτέλεσμα των δύο ισοτήτων της υπόθεσης.

Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι η πρόσθεση είναι μεταθετική και προσεταιριστική. Προφανώς το $< 0, 1 >$ είναι ουδέτερο στοιχείο (: *μηδενικό*):

$$< a, m > + < 0, 1 > = < a \cdot 1 + 0, 1 \cdot m > = < a, m >, \qquad \forall \ < a, m > \in \mathbb{Q}.$$

Τέλος, κάθε $< a, m > \in \mathbb{Q}$ έχει αντίθετο, το $< -a, m >$, όπου βέβαια $-a$ είναι το αντίθετο του a στο $\mathbb{Z}$:

$$< a, m > + < -a, m > = < am + (-a)m, mm > = < 0, mm > = < 0, 1 > . \ \square$$

Ορίζουμε τώρα και *πολλαπλασιασμό* στο $\mathbb{Q}$, μέσω της σχέσης

$$< a, m > \cdot < b, n > = < ab, mn > .$$

23.2 Πρόταση. *Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Q}$ είναι καλά ορισμένος και έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Είναι μεταθετικός.*

(ii) *Είναι προσεταιριστικός.*

(iii) *Έχει ουδέτερο το $< 1, 1 >$.*

(iv) *Κάθε $< a, m > \in \mathbb{Q}$ με $a \neq 0$ έχει αντίστροφο.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι καλά ορισμένος πρέπει να δείξουμε ότι αν $< a, m > = < a', m' >$ και $< b, n > = < b', n' >$, τότε $< a, m > \cdot < b, n > = < a', m' > \cdot < b', n' >$. Πράγματι:

$$\left.\begin{array}{rcl} < a, m > & = & < a', m' > \\ < b, n > & = & < b', n' > \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} am' & = & a'm \\ bn' & = & b'n \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow am'bn' = a'mb'n$$

$$\Longrightarrow < ab, mn > = < a'b', m'n' >$$

$$\Longrightarrow < a, m > \cdot < b, n > = < a', m' > \cdot < b', n' >$$

και το ζητούμενο αποδείχτηκε.

Είναι άμεσο ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός και προσεταιριστικός. Επίσης, προφανώς το $< 1, 1 >$ είναι ουδέτερο στοιχείο (: μονάδα).

Σχετικά με την ύπαρξη αντιστρόφου: Έστω $< a, m > \in \mathbb{Q}$ με $a \neq 0$, τότε $a > 0$ ή $a < 0$. Αν $a > 0$, τότε $a \in \mathbb{N}$ και ο αντίστροφος είναι ο $< m, a >$. Αν $a < 0$, τότε $-a \in \mathbb{N}$ και ο αντίστροφος είναι ο $< -m, -a >$. $\square$

Συνδυάζοντας τις δύο πράξεις, πάλι με ένα απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα:

23.3 Πρόταση. *Για κάθε $< a, m >, < b, n >, < c, p > \in \mathbb{Q}$, ισχύει*

$$< a, m > \cdot (< b, n > + < c, p >) = < a, m > \cdot < b, n > + < a, m > \cdot < c, p > .$$

Τα προηγούμενα αποτελέσματα συνοψίζονται στο παρακάτω

23.4 Θεώρημα. *Η τριάδα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ είναι σώμα.*

