ΜΑΘΗΜΑ 05

7 Καρτεσιανό Γινόμενο

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, $\{a, b\} = \{b, a\}$. Σε κάποιες περιπτώσεις θέλουμε να αποκτήσει σημασία η σειρά με την οποία γράφονται τα στοιχεία ενός συνόλου. Για να μην προκύψουν ερωτήσεις της μορφής ¨τί είναι η σειρά;¨, τί θα πει γράφω ¨πρώτα¨ το a και ¨μετά¨ το b, κλπ., πράγμα που θα μας οδηγήσει σε μια ατέλειωτη σειρά ορισμών αμφίβολης ακρίβειας, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

7.1 Ορισμός (Kuratowski)**.** Ονομάζουμε ***διατεταγμένο ζεύγος*** των a, b (με πρώτο το a και δεύτερο το b) το σύνολο

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με τον ανωτέρω ορισμό, για $a = b$, είναι

$$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$$

δηλ. το ζεύγος (a, a) είναι ένα μονοσύνολο, ενώ για $a \neq b$ ισχύει $\{a\} \neq \{a, b\}$ και το ζεύγος (a, b) είναι δι-σύνολο.

Ο ορισμός του Kuratowski προσδίδει στα διατεταγμένα ζεύγη την χαρακτηριστική ιδιότητα που περιγράφεται στην επόμενη

7.2 Πρόταση. *Για τα διατεταγμένα ζεύγη (a, b) και (c, d) ισχύει η ισοδυναμία*

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \ \wedge \ b = d.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε πρώτα ότι $a = b$. Η ισότητα $(a, a) = (c, d)$ ισοδυναμεί με την ισότητα των συνόλων

$$\{\{a\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

από την οποία προκύπτει ότι $\{a\} = \{c\}$ και $\{a\} = \{c, d\}$, συνεπώς

$$b = a = c = d.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $a \neq b$. Τότε έχουμε την ισότητα

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}, \tag{12}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Έχουμε δύο περιπτώσεις:

(1) $\{a\} = \{c\}$, άρα και $a = c$. Τότε η (12) γίνεται

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\},$$

κι επειδή $a \neq b$, αποκλείεται η $\{a, b\} = \{a\}$, άρα $\{a, b\} = \{a, d\}$ και $b = d$.

(2) $\{a\} = \{c, d\}$, άρα $a = c = d$. Τότε η (12) γίνεται

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$$

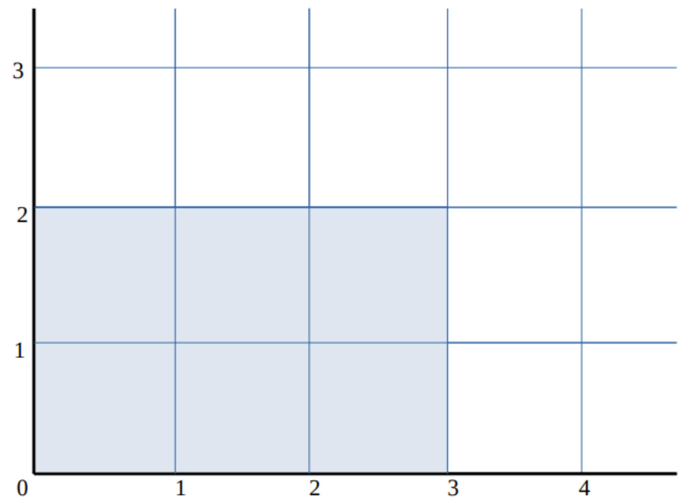
απ' όπου έχουμε ότι $\{a, b\} = \{a\}$ και $b = a$, ατοπο.

($\Leftarrow$) Προφανές. $\square$

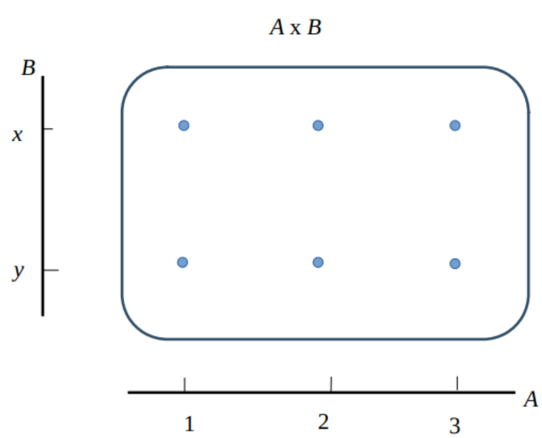
7.3 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** των A και B το σύνολο

$$A \times B = \{\ (a, b) \mid a \in A\ \wedge\ b\ \in B\ \}.$$

Θεωρείστε για λίγο γνωστό το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών και το ευκλείδιο επίπεδο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Έστω A και B τα διαστήματα $A = [0, 3]$ και $B = [0, 2]$. Το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$ αποτελείται από την χρωματισμένη περιοχή του παρακάτω σχήματος:



