ΜΑΘΗΜΑ 01

1 Οι βασικές έννοιες

Σε διάφορα κείμενα για την στοιχειώδη θεωρία συνόλων εμφανίζεται ένας ορισμός που λέει, με διάφορες παραλλαγές, περίπου ότι

> *ένα σύνολο είναι μια συλλογή από αντικείμενα του φυσικού κόσμου ή της διανόησής μας.*

Ένας τέτοιος ορισμός δεν είναι ¨καλός¨, γιατί αντί να εξηγεί τί είναι σύνολο μέσω απλούστερων εννοιών, το κάνει μέσω της ισοδύναμης (: συνώνυμης) λέξης ¨συλλογή¨. Επειδή κάθε προσπάθεια να εξηγήσουμε τί είναι σύνολο καταλήγει σε ένα συνώνυμο (σύνολο είναι μιά συλλογή, συλλογή είναι μιά συνάθροιση, κλπ.), δεχόμαστε ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο, δηλ.

> ***το σύνολο είναι αρχική έννοια.***

Ανάλογη κατάσταση έχουμε στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, όπου δεχόμαστε χωρίς ορισμό τις αρχικές έννοιες ¨σημείο¨, ¨ευθεία¨ και ¨επιπεδο¨.

Κάθε ένα από τα αντικείμενα ενός συνόλου λέγεται ***στοιχείο*** του συνόλου. Συμβολίζουμε συνήθως τα σύνολα με κεφαλαία γράμματα και τα στοιχεία τους με μικρά. Για ένα στοιχείο x ενός συνόλου A λέμε ότι το x ***ανήκει*** στο A και γράφουμε

$$x \in A.$$

Αν ένα αντικείμενο x δεν είναι στοιχείο ενός συνόλου A, γράφουμε

$$x \notin A.$$

Ένα σύνολο καθορίζει πλήρως τα στοιχεία του και καθορίζεται από αυτά. Επομένως, αν δοθούν ένα σύνολο A και ένα αντικείμενο x, το x ή είναι ή δεν είναι στοιχείο του A. Δηλ.

(*) ***Για ένα σύνολο A και ένα αντικείμενο x ισχύει ακριβώς μια από τις σχέσεις***

$$x \in A \qquad \textbf{\textit{ή}} \qquad x \notin A$$

Δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο. Αυτό το σύνολο το συμβολίζουμε με $\{ \}$ ή $\emptyset$ και το λέμε ***κενό***. Για το κενό σύνολο και για οποιοδήποτε αντικείμενο x ισχύει

(1) $$x \notin \emptyset$$

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί:

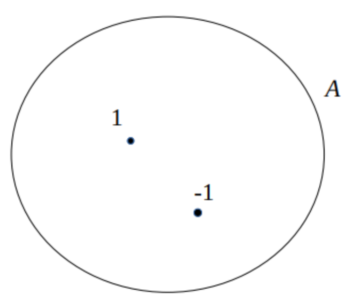
(1) Με καταγραφή όλων των στοιχείων του ανάμεσα σε δύο άγκιστρα, π.χ.

$$A = \{-1, 1\}.$$

(2) Με περιγραφή μιας χαρακτηριστικής ιδιότητας που έχουν τα στοιχεία του (και την έχουν μόνον αυτά), πάλι σε άγκιστρα, π.χ.

$$B = \{ \text{ οι πραγματικοί αριθμοί που είναι ρίζες της εξίσωσης } x^2 = 1 \}.$$

Γραφικά τα σύνολα παριστάνονται με τα διαγράμματα Venn. Π.χ. το ανωτέρω σύνολο A παριστάνεται με το διάγραμμα



Σχόλια. (1) Η καταγραφή όλων των στοιχείων ενός συνόλου μας λέει σαφώς ποιό είναι το σύνολο, αλλά δεν είναι δυνατή όταν τα στοιχεία είναι άπειρα.

