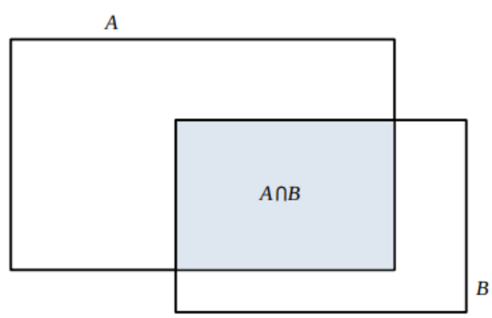
ΜΑΘΗΜΑ 02

3 Τομή και ένωση

3.1 Ορισμός. Έστω A και B σύνολα. Ονομάζουμε ***τομή*** των A και B και συμβολίζουμε με $A \cap B$ το σύνολο

$$A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\} = \{x \in B \mid x \in A\}.$$

Με άλλα λόγια η τομή δύο συνόλων αποτελείται από τα κοινά στοιχεία τους. Αν δεν υπάρχουν κοινά στοιχεία, τότε $A \cap B = \emptyset$, και τα A, B λέγονται ***ξένα***. Στο παρακάτω διάγραμμα του Venn έχει χρωματιστεί η τομή δύο συνόλων A και B:



Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

(5) $$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ και } x \in B.$$

Λόγω του τρόπου που σχηματίζεται η άρνηση μιας σύζευξης στον προτασιακό λογισμό, για ένα x που *δεν* ανήκει στην τομή των A και B έχουμε

(6) $$x \notin A \cap B \iff x \notin A \text{ είτε } x \notin B.$$

3.2 Πρόταση. *Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύουν τα παρακάτω:*
(i) $A \cap A = A$ *και* $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(ii) $A \cap B \subseteq A$ *και* $A \cap B \subseteq B$.
(iii) $A \cap B = B \cap A$ *(μεταθετική ιδιότητα).*
(iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(προσεταιριστική ιδιότητα).*

Απόδειξη. [Οι σχέσεις (i),(ii) και (iii) είναι προφανείς. Δίνουμε όμως εδώ σχολαστικές αποδείξεις μέχρι οι αναγνώστες να εξοικειωθούν με τις μεθόδους απόδειξης και για να κάνουμε χρήση και εφαρμογή του προτασιακού λογισμού.]

(i) Για την πρώτη ισότητα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$x \in A \cap A \iff x \in A \text{ και } x \in A \iff x \in A.$$

Αποδεικνύουμε την δεύτερη με άτοπο: Έστω ότι $\emptyset \cap A \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $x \in \emptyset \cap A$, δηλ. υπάρχει $x \in A$ με $x \in \emptyset$, που είναι άτοπο.

(ii) Από την ισοδυναμία (5): Κάθε στοιχείο της τομής είναι στοιχείο του A, άρα $A \cap B \subseteq A$. Ομοίως, κάθε στοιχείο της τομής είναι στοιχείο του B, άρα $A \cap B \subseteq B$.

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ και } x \in B \iff x \in B \text{ και } x \in A \iff x \in B \cap A.$$

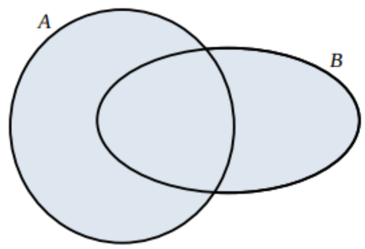
(iv) Παρόμοια, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cap C &\iff x \in A \cap B \text{ και } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ και } x \in B) \text{ και } x \in C \\ &\iff x \in A \text{ και } (x \in B \text{ και } x \in C) \\ &\iff x \in A \text{ και } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$ □

3.3 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Ονομάζουμε ***ένωση*** των A και B και συμβολίζουμε με $A \cup B$ το σύνολο

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}.$$

Στο επόμενο διάγραμμα του Venn φαίνεται χρωματισμένη η ένωση των συνόλων A και B.



Στον ορισμό της ένωσης παραβιάζεται ο κανόνας (**). Αξιωματικά δεχόμαστε ότι η ένωση συνόλων είναι σύνολο.

Για την ένωση προκύπτουν οι ισοδυναμίες

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ είτε } x \in B \tag{7}$$

και

$$x \notin A \cup B \iff x \notin A \text{ και } x \notin B. \tag{8}$$

3.4 Πρόταση. *Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $A \cup \emptyset = A$ *και* $A \cup A = A$.

(ii) $A \subseteq A \cup B$ *και* $B \subseteq A \cup B$.

(iii) $A \cup B = B \cup A$ *(μεταθετική ιδιότητα).*

(iv) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(προσεταιριστική ιδιότητα).*

Απόδειξη. (i) Για την πρώτη ισότητα παρατηρούμε ότι

$$x \in A \cup \emptyset \iff x \in A \text{ είτε } x \in \emptyset.$$

Στη διάζευξη, η δεύτερη σχέση $x \in \emptyset$ είναι πάντα ψευδής, άρα η διάζευξη είναι αληθής εάν και μόνον εάν ισχύει η πρώτη σχέση $x \in A$.