Μπορούμε να παραστήσουμε γραφικά το καρτεσιανό γινόμενο δύο τυχαίων συνόλων A, B, με παρόμοι τρόπο. Π.χ., για $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{x, y\}$, έχουμε το διάγραμμα



7.4 Παρατηρήσεις. Παρατηρούμε ότι:

(1) Στον ορισμό του καρτεσιανού γινόμενου φαίνεται σαν να παραβιάζεται πάλι ο κανόνας (**) του Μαθήματος 01, αλλά δεν είναι έτσι:

$$\begin{aligned} a, b \in A \cup B &\Rightarrow \{a\}, \{a, b\} \subseteq A \cup B \Rightarrow \{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\Rightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \end{aligned}$$

(2) Για κάθε σύνολο A, ισχύει $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

(3) Για τυχαία σύνολα A, B, C, εν γένει

$$A \times B \neq B \times A,$$
$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C.$$

7.5 Πρόταση. *Έστω A, B, C σύνολα. Τότε ισχύουν οι ισότητες:*

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(iii) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(iv) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε δύο από τις ισότητες, οι υπόλοιπες αποδεικνύονται ανάλογα. Για την (i) έχουμε:

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B \cup C) &\iff x \in A \ \wedge \ y \in B \cup C \\ &\iff x \in A \ \wedge \ (y \in B \vee y \in C) \\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C) \\ &\iff [(x, y) \in A \times B] \ \vee \ [(x, y) \in A \times C] \\ &\iff (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C). \end{aligned}$$

Για την (iv) έχουμε:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \cap B) \times C &\iff x \in (A \cap B) \ \wedge \ y \in C \\ &\iff (x \in A \wedge x \in B) \ \wedge \ y \in C \\ &\iff (x \in A \wedge y \in C) \ \wedge \ (x \in B \wedge y \in C) \\ &\iff (x, y) \in A \times C \ \wedge \ (x, y) \in B \times C \\ &\iff (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C). \end{aligned}$$ □

7.6 Πρόταση. *Έστω A, B, C, D σύνολα. Τότε*

(i) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(ii) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(x,y) \in (A \times B) \cap (C \times D) &\iff (x,y) \in (A \times B) \wedge (x,y) \in (C \times D)\\ &\iff (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in C \wedge y \in D)\\ &\iff (x \in A \wedge x \in C) \wedge (y \in B \wedge y \in D)\\ &\iff x \in A \cap C \wedge y \in B \cap D\\ &\iff (x,y) \in (A \cap C) \times (B \cap D).\end{aligned}$$

Για την (ii) παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \in (A \times B) \cup (C \times D)$ έχουμε $(x,y) \in (A \times B) \vee (x,y) \in (C \times D)$.

Αν $(x,y) \in (A \times B)$, τότε $x \in A$ και $y \in B$, άρα $x \in A \cup C$ και $y \in B \cup D$, επομένως $(x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$.

Αν $(x,y) \in (C \times D)$, τότε $x \in C$ και $y \in D$, άρα $x \in A \cup C$ και $y \in B \cup D$, επομένως $(x,y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$. □