(2) Η περιγραφή μιας ιδιότητας μπορεί να μην είναι σαφής και να μην οδηγεί στο καθορισμό ενός συνόλου. Π.χ. το

$$C = \{ \text{ οι ρίζες της εξίσωσης } x^2 + 1 = 0 \}$$

δεν είναι καθορισμένο σύνολο, γιατί αν οι μιγαδικοί μπορούν να είναι λύση του προβλήματος, θα έχουμε $C = \{i, -i\}$, ενώ αν απαιτείται οι λύσεις να είναι πραγματικές, θα έχουμε $C = \emptyset$. Γι΄ αυτό

(**) ***στην μέθοδο της περιγραφής είναι απαραίτητο να καθορίζεται μέσα σε ποιό προϋπάρχον, γνωστό σύνολο αναζητούμε τα στοιχεία με την επιθυμητή ιδιότητα***

Για το προηγούμενο σύνολο C, θα έπρεπε να γράψουμε

$$C = \{x \in \mathbb{C} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

για το $\{i, -i\}$, ή

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$$

για το κενό.

1.1 Ορισμός. Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ***ίσα*** και γράφουμε $A = B$, αν έχουν τα ίδια στοιχεία, δηλ. αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, και κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A. Άρα

$$A = B \iff \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ \quad\quad \text{και} \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$$

Επομένως, για να δείξουμε ότι δύο σύνολα A και B είναι ίσα, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$x \in A \iff x \in B. \tag{2}$$

Π.χ. τα σύνολα A και B που περιγράφονται στην προηγούμενη σελίδα.

Η έννοια της ισότητας συνόλων, δεν είναι ισότητα κάποιου μεγέθους, δεν προϋποθέτει κάποια μέτρηση. Για τα σύνολα, $A = B$ σημαίνει ότι A και B είναι δύο ονόματα του **ίδιου** συνόλου.

Επίσης, όπως φαίνεται από τον ορισμό των ίσων συνόλων η *σειρά* με την οποία γράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου δεν έχει καμμία σημασία, άρα

$$\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\}.$$

Ακόμη, ένα στοιχείο μπορεί να επεναλαμβάνεται στην καταγραφή των στοιχείων ενός συνόλου, χωρίς αυτό να αλλάζει το σύνολο, δηλ.

$$\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}.$$

1.2 Πρόταση. *Η ισότητα συνόλων έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

(i) Ανακλαστική ιδιότητα: Για κάθε σύνολο A, ισχύει $A = A$.

(ii) Συμμετρική ιδιότητα: Αν A, B σύνολα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$A = B \;\Rightarrow\; B = A.$$

(iii) Μεταβατική ιδιότητα: Αν A, B, C σύνολα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$A = B \text{ και } B = C \;\Rightarrow\; A = C.$$

1.3 Ορισμός. Λέμε ότι ένα σύνολο A είναι **υποσύνολο** ενός συνόλου B, αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, δηλ.

$$A \subseteq B \iff [x \in A \Rightarrow x \in B]. \tag{3}$$

Αν για τα σύνολα A και B ισχύει $A \subseteq B$ και $A \neq B$, λέμε ότι το A είναι **γνήσιο** υποσύνολο του B και γράφουμε

$$A \subset B.$$

Παρατηρούμε ότι συνδυάζοντας τους ορισμούς των ίσων συνόλων και του υποσυνόλου, παίρνουμε ότι

$$A = B \iff [A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A] \tag{4}$$

1.4 Πρόταση. *Η σχέση του υποσυνόλου έχει τις επόμενες ιδιότητες:*

(i) Ανακλαστική ιδιότητα: Για κάθε σύνολο A, ισχύει $A \subseteq A$.

