ΜΑΘΗΜΑ 10

13 Σύνθεση Απεικονίσεων

13.1 Ορισμός. Έστω $f : A \to B$ και $g : C \to D$ απεικονίσεις με $f(A) \subseteq C$. Τότε ορίζεται η απεικόνιση $g \circ f : A \to D$ με

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \qquad \forall\, x \in A,$$

που ονομάζεται ***σύνθεση*** των f και g.

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης είναι άμεση:

13.2 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$, $g : C \to D$ και $h : E \to F$ απεικονίσεις με $f(A) \subseteq C$ και $g(C) \subseteq E$. Τότε ορίζονται οι συνθέσεις*

$$h \circ (g \circ f) : A \longrightarrow F$$
$$(h \circ g) \circ f : A \longrightarrow F$$

και είναι ίσες. Άρα η σύνθεση απεικονίσεων είναι προσεταιριστική.

13.3 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δύο απεικονίσεις. Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) Αν f και g είναι 1-1, τότε η $g \circ f$ είναι 1-1.
(ii) Αν $g \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.
(iii) Αν f και g είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επί.
(iv) Αν $g \circ f$ είναι επί, τότε η g είναι επί.

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε ότι f και g είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι $g \circ f$ είναι 1-1. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$. Τότε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Επειδή η g είναι 1-1, $f(x_1) = f(x_2)$ και επειδή και η f είναι 1-1, $x_1 = x_2$.

(ii) Υποθέτουμε ότι $g \circ f$ είναι 1-1. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1. Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Εφαρμόζοντας την g στο στοιχείο

$f(x_1) = f(x_2) \in B$ παίρνουμε $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Επειδή η $g \circ f$ είναι 1-1, προκύπτει $x_1 = x_2$.

(iii) Υποθέτουμε ότι f και g είναι επί. Θα δείξουμε ότι η $g \circ f$ είναι επί. Πράγματι, έστω $z \in C$. Επειδή η g είναι επί, υπάρχει $y \in B$ με $g(y) = x$. Επίσης, επειδή η f είναι επί, υπάρχει $x \in A$ με $f(x) = y$. Τότε $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$.

(iv) Τέλος υποθέτουμε ότι η $g \circ f$ είναι επί και δείχνουμε ότι η g είναι επί: Έστω $z \in C$. Επειδή η $g \circ f$ είναι επί, υπάρχει $x \in A$ με $g \circ f(x) = g(f(x)) = z$. Θέτοντας $y = f(x)$, έχουμε το ζητούμενο $y \in B$ με $g(y) = z$. $\square$

13.4 Παρατήρηση. Στο (ii) της προηγούμενης πρότασης μπορεί η g να μην είναι 1-1 και στο (iv) μπορεί η f να μην είναι επί. Πράγματι, η

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : f(x) = (x, 0)$$

είναι 1-1 αλλά δεν είναι επί και η

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : g(x, y) = x$$

είναι επί χωρίς να είναι 1-1. Όμως η σύνθεση

$$g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : (g \circ f)(x) = g(x, 0) = x$$

είναι 1-1 και επί.

Υπενθυμίζουμε ότι μια απεικόνιση $f : A \to B$ είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνον αν η αντίστροφη σχέση f^{-1} είναι επίσης απεικόνιση. Εξειδικεύοντας την ισοδυναμία (13) του Μαθήματος 06, παίρνουμε

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x. \tag{14}$$

Από την άλλη μεριά, για κάθε σύνολο X η διμελής σχέση της ισότητας που αντιστοιχεί στην διαγώνιο $\mathcal{D}_X$ (βλ. Παράδειγμα (1) από τα Παραδείγματα 8.2 του ίδιου Μαθήματος 06), είναι μια απεικόνιση $h : X \to X$ με $h(x) = x$, για κάθε $x \in X$ που την ονομάζουμε ***ταυτοτική απεικόνιση*** του συνόλου X και την συμβολίζουμε με id_X. Παρατηρούμε ότι για κάθε $f : X \to Y$ και κάθε $g : Z \to X$ ισχύει $f \circ id_X = f$ και $id_X \circ g = g$.