Η τελευταία σχέση εν γένει δεν είναι ισότητα. Π.χ., ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $C = \{c\}$ και $D = \{d\}$, όπου $a \neq c$ και $b \neq d$. Τότε

$$(A \times B) \cup (C \times D) = \{(a,b)\} \cup \{(c,d)\} = \{(a,b),(c,d)\},$$

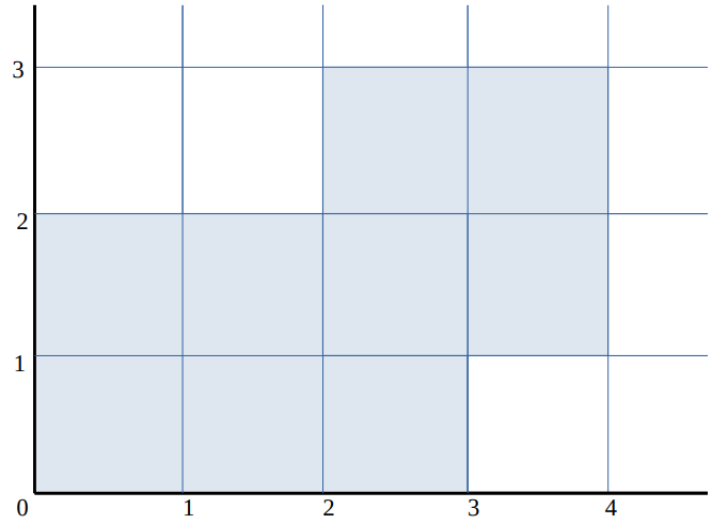
ενώ

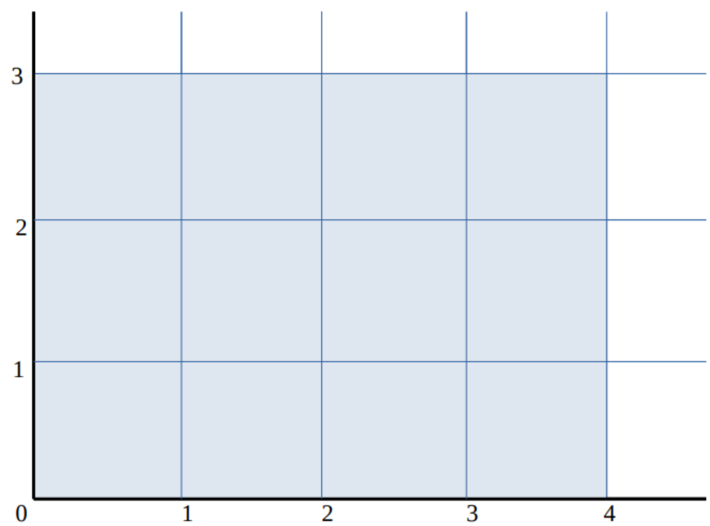
$$(A \cup C) \times (B \cup D) = \{a,c\} \times \{b,d\} = \{(a,b),(a,d),(c,b),(c,d)\}.$$

Για ένα άλλο παράδειγμα, θεωρήστε

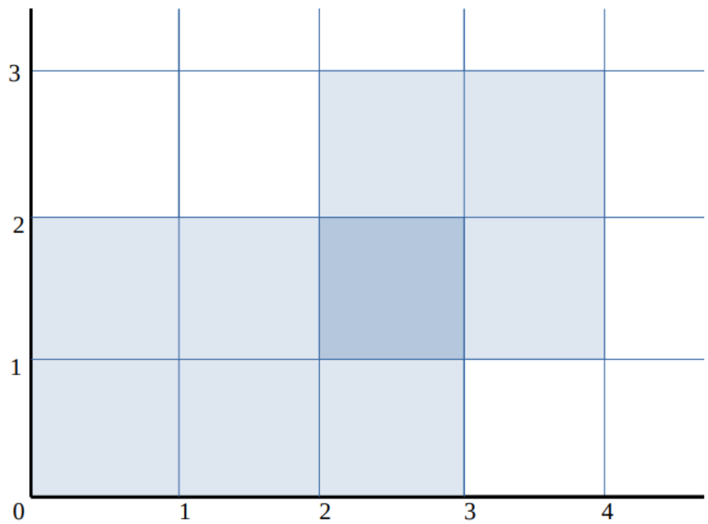
$$A = [0,3], C = [2,4], B = [0,2], D = [1,3] \subseteq \mathbb{R}.$$

Τότε $A \cup C = [0,4]$ και $B \cup D = [0,3]$. Στο πρώτο διάγραμμα βλέπουμε χρωματισμένο το σύνολο $(A \times B) \cup (C \times D)$ και στο δεύτερο το $(A \cup C) \times (B \cup D)$.





Στο τελευταίο διάγραμμα βλέπουμε συγκριτικά και την ισότητα (i) της πρότασης.


3
2
1
0
1
2
3
4