(ii) Αντισυμμετρική ιδιότητα: Αν A, B σύνολα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A \;\Rightarrow\; A = B.$$

(iii) Μεταβατική ιδιότητα: Αν A, B, C σύνολα, τότε ισχύει η συνεπαγωγή

$$A \subseteq B \text{ και } B \subseteq C \;\Rightarrow\; A \subseteq C.$$

1.5 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Ονομάζουμε **δυναμοσύνολο** του A το σύνολο

$$\mathcal{P}(A) = \{X | X \subseteq A\}.$$

Στον προηγούμενο ορισμό έχουμε παραβεί τον κανόνα (**) της σελ. 3, άρα το $\mathcal{P}(A)$ θα μπορούσε να μην είναι ένα καλά ορισμένο σύνολο. Ότι το $\mathcal{P}(A)$ είναι σύνολο εξασφαλίζεται από ένα αξίωμα (: *αξίωμα του δυναμοσυνόλου*).

Παρατηρείστε ότι ένα στοιχείο x και τα σύνολα $\{x\}$, A και $\mathcal{P}(A)$ ικανοποιούν τις ισοδυναμίες

$$x \in A \quad\iff\quad \{x\} \subseteq A \quad\iff\quad \{x\} \in \mathcal{P}(A).$$

2 Το Παράδοξο του Russel

Όπως φαίνεται από τον ορισμό του συνόλου, δεν υπάρχει περιορισμός στο τί μπορεί να περιέχει ένα σύνολο. Όμως δημιουργούνται μερικά εύλογα ερωτήματα. Μπορεί ένα σύνολο να περιέχει ο,τιδήποτε; να περιέχει άλλα σύνολα; να είναι τόσο μεγάλο που να περιέχει ¨τα πάντα¨; να περιέχει τον εαυτό του;

Ας υποθέσουμε ότι η απάντηση στα προηγούμενα είναι ¨ναι¨ και ας ονομάσουμε Ω το σύνολο όλων των συνόλων, δηλ.

$$\Omega = \{X : X \text{σύνολο}\}.$$

Αφού το Ω είναι σύνολο, θα πρέπει να ανήκει στον εαυτό του, δηλ. θα πρέπει $\Omega \in \Omega$. Από την άλλη μεριά, κανένα από τα σύνολα με τα οποία συνήθως ασχολούμαστε δεν έχει αυτή την ιδιότητα, π.χ. $\mathbb{R} \notin \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$, κλπ. Ομοίως το σύνολο $A = \{1, g, *\}$. Για το A ισχύει $A \notin A$. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι υπάρχουν σύνολα που *δεν* ανήκουν στον εαυτό τους. Ορίζουμε τώρα το υποσύνολο S του Ω που αποτελείται από όσα σύνολα δεν ανήκουν στον εαυτό τους, δηλ. θέτουμε

$$S = \{X \in \Omega : X \notin X\},$$

και για το S γνωρίζουμε ότι $\mathbb{R} \in S$, $\mathbb{N} \in S$, $A = \{1, g, *\} \in S$, κλπ. Ισχύει άραγε $S \in S$ ή $S \notin S$; Σύμφωνα με τον κανόνα (*), ισχύει ακριβώς μία από αυτές τις δύο σχέσεις. Όμως:

Αν $S \in S$, τότε το S είναι ένα από τα σύνολα X που έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα $X \notin X$, δηλ. $S \notin S$, άτοπο!

Αν $S \notin S$, τότε το S είναι ένα από τα σύνολα X που *δεν* έχουν την χαρακτηριστική ιδιότητα $X \notin X$, άρα $S \in S$, πάλι άτοπο.

Το παράδοξο του συνόλου που και ανήκει και δεν ανήκει στον εαυτό του οφείλεται στον Bertrand Russel. Η κατάσταση αυτή δημιουργείται γιατί

η συλλογή Ω όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο

(πράγματι, παρατηρείστε ότι στον ορισμό του Ω έχουμε παραβεί την (**)), ενώ εμείς προσπαθούμε να το χειριστούμε σαν τέτοιο, άρα περιμένουμε να ικανοποιεί την (*).