ΜΑΘΗΜΑ 06

8 Διμελείς σχέσεις

8.1 Ορισμός. Έστω A, B σύνολα. Ονομάζουμε (***διμελή***) ***σχέση*** από το A στο B κάθε υποσύνολο R του $A \times B$.

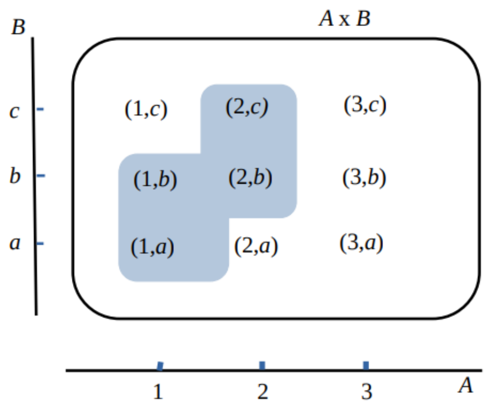
Συμβολικά γράφουμε xRy αντί $(x, y) \in R$.

Για παράδειγμα, αν $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, το σύνολο

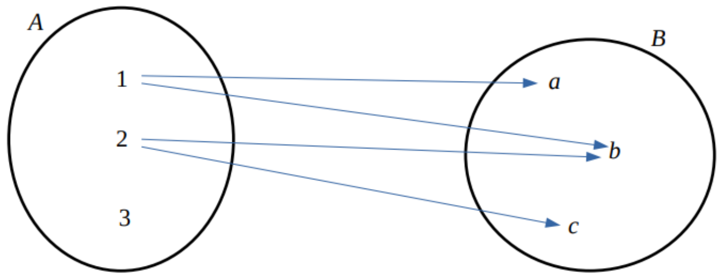
$$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c)\}$$

είναι μια διμελής σχέση από το A στο B.

Γραφικά παριστάνουμε τις διμελείς σχέσεις με δύο τρόπους: (1) Φτιάχνοντας το καρτεσιανό γινόμενο σαν διάγραμμα Venn και την σχέση R σαν υποσύνολό του. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται χρωματισμένη η σχέση του προηγούμενου παραδείγματος.



(2) Φτιάχνοντας διαγράμματα Venn των A και B και συνδέοντας με ένα βέλος το στοιχείο $a \in A$ με το $b \in B$, αν και μόνον αν $(a, b) \in R$. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται γραφικά πάλι η σχέση του προηγούμενου παραδείγματος.



8.2 Παραδείγματα. (1) Έστω $A = B = X$. Η *σχέση της ισότητας* (από το X στο X) είναι το σύνολο

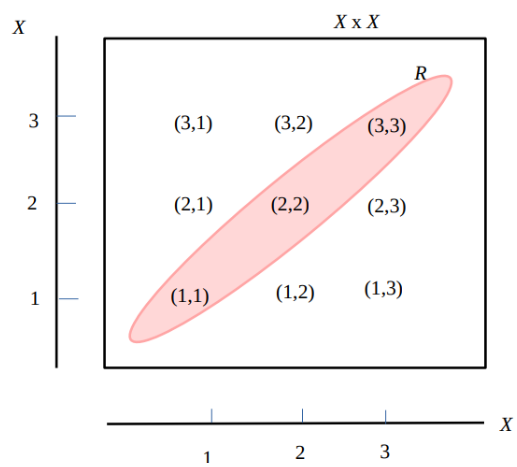
$$R = \{(x, y) \in X \times X : x = y\} = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X.$$

Τότε

$$xRy \iff x = y.$$

Το ανωτέρω σύνολο $R = \{(x, x) : x \in X\}$ συχνά συμβολίζεται με $\mathcal{D}_X$ και ονομάζεται ***διαγώνιος*** του X.