Για την δεύτερη ισότητα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$x \in A \cup A \iff x \in A \text{ είτε } x \in A \iff x \in A.$$

(iii) Παρατηρούμε ότι

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ είτε } x \in B \iff x \in B \text{ είτε } x \in A \iff x \in B \cup A.$$

(iv) Παρόμοια, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C &\iff x \in A \cup B \text{ είτε } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ είτε } x \in B) \text{ είτε } x \in C \\ &\iff x \in A \text{ είτε } (x \in B \text{ είτε } x \in C) \\ &\iff x \in A \text{ είτε } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

□

Η ένωση και τομή συνόλων αλληλεπιδρούν επιμερίζοντας και οι δύο η μία την άλλη. Πιό συγκεκριμμένα, ισχύει η επόμενη πρόταση:

3.5 Πρόταση (Επιμεριστική ιδιότητα)**.** *Έστω A, B και C σύνολα. Τότε:*
(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *και*
(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Απόδειξη. *(A)* Δίνουμε αρχικά μια αναλυτική απόδειξη της (i), χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία (4) από το Μάθημα 01. Έστω $x \in A \cap (B \cup C)$. Το x ανήκει σε μια τομή, άρα ανήκει και στα δύο σύνολα: $x \in A$ και $x \in B \cup C$, δηλ. $x \in A$ και το x ανήκει τουλάχιστον σε ένα από τα B και C. Αν ανήκει στο B, ανήκει και στο $A \cap B$. Αν ανήκει στο C, ανήκει και στο $A \cap C$. Άρα, σε κάθε περίπτωση ανήκει στο $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ και

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Έστω τώρα $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Τότε ανήκει τουλάχιστον στο ένα από τα $A \cap B$ και $A \cap C$. Αν ανήκει στο $A \cap B$, τότε ανήκει στο A και στο B, άρα και στο $B \cup C$. Επομένως ανήκει στο $A \cap (B \cup C)$. Αν ανήκει στο $A \cap C$, τότε ανήκει στο A και στο C, αρα και στο $B \cup C$. Επομένως ανήκει στο $A \cap (B \cup C)$. Σε κάθε περίπτωση ανήκει στο $A \cap (B \cup C)$ και

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C).$$

Από τους δύο εγκλεισμούς απορρέει η ισότητα.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύεται και η (ii). □

Απόδειξη. *(Β)* Οι ανωτέρω ιδιότητες είναι άμεσες εφαρμογές του επιμερισμού σύζευξης και διάζευξης προτάσεων. Έτσι για την (i) έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \ \wedge \ x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \ \wedge \ (x \in B \ \vee \ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \wedge \ x \in B) \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \ \vee \ x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

και κατά παρόμοιο τρόπο για την (ii) έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \ \vee \ x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \in C) \\ &\iff (x \in A \ \vee \ x \in B) \ \wedge \ (x \in A \ \vee \ x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \ \wedge \ x \in A \cup C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

□

3.6 Συμβολισμός. Έστω $\mathcal{S}$ μια οικογένεια από σύνολα.

Την ένωση όλων των συνόλων $A \in \mathcal{S}$ την συμβολίζουμε με

$$\bigcup \mathcal{S} \quad \text{ή} \quad \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

και την τομή όλων των $A \in \mathcal{S}$ με

$$\bigcap \mathcal{S} \quad \text{ή} \quad \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

3.7 Παράδειγμα. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$A_x = [\, x, +\infty)$$

και

$$\mathcal{S} = \{A_x \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A_x \in \mathcal{S}} A_x = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} A_x = \mathbb{R}$$

και

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A_x \in \mathcal{S}} A_x = \bigcap_{x \in \mathbb{R}} A_x = \emptyset.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε την πρώτη ισότητα, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία (4) (βλ. Μάθημα 01), δείχνοντας δηλ. ότι

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x \subseteq \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad \mathbb{R} \subseteq \bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x.$$

Πράγματι, θεωρούμε ένα $y \in \bigcup_{x\in\mathbb{R}} A_x$. Αφού το y ανήκει σε αυτή την ένωση, ανήκει σε κάποιο (τουλάχιστον ένα) από τα A_x. Κι επειδή το A_x είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έχουμε $y \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα ένα $y \in \mathbb{R}$. Τότε $y \in A_y$ και το A_y είναι υποσύνολο της ένωσης, άρα το y ανήκει στην ένωση.

Αποδεικνύουμε τώρα την δεύτερη ισότητα, με άτοπο. Πράγματι, θεωρούμε ένα $y \in \bigcap_{x\in\mathbb{R}} A_x$. Τότε το y ανήκει σε καθένα από τα A_x, $x \in \mathbb{R}$. Άρα το y ανήκει και στο $A_{y+1} = [y+1, +\infty)$, άτοπο. □