# ΜΑΘΗΜΑ 12

## 15 Βασικά Θεωρήματα

Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι γενίκευση μιας απλής παρατήρησης:

– Το κενό σύνολο $\emptyset$ έχει 0 στοιχεία, το δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, έχει $1 = 2^0$ στοιχείο.

– Κάθε μονοσύνολο $A = \{a\}$ έχει 1 στοιχείο, το δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$ έχει $2 = 2^1$ στοιχεία.

–Κάθε δι-σύνολο $B = \{a, b\}$ έχει 2 στοιχεία, το δυναμοσύνολό του $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ έχει $4 = 2^2$ στοιχεία.

**15.1 Πρόταση.** *Αν $X$ είναι πεπερασμένο σύνολο με $n$ στοιχεία, $n \in \mathbb{N}_o$, τότε το δυναμοσύνολό του έχει $2^n$ στοιχεία.*

*Απόδειξη.* Για $n = 0$, ισχύει.

Έστω ότι για κάθε σύνολο $X$ με $n$ στοιχεία, $n \in \mathbb{N}_o$, το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ έχει $2^n$ στοιχεία, και έστω ένα σύνολο $Y$ με $n+1$ στοιχεία. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{P}(Y)$ έχει $2^{n+1}$ στοιχεία. Σταθεροποιούμε ένα $y_o \in Y$ και θεωρούμε τα υποσύνολα $P_1, P_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$ με

$$P_1 = \{A \subseteq Y \mid y_o \in A\},$$
$$P_2 = \{B \subseteq Y \mid y_o \notin B\}.$$

Τότε

$$P_1 \cup P_2 = \mathcal{P}(Y) \quad \wedge \quad P_1 \cap P_2 = \emptyset.$$

Άρα η ισχύς του $\mathcal{P}(Y)$ είναι άθροισμα των ισχύων των συνόλων $P_1$ και $P_2$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$B \in P_2 \iff B \subseteq Y \setminus \{y_o\},$$

δηλ. $P_2 = \mathcal{P}(Y \setminus \{y_o\})$. Το $Y \setminus \{y_o\}$ έχει $n$ στοιχεία, και από την επαγωγική υπόθεση το $P_2$ έχει $2^n$ στοιχεία. Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$f : P_2 \longrightarrow P_1 : f(B) = B \cup \{y_o\}.$$

Η $f$ είναι 1-1 και επί, άρα το $P_1$ έχει επίσης $2^n$ στοιχεία, και η ένωση $P_1 \cup P_2$ έχει $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ στοιχεία. □

Για τα πεπερασμένα σύνολα λοιπόν, αφού $n < 2^n$ (βλ. και την σχετική άσκηση), ισχύει $|X| < |\mathcal{P}(X)|$. Αυτό το αποτέλεσμα γενικεύεται για κάθε σύνολο:

**15.2 Θεώρημα** (Cantor)**.** *Για κάθε σύνολο $X$, ισχύει*

$$|X| < |\mathcal{P}(X)|.$$

*Απόδειξη.* Έστω $X$ ένα τυχαίο σύνολο. Θα δείξουμε ότι $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ και $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Πράγματι: η απεικόνιση

$$\phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(X) : \phi(x) = \{x\}$$

είναι 1-1, άρα $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. Θα δείξουμε τώρα ότι $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$, με άτοπο: έστω ότι ισχύει $|X| = |\mathcal{P}(X)|$, δηλ. υπάρχει $\psi : X \to \mathcal{P}(X)$ 1-1 και επί. Για κάθε $x \in X$ και για την εικόνα του $\psi(x) \in \mathcal{P}(X)$, ισχύει ή $x \in \psi(x)$, ή $x \notin \psi(x)$. Θεωρούμε το σύνολο $B$ των $x \in X$, που *δεν* ανήκουν στην εικόνα τους. Δηλ.

$$B = \{x \in X \mid x \notin \psi(x)\} \subseteq X.$$

Από το επί της $\psi$ έπεται ότι, για το $B \subseteq X$, υπάρχει $x_B \in X$, με $\psi(x_B) = B$. Ισχύει $x_B \in B$ ή $x_B \notin B$;

– Αν $x_B \in B = \psi(x_B)$, τότε το $x_B$ ανήκει στην εικόνα του, άρα $x_B \notin B$, άτοπο.