Π.χ., η ισότητα των στοιχείων του συνόλου $X = \{1, 2, 3\}$ είναι το χρωματισμένο σύνολο στο παρακάτω διάγραμμα:



(2) Έστω A σύνολο και $B = \mathcal{P}(A)$. Θέτουμε

$$R = \{(x, C) \in A \times \mathcal{P}(A) : x \in C\} \subseteq A \times \mathcal{P}(A).$$

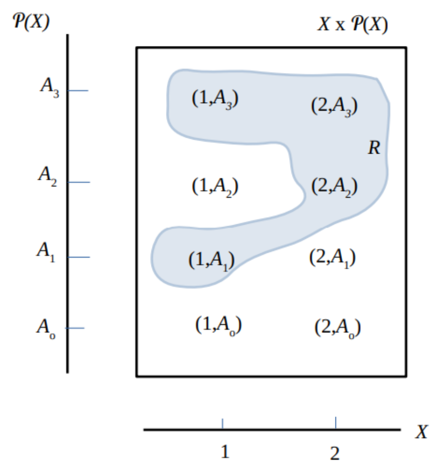
Τότε

$$xRC \iff x \in C.$$

Π.χ., για το σύνολο $X = \{1, 2\}$, είναι

$$\mathcal{P}(X) = \{A_o = \emptyset, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{1, 2\} = X\}.$$

Η σχέση $R \equiv \in$ είναι το χρωματισμένο υποσύνολο του $X \times \mathcal{P}(X)$ στο διάγραμμα



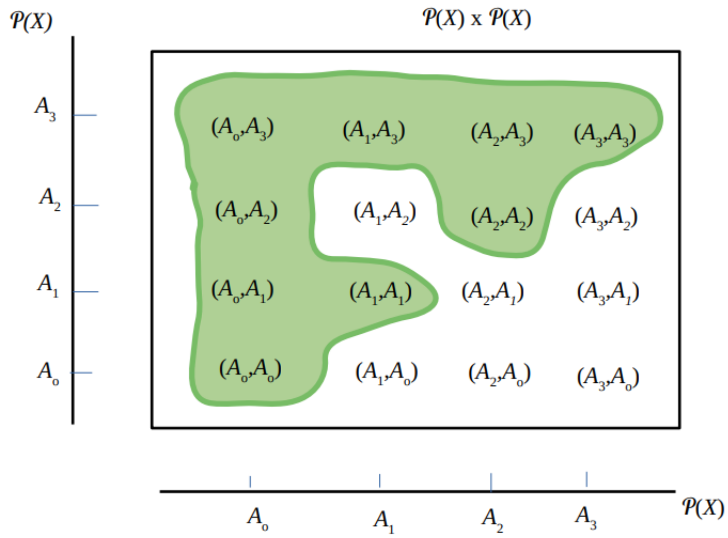
(3) Έστω X σύνολο και $A = B = \mathcal{P}(X)$. Η *σχέση του εγκλεισμού* R από το $\mathcal{P}(X)$ στο $\mathcal{P}(X)$ είναι το

$$R = \{(A, B) : A, B \subseteq X \text{ με } A \subseteq B\} \subseteq \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X).$$

Τότε

$$ARB \iff A \subseteq B.$$

Π.χ., για τα σύνολα X και $\mathcal{P}(X)$ του προηγούμενου παραδείγματος, η σχέση $R \equiv \subseteq$ φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:



(4) Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Θεωρούμε την σχέση $R \subseteq A \times A$ με

$$xRy \iff x|y \iff \frac{y}{x} \in \mathbb{Z}.$$

Τότε

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}.$$

8.3 Ορισμός. (i) Έστω $R \subseteq A \times B$ μια διμελής σχέση από το A στο B. Ονομάζουμε ***αντίστροφη*** της R την διμελή σχέση από το B στο A

$$R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$(a, b) \in R \iff (b, a) \in R^{-1}. \tag{13}$$

(ii) Έστω $R \subseteq A \times B$, $X \subseteq A$ και $Y \subseteq B$. Ονομάζουμε ***περιορισμό*** της R στο $X \times Y$ την σχέση από το X στο Y

$$R|_{X \times Y} = \{(x, y) \in R : x \in X \land \ y \in Y\} = R \cap (X \times Y).$$