Αν η $f : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη και $f^{-1} : B \to A$ η αντίστροφη της, από την σχέση (14) προκύπτει αμέσως ότι

$$f^{-1} \circ f = id_A \quad \text{και} \quad f \circ f^{-1} = B.$$

Όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση, οι δύο προηγούμενες ισότητες είναι χαρακτηριστικές της αντίστροφης απεικόνισης.

13.5 Πρόταση. *Μια απεικόνιση $f : A \to B$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνον αν υπάρχει μια μοναδική $g : B \to A$ με $g \circ f = id_A$ και $f \circ g = id_B$.*

Απόδειξη. (⇒) Αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε υπάρχει η $g = f^{-1}$ και ικανοποιεί τις ανωτέρω ισότητες. Για το μονοσήμαντο: Έστω ότι υπάρχουν $g, h : B \to A$ με

$$g \circ f = id_A, \quad f \circ g = id_B, \quad h \circ f = id_A, \quad f \circ h = id_B.$$

Τότε

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h$$

δηλ. $g = h = f^{-1}$.

(⇐) Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει μια $g : B \to A$ που ικανοποιεί τις δύο ισότητες. Επειδή η ταυτοτικές απεικονίσεις είναι 1-1 και επί, από την $g \circ f = id_A$ προκύπτει ότι η f είναι 1-1 και από την $f \circ g = id_B$ ότι η f είναι επί, άρα η f είναι αμφιμονοσήμαντη. □

13.6 Ορισμός. Λέμε ότι μια απεικόνιση $f : A \to B$ ***έχει αντίστροφη από αριστερά*** αν υπάρχει μια $g : B \to A$ με $g \circ f = id_A$. Μια τέτοια g λέγεται ***αριστερή αντίστροφη*** της f.

Αντίστοιχα, λέμε ότι μια απεικόνιση $f : A \to B$ ***έχει αντίστροφη από δεξιά*** αν υπάρχει μια $h : B \to A$ με $f \circ h = id_B$. Μια τέτοια h λέγεται ***δεξιά αντίστροφη*** της f.

13.7 Πρόταση. *Μια $f : A \to B$ έχει αντίστροφη από αριστερά αν και μόνον αν η f είναι 1-1.*

Απόδειξη. (⇒) Έστω ότι η $g : B \to A$ είναι αριστερή αντίστροφη της f. Τότε $g \circ f = id_A$. Επειδή η id_A είναι 1-1, η f είναι 1-1.

(⇐) Έστω ότι η f είναι 1-1. Σταθεροποιούμε ένα $a_o \in A$ και ορίζουμε $g : B \to A$ ως εξής: αν $y \in f(A)$, υπάρχει ένα μοναδικό $x \in A$ με $f(x) = y$. Τότε θέτουμε $g(y) = x$. Αν $y \notin f(A)$, θέτουμε $g(y) = a_o$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in A$ έχουμε $y = f(x) \in f(A)$, άρα $g \circ f(x) = g(f(x)) = x$, δηλ. $g \circ f = id_A$. □

Σημείωση: Αν η f δεν είναι επί, η απεικόνιση g που κατασκευάζουμε στην προηγούμενη πρόταση *δεν* είναι μονοσήμαντα ορισμένη, αλλά αλλάζει αν επιλεγεί άλλο a_o.

13.8 Παράδειγμα. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R} : f(x) = x^2.$$

Η f είναι 1-1, χωρίς να είναι επί. Άρα έχει (όχι μοναδική) αντίστροφη από αριστερά. Για να βρούμε μια τέτοια αριστερή αντίστροφη, σταθεροποιούμε ένα $x_o \in \mathbb{R}$, έστω $x_o = 0$. Για κάθε $y \in [0, +\infty) = f((-\infty, 0]) \subseteq \mathbb{R}$, υπάρχει ακριβώς ένα $x = -\sqrt{y} \in (-\infty, 0]$ με $f(x) = y$. Θέτουμε $g(y) = -\sqrt{y}$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ με $y \notin f(\mathbb{R})$, δηλ. για κάθε $y \in (-\infty, 0)$, θέτουμε $g(y) = x_o = 0$. Τότε η g είναι αριστερή αντίστροφη της f. Κάθε άλλη επιλογή του x_o μας δίνει μια διαφορετική αριστερή αντίστροφη.