– Αν $x_B \notin B = \psi(x_B)$, τότε το $x_B$ δεν ανήκει στην εικόνα του, άρα $x_B \in B$, άτοπο.

Άρα η $\psi$ δεν μπορεί να είναι επί, και $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. □

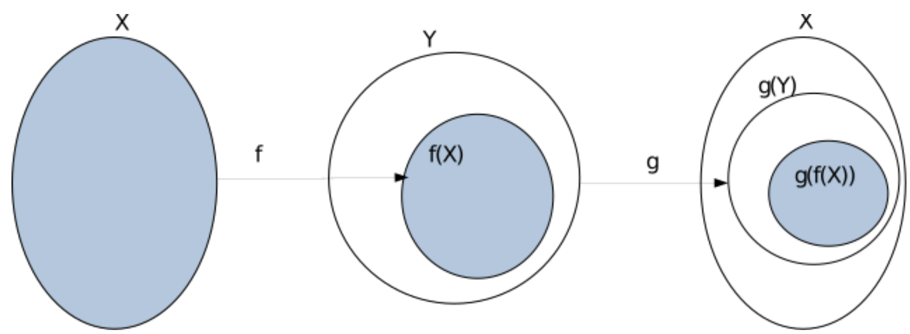
Θα συζητήσουμε τώρα ένα ερώτημα που εμφανίστηκε στο προηγούμενο μάθημα. Είναι η σχέση $\leq_c$ αντισυμμετρική; Η απάντηση είναι όχι: Αν έχουμε δύο πεπρασμένα σύνολα, π.χ. τα $A = \{a, b, c\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$, για αυτά τα σύνολα ισχύει $|A| \leq |B|$ και $|B| \leq |A|$, αλλά δεν ισχύει $A = B$.

Άρα δεν ισχύει η αντισυμμετρική ιδιότητα όπως την ξέρουμε σε μια σχέση ισοδυναμίας. Ισχύει όμως κάτι ασθενέστερο: $|A| = |B|$.

Οπότε λογιά προκύπτει η ερώτηση: Μήπως ισχύει η συνεπαγωγή

$$|X| \leq |Y| \ \wedge \ |Y| \leq |X| \stackrel{?}{\Longrightarrow} |X| = |Y|$$

Αναλύοντας τις υποθέσεις της προηγούμενης συνεπαγωγής, βλέπουμε ότι αυτές ισοδυναμούν με την ύπαρξη δύο αμφιμονοσήμαντων απεικονίσεων, των $f : X \to f(X)$ και $g|_{f(X)} : f(X) \to g(f(X))$. Στο επόμενο διάγραμμα φαίνονται χρωματισμένα τα ισοπληθικά σύνολα που προκύπτουν:




Παρατηρώντας το τελευταιο διάγραμμα, βλέπουμε ότι το ερώτημα μας συνοψίζεται ως εξής: Αν δίνονται τρία σύνολα $A$ (στο διάγραμμα το $X$), $B$ (στο διάγραμμα το $g(Y)$) και $C$ (στο διάγραμμα το $g(f(X))$ με $C \subseteq B \subseteq A$ και $|A| = |C|$, ισχύει αναγκαστικά ότι και $|B| = |A| = |C|$;

Έχουμε το επόμενο

**15.3 Λήμμα.** *Έστω $A_o,\ B_o,\ A_1$ σύνολα με $A_1 \subseteq B_o \subseteq A_o$ και $|A_o| = |A_1|$. Τότε $|A_o| = |B_o| = |A_1|$.*