Ιδιαιτέρως για τις σχέσεις από ένα σύνολο A στον εαυτό του, χρησιμοποιούμε την παρακάτω ορολογία:

8.4 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Μια διμελής σχέση $R \subseteq A \times A$ λέγεται
– ***ανακλαστική*** ή ***αυτοπαθής***, αν xRx, για κάθε $x \in A$.
– ***συμμετρική***, αν ισχύει η συνεπαγωγή $xRy \Rightarrow yRx$.
– ***αντισυμμετρική***, αν $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.
– ***μεταβατική***, αν ισχύει η συνεπαγωγή $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

8.5 Παρατήρηση. Για μια διμελή σχέση R από το A στο A, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} R \text{ ανακλαστική} &\iff \forall x \in A : (x,x) \in R \\ &\iff \mathcal{D}_X \subseteq R \end{aligned}$$

και ότι

$$R \text{ συμμετρική} \iff R = R^{-1}.$$

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται διάφορες διμελείς σχέσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ και σημειώνονται οι ιδιότητες που έχουν.

	Σχέση	Αυτοπαθής	Συμμετρική	Αντισυμ/ρική	Μεταβατική
1	$x = y$	+	+	+	+
2	$x < y$	-	-	+	+
3	$x \geq y$	+	-	+	+
4	$\lvert x - y\rvert \leq 1$	+	+	-	-
5	$x - y \in \mathbb{Q}$	+	+	-	+
6	$x - y \notin \mathbb{Q}$	-	+	-	-
7	$x - y = 3$	-	-	+	-
8	$y = x^2$	-	-	+	-

9 Σχέσεις ισοδυναμίας

9.1 Ορισμός. Έστω A ένα σύνολο. Μια διμελής σχέση $R \subseteq A \times A$ λέγεται ***σχέση ισοδυναμίας*** αν είναι
(1) *ανακλαστική* ή *αυτοπαθής*, δηλ. xRx, για κάθε $x \in A$.
(2) *συμμετρική*, δηλ. ισχύει η συνεπαγωγή $xRy \Rightarrow yRx$.
(3) *μεταβατική*, δηλ. ισχύει η συνεπαγωγή $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Στον πίνακα που προηγήθηκε ισοδυναμίες είναι οι σχέσεις 1 και 5.

Υπενθυμίζουμε και μερικά παραδείγματα σχέσεων ισοδυναμίας από την ευκλείδια γεωμετρία:

(α) Στο σύνολο των ευθειών ενός επιπέδου, η σχέση παραλληλίας.

(2) Στο σύνολο των τριγώνων ενός επιπέδου, η σχέση της ομοιότητας.

(3) Στο σύνολο των κύκλων ενός επιπέδου η σχέση του να είναι δύο κύκλοι ομόκεντροι.

9.2 Ορισμός. Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο X και $x \in X$. Ονομάζουμε ***κλάση ισοδυναμίας*** του x (ως προς την R) το σύνολο

$$[x] = \{y \in X : yRx\}.$$

9.3 Λήμμα. *Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο X και $x, y \in X$. Τότε*

$$xRy \Leftrightarrow [x] = [y].$$

Απόδειξη. Έστω xRy. Για να δείξουμε ότι $[x] = [y]$, θα δείξουμε ότι $[x] \subseteq [y]$ και $[y] \subseteq [x]$. Πράγματι, έστω $w \in [x]$. Τότε wRx. Επειδή xRy και R μεταβατική, παίρνουμε wRy, άρα $w \in [y]$. Ο εγκλεισμός $[y] \subseteq [x]$ αποδεικνύεται ανάλογα.