13.9 Πρόταση. *Μια $f : A \to B$ έχει αντίστροφη από δεξιά αν και μόνον αν η f είναι επί.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι η $h : B \to A$ είναι δεξιά αντίστροφη της f. Τότε $f \circ h = id_B$. Επειδή η id_A είναι επί, η f είναι επί.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η f είναι επί. Τότε για κάθε $y \in B$ η αντίστροφη εικόνα $A_y = f^{-1}(\{y\})$ είναι μη κενή. Για κάθε $y \in B$, επιλέγουμε ένα $x_y \in A_y$). Τότε $f(x_y) = y$. Θέτουμε $h : B \to A$ με $h(y) = x_y$, για κάθε $y \in B$, οπότε $f(h(y)) = f(x_y) = y$, δηλ. $f \circ h = id_B$. □

Σημείωση: Αν η f δεν είναι 1-1, η h που κατασκευάζουμε *δεν* είναι μονοσήμαντα ορισμένη, αλλά αλλάζει αν αλλάξουμε την επιλογή των x_y.

13.10 Παράδειγμα. Έστω η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty) : f(x) = x^2.$$

Τώρα η f είναι επί, χωρίς να είναι 1-1. Για κάθε $y \in [0, +\infty)$, είναι $A_y = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$, δηλ. όλα τα A_y είναι δι-σύνολα εκτός του A_0 που είναι μονοσύνολο. Για την κατασκευή της δεξιάς αντίστροφης της f, σε κάθε A_y διαλέγουμε ένα στοιχείο, έστω την θετική ρίζα $\sqrt{y}$, και θέτουμε $g(y) = \sqrt{y}$. Η g είναι δεξιά αντίστροφη της f. Κάθε αυθαίρετη επιλογή ενός στοιχείου σε κάθε A_y δίνει διαφορετικη g. Μπορούμε να πάρουμε, για παράδειγμα, $g(y) = \sqrt{y}$, αν $y \in \mathbb{Q}$, και $g(y) = -\sqrt{y}$, αν $y \notin \mathbb{Q}$.

13.11 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ μια απεικόνιση που έχει αριστερή αντίστροφη g και δεξιά αντίστροφη h. Τότε η f είναι αντιστρέψιμη και $g = h = f^{-1}$.*

Απόδειξη. Από τις προηγούμενες δύο προτάσεις, αφού η f έχει και αριστερή και δεξιά αντίστροφη, είναι 1-1 και επί, δηλ. είναι αμφιμονοσήμαντη, άρα αντιστρέψιμη. Επειδή $g \circ f = id_A$ και $f \circ h = id_B$, παίρνουμε

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h$$

και η ισότητα με την f^{-1} προκύπτει από την Πρόταση 13.5. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας αφορά στην αντιστροφή μιας σύνθετης συνάρτησης.

13.12 Πρόταση. *Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δύο αντιστρέψιμες συναρτήσεις. Τότε η σύνθεση $g \circ f : A \to C$ είναι αντιστρέψιμη και*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Απόδειξη. Κάθε μια από τις f, g είναι 1-1 και επί, άρα και η σύνθεση $g \circ f$ είναι 1-1 και επί (βλ. Πρόταση 13.3 (i),(iii)). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) =& \ f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = \ f^{-1} \circ id_B \circ f \\ =& \ f^{-1} \circ f = id_A\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) =& \ g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g = \ g \circ id_A \circ g^{-1} \\ =& \ g \circ g^{-1} = id_C\end{aligned}$$

και η ζητούμενη ισοτητα προκύπτει από την Πρόταση 13.11. □