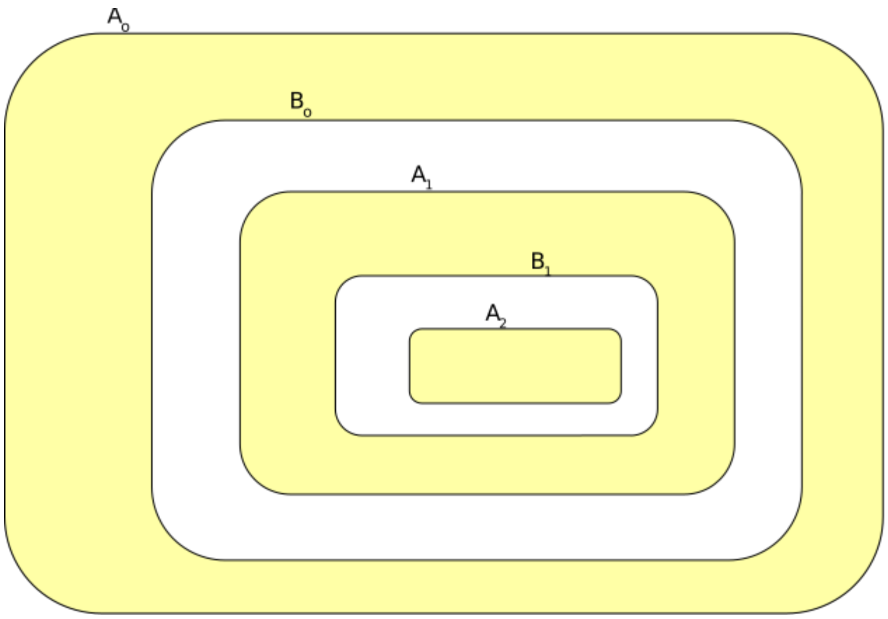
*Απόδειξη.* Από την υπόθεση, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : A_o \to A_1$. Αναζητούμε μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $g : A_o \to B_o$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$ θέτουμε

$$A_{n+1} = f(A_n) \quad \wedge \quad B_{n+1} = f(B_n).$$

Από την αρχική ανισότητα $A_1 \subseteq B_o \subseteq A_o$ παίρνουμε $f(A_1) \subseteq f(B_o) \subseteq f(A_o)$, δηλ. $A_2 \subseteq B_1 \subseteq A_1$ και επαναλαμβάντας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε δύο φθίνουσες ακολουθίες συνόλων $(A_n)$ και $(B_n)$, με

$$A_o \supseteq B_o \supseteq A_1 \supseteq B_1 \supseteq A_2 \supseteq B_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq B_n \supseteq A_{n+1} \supseteq B_{n+1} \ldots$$

όπως φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα:




Έτσι το σύνολο $A_o$ χωρίζεται σε δύο οικογένειες ξένων ανά δύο υποσυνόλων του: τα υποσύνολα της μορφής $A_n \setminus B_n$ (κίτρινα στο διάγραμμα) και εκείνα της μορφής $B_n \setminus A_{n+1}$ (χωρίς χρώμα στο διάγραμμα).

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$, ισχύει η ισοδυναμία

$$x \in A_n \setminus B_n \iff f(x) \in A_{n+1} \setminus B_{n+1}.$$

Πράγματι: αν $x \in A_n \setminus B_n$, τότε $x \in A_n$, άρα $f(x) \in f(A_n) = A_{n+1}$. Συγχρόνως, $x \notin B_n$. Αν υποθέσουμε ότι $f(x) \in f(B_n)$, τότε υπάρχει $z \in B_n$ με $f(z) = f(x) \in f(B_n)$. Λόγω του 1-1 της $f$, $x = z \in B_n$, άτοπο. Άρα $f(x) \notin f(B_n) = B_{n+1}$ και τελικά $f(x) \in A_{n+1} \setminus B_{n+1}$.

Αντίστοφα, έστω $x \in A_o$ με $f(x) \in A_{n+1} \setminus B_{n+1} = f(A_n) \setminus f(B_n)$. Όπως προηγουμένως, από την σχέση $f(x) \in f(A_n)$ και το 1-1 της $f$, προκύπτει $x \in A_n$. Και από την $f(x) \notin f(B_n)$, προφανώς προκύπτει $x \notin B_n$, άρα $x \in A_n \setminus B_n$.