Αντίστροφα, έστω $[x] = [y]$. Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας της R, $x \in [x] = [y]$, άρα xRy. $\square$

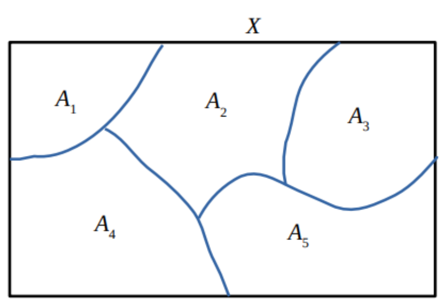
9.4 Ορισμός. Έστω X ένα σύνολο. Μια **διαμέριση** του X είναι ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες

(i) Για κάθε $A \in \mathcal{D}$, $A \neq \emptyset$.

(ii) Αν $A, B \in \mathcal{D}$ με $A \cap B \neq \emptyset$, τότε $A = B$.

(iii) $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{D}} A = X$.

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται μια διαμέριση του συνόλου X σε πέντε υποσύνολά του.



9.5 Θεώρημα. *Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο. Τότε κάθε σχέση ισοδυναμίας στο X ορίζει μια διαμέριση του X και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο X. Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλ.

$$\mathcal{D} = \{[x] : x \in X\}.$$

Τότε το $\mathcal{D}$ είναι διαμέριση του X. Πράγματι,

(i) Για κάθε $[x] \in \mathcal{D}$, $x \in [x]$, άρα $[x] \neq \emptyset$.

(ii) Έστω $[x], [y] \in \mathcal{D}$ με $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Τότε

$$\begin{aligned} [x] \cap [y] \neq \emptyset &\Longrightarrow \exists\, z \in [x] \cap [y] \\ &\Longrightarrow \exists\, z \in X \ : \ xRz \ \wedge \ zRy \\ &\Longrightarrow xRy \end{aligned}$$

Η ισότητα $[x] = [y]$ προκύπτει από το Λήμμα 9.3.

(iii) Αφού $[x] \subseteq X$, για κάθε $[x] \in \mathcal{D}$, έχουμε και για την ένωση τους ότι

$$\bigcup_{[x] \in \mathcal{D}[x]} [x] \subseteq X.$$

Δείχνουμε και τον αντίστροφο εγκλεισμό: Έστω $x_o \in X$. Τότε $x_o \in [x_o]$, άρα $x_o \in \bigcup_{[x] \in \mathcal{D}} [x]$, δηλ.

$$X \subseteq \bigcup_{[x] \in \mathcal{D}} [x].$$

Δείξαμε ότι κάθε σχέση ισοδυναμίας στο X διαμερίζει το X στις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας.

Αντίστροφα, έστω $\mathcal{D}$ μια διαμέριση του X. Ορίζουμε στο X την ακόλουθη διμελή σχέση R:

$$xRy \iff \exists\, A \in \mathcal{D} \ : \ x, y \in A.$$

Η R είναι σχέση ισοδυναμίας:

(i) Έστω $x \in X$. Επειδή $X = \bigcup_{A \in \mathcal{D}} A$, υπάρχει $A \in \mathcal{D}$ με $x \in A$, άρα $x, x \in A$ και xRx, άρα η R είναι ανακλαστική.

(ii) Αν xRy, τοτε υπάρχει $A \in \mathcal{D}$ με $x, y \in A$, άρα και $y, x \in A$, δηλ. yRx και η R είναι συμμετρική.

(iii) Έστω $x, y, z \in X$ με xRy και yRz. Τότε υπάρχουν $A, B \in \mathcal{D}$ με $x, y \in A$ και $y, z \in B$. Επομένως $y \in A \cap B \neq \emptyset$ άρα $A = B$, οπότε $x, z \in A = B$, δηλ. xRz και η R είναι μεταβατική. $\square$

9.6 Ορισμός. Αν R είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο X, ονομάζουμε ***σύνολο-πηλίκο*** και συμβολίζουμε με X/R το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας, δηλ. το σύνολο

$$X/R = \{[x] \mid x \in X\}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο πηλίκο ταυτίζεται με την διαμέριση $\mathcal{D}$ του προηγούμενου θεωρήματος.