24 Διάταξη

Παρακάτω για να μην δημιουργείται σύγχυση, θα συμβολίζουμε με $\leq_{\mathbb{Z}}$ την διάταξη των ακεραίων που ορίσαμε στο προηγούμενο μάθημα και με $\leq_{\mathbb{Q}}$ την διάταξη που θα ορίσουμε τώρα στους ρητούς. Στο $\mathbb{Q}$ λοιπόν ορίζουμε *διάταξη* μέσω της ισοδυναμίας

$$< a, m > \leq_{\mathbb{Q}} < b, n > \iff an \leq_{\mathbb{Z}} bm.$$

Έναν ρητό $< a, m > \in \mathbb{Q}$ θα τον ονομάζουμε ***θετικό***, αν $< 0, 1 > \leq_{\mathbb{Q}} < a, m >$ και ***αρνητικό***, αν $< a, m > \leq_{\mathbb{Q}} < 0, 1 >$. Παρατηρούμε ότι

$$< 0, 1 > \leq_{\mathbb{Q}} < a, m > \iff 0 \leq_{\mathbb{Z}} a$$

και

$$< a, m > \leq_{\mathbb{Q}} < 0, 1 > \iff a \leq_{\mathbb{Z}} 0$$

24.1 Πρόταση. *Για την σχέση $\leq_{\mathbb{Q}}$ ισχύουν τα επόμενα:*
(i) *Είναι ολική διάταξη.*
(ii) *Για κάθε τριάδα $< a, m >, < b, n >, < c, p > \in \mathbb{Q}$, ισχύει*

$$< a, m > \leq_{\mathbb{Q}} < b, n > \Longrightarrow < a, m > + < c, p > \leq_{\mathbb{Q}} < b, n > + < c, p > .$$

(iii) *Για κάθε τριάδα $< a, m >, < b, n >, < c, p > \in \mathbb{Q}$, με $< c, p >$ θετικό, ισχύει*

$$< a, m > \leq_{\mathbb{Q}} < b, n > \Longrightarrow < a, m > \cdot < c, p > \leq_{\mathbb{Q}} < b, n > \cdot < c, p > .$$

Απόδειξη. Άσκηση! □

25 Οι Ρητοί σαν Επέκταση των Ακεραίων

Όπως οι ακέραιοι είναι επέκταση των φυσικών, έτσι και οι ρητοί αποτελούν μια περαιτέρω επέκταση των ακεραίων. Θεωρούμε την απεικόνιση

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} : \phi(a) = < a, 1 >, \quad \forall\, a \in \mathbb{Z}.$$

25.1 Πρόταση. (i) *Η ψ είναι 1-1.*

(ii) *Η ψ διατηρεί τις πράξεις, δηλ., για κάθε $a, b \in \mathbb{Z}$,*

$$\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b),$$
$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

(iii) *Η ψ διατηρεί την διάταξη:*

$$a \leq_{\mathbb{Z}} b \implies \psi(a) \leq_{\mathbb{Q}} \psi(b).$$

Απόδειξη. (i) Η ψ είναι 1-1:

$$\psi(a) = \psi(b) \implies < a, 1 > = < b, 1 > \implies a \cdot 1 = 1 \cdot b \implies a = b.$$

(ii) Για την διατήρηση των πράξεων παρατηρούμε ότι

$$\psi(a+b) = < a+b, 1 > = < a, 1 > + < b, 1 > = \psi(a) + \psi(b)$$
$$\psi(ab) = < ab, 1 > = < a, 1 > \cdot < b, 1 > = \psi(a) \cdot \psi(b)$$

(iii) Τέλος, για την διατήρηση της διάταξης έχουμε

$$\begin{aligned} a \leq_{\mathbb{Z}} b &\implies a \cdot 1 \leq_{\mathbb{Z}} 1 \cdot b \\ &\implies < a, 1 > \leq_{\mathbb{Q}} < b, 1 > \\ &\implies \psi(a) \leq_{\mathbb{Q}} \psi(b) \end{aligned}$$ □

Επειδή η απεικόνιση ψ είναι 1-1, ταυτίζουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ με την εικόνα $\psi(\mathbb{Z})$, που αποτελείται από όλους τους ρητούς της μορφής $< a, 1 >$, με $a \in \mathbb{Z}$. Δηλ.

$$\mathbb{Z} \equiv \psi(\mathbb{Z}) = \{< a, 1 > \mid a \in \mathbb{Z}\}.$$