Τώρα θέτουμε

$$g : A_o \longrightarrow B_o : g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_n \setminus B_n, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \\ x, & x \in B_n \setminus A_{n+1}, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(δηλ. όποιο $x$ είναι μέσα σε κίτρινη ζώνη το στέλνουμε στην επόμενη κίτρινη ζώνη, ενώ όποιο $x$ είναι σε άσπρη ζώνη το αφήνουμε στην θέση του). Ισχυριζόμαστε ότι η $g$ είναι 1-1 και επί.

Για το 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in A_o$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(1) Αν $x_1, x_2 \in \cup_{n\in\mathbb{N}_o}(A_n \setminus B_n)$. Από τον ορισμό της $g$,

$$f(x_1) = g(x_1) = g(x_2) = f(x_2)$$

και από το 1-1 της $f$, $x_1 = x_2$.

(2) Αν $x_1, x_2 \in \cup_{n\in\mathbb{N}}(B_n \setminus A_n)$. Τότε $x_1 = g(x_1) = g(x_2) = x_2$.

(3) Αν $x_1 \in \cup_{n\in\mathbb{N}_o}(A_n \setminus B_n)$ και $x_2 \in \cup_{n\in\mathbb{N}_o}(B_n \setminus A_{n+1})$. Τότε $g(x_1) = f(x_1) \in \cup_{n\in\mathbb{N}_o}(A_n \setminus B_n)$,ενώ $g(x_2) = x_2 \in \cup_{n\in\mathbb{N}_o}(B_n \setminus A_{n+1})$, και τα σύνολα $\cup_{n\in\mathbb{N}_o}(A_n \setminus B_n)$ και $\cup_{n\in\mathbb{N}_o}(B_n \setminus A_{n+1})$ είναι ξένα, άτοπο. Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορεί να ισχύει η ισότητα $g(x_1) = g(x_2)$.

Για το επί: έστω $y \in B_o$. Τότε

$$y \in B_o \cap (\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \setminus B_n)) \qquad \text{ή} \qquad y \notin B_o \cup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \setminus B_n).$$

Στην πρώτη περίπτωση, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ με $y \in A_m \setminus B_m = f(A_{m-1}) \setminus f(B_{m-1})$, άρα υπάρχει $x \in A_{m-1} \setminus B_{m-1}$ με $g(x) = f(x) = y$. Στην δεύτερη περίπτωση, $y = g(y)$. Άρα σε κάθε περίπτωση το $y$ ανήκει στην εικόνα της $g$. □

Άμεσο αποτέλεσμα του προηγούμενου λήμματος είναι το σημαντικό και περιώνυμο θεώρημα:

**15.4 Θεώρημα** (Schröder-Bernstein). *Έστω $X$, $Y$ σύνολα. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν 1-1 απεικονίσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to X$. Τότε $|X| = |Y|$.* □

# 16 Η Ισχύς των Αριθμοσυνόλων

Το $\mathbb{N}$ είναι εξ ορισμού άπειρο αριθμήσιμο. Από το Παράδειγμα 14.3(1), γνωρίζουμε ότι και το ίδιο είναι και το $\mathbb{N}_o$.

**16.1 Πρόταση.** *Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων είναι άπειρο αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.* Η απεικόνιση

$$f : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} k, & n = 2k \\ -k, & n = 2k-1 \end{cases}$$

είναι 1-1 και επί. Άρα $\mathbb{Z} =_c \mathbb{N}_o =_c \mathbb{N}$. □

Θα δείξουμε τώρα ότι και το $\mathbb{Q}$ είναι άπειρο αριθμήσιμο. Πρώτα χρειαζόμαστε το επόμενο

**16.2 Λήμμα.** *Το καρτεσιανό γινόμενο* $\mathbb{N}_o \times \mathbb{N}$ *είναι άπειρο αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η απεικόνιση

$$g : \mathbb{N}_o \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : g(m,n) = 2^m(2n-1)$$

είναι 1-1 και επί. □

**16.3 Πρόταση.** *Το σύνολο των ρητών*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{n} \mid a \in \mathbb{Z}, \ \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

*είναι άπειρο αριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την σύνθεση των απεικονίσεων

$$\mathbb{N} \xrightarrow{g^{-1}} \mathbb{N}_o \times \mathbb{N} \xrightarrow{f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}} \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Q},$$

όπου $g$ η απεικόνιση του Λήμματος 15.2, $f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ η απεικόνιση

$$f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}_o \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N} : (f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}})(m,n) = (f(m), n),$$

όπου $f$ η απεικόνιση της Πρότασης 15.1, και

$$\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} : \phi(a,n) = \frac{a}{n}.$$

Οι $g^{-1}$ και $f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ είναι 1-1 και επί. Η $\phi$ είναι επί. Άρα η σύνθεση

$$\phi \circ (f \times \mathrm{id}_{\mathbb{N}}) \circ g^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

είναι επί, και $\mathbb{Q}$ είναι (άπειρο) αρθμήσιμο. □

**16.4 Λήμμα.** *Το διάστημα* $[0,1]$ *είναι υπεραριθμήσιμο.*

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ υπάρχει "δεκαδική παράσταση", δηλ. υπάρχει μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, με

$$a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και
$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$
Κάποια $x$ έχουν δύο δεκαδικές παραστάσεις, με την ακολουθία των ψηφίων να είναι τελικά σταθερή και ίση με 0 ή με 9. Όλοι οι άλλοι έχουν μία δεκαδική παράσταση.

Υποθέτουμε ότι το διάστημα $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο σύνολο και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την υπόθεση μας, υπάρχει απεικόνιση $\phi : \mathbb{N} \to [0, 1]$, που είναι *επί*. Επομένως το σημειοσύνολο $[0, 1]$ γράφεται

$$[0, 1] = \{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n), \dots\}.$$

Γράφουμε λοιπόν κάθε $x = \phi(n) \in [0, 1]$ με δεκαδική μορφή:

$$\begin{aligned}
\phi(1) &= 0, a_1^1 a_2^1 a_3^1 \dots a_n^1 \dots \\
\phi(2) &= 0, a_1^2 a_2^2 a_3^2 \dots a_n^2 \dots \\
\phi(3) &= 0, a_1^3 a_2^3 a_3^3 \dots a_n^3 \dots \\
&\vdots \\
\phi(n) &= 0, a_1^n a_2^n a_3^n \dots a_n^n \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Κάθε αριθμός $x \in [0, 1]$ εμφανίζεται μέσα στον ανωτέρω πίνακα (τουλάχιστον) μία φορά. Επιλέγουμε τώρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ένα ψηφίο

$$\xi_k \in \{1, 2 \dots, 7, 8\} \setminus \{a_k^k\}$$

και θεωρούμε το αντίστοιχο

$$\xi = 0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \dots \xi_n \dots \in [0, 1].$$

Ο αριθμός $\xi$ που κατασκευάσαμε έτσι έχει μοναδική δεκαδική παράσταση (αφού δεν περιέχει στα ψηφία του κανένα 0 ή 9) και δεν βρίσκεται μέσα στα στοιχεία του πίνακα, αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\xi_n \neq a_n^n$ και άρα $\xi \neq \phi(n)$. Όμως $\xi \in (0, 1)$ που αποδεικνύει ότι η $\phi$ δεν είναι επί, άτοπο. □

Άμεσο συμπέρασμα είναι η επόμενη

**16.5 Πρόταση.** *Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο.* □

* Σύμφωνα με το τελευταίο μας αποτέλεσμα, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα του Cantor, $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$. Γεννώνται δύο ερωτήματα:

(1) Ποιό από τα δύο σύνολα $\mathbb{R}$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι μεγαλύτερο;

(2) Υπάρχει κάποιο σύνολο $X$ με $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ και $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$;

Οι απαντήσεις στα ανωτέρω ερωτήματα εξαρτώνται από το αξιωματικό σύστημα που δεχόμαστε. Στο σύστημα που συνήθως χρησιμοποιούμε (1) $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, και (2) δεν υπάρχει τέτοιο $X$, άρα δεν υπάρχει « ενδιάμεση » ισχύς μεταξύ των $|\mathbb{N}|$ και $|\mathbb{R}|$. *