ΜΑΘΗΜΑ 14

18 Πολλαπλασιασμός

Για τον ορισμό του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{N}_o$, σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{N}_o$ και θεωρούμε $X = \mathbb{N}_o$, $f = \phi_m$ και $c = 0$. Τότε, από το Θεώρημα της Αναδρομής, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση

$$\psi_m : \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathbb{N}_o$$

με τις ιδιότητες:
(i) $\psi_m(0) = 0$, και
(ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$, $\psi_m(\varepsilon(n)) = \phi_m(\psi_m(n))$.
Συμβολίζουμε με $m \cdot n$ ή απλούστερα mn την εικόνα $\psi_m(n)$, δηλ.

$$m \cdot n = mn = \psi_m(n)$$

Όπως κάναμε για την ϕ_m, υπολογίζουμε και την ψ_m, για μερικά $m \in \mathbb{N}$.
(1) Για $m = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\psi_0(0) = 0\\
&\psi_0(1) = \psi_0(\varepsilon(0)) = \phi_0(\psi_0(0)) = \phi_0(0) = 0\\
&\psi_0(2) = \psi_0(\varepsilon(1)) = \phi_0(\psi_0(1)) = \phi_0(0) = 0
\end{aligned}$$

και επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$\psi_0(n) = 0 \cdot n = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_o.$$

(2) Για $m = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(0) = 0\\
&\psi_1(1) = \psi_1(\varepsilon(0)) = \phi_1(\psi_1(0)) = \phi_1(0) = 1\\
&\psi_1(2) = \psi_1(\varepsilon(1)) = \phi_1(\psi_1(1)) = \phi_1(1) = 2\\
&\psi_1(3) = \psi_1(\varepsilon(2)) = \phi_1(\psi_1(2)) = \phi_1(2) = 3
\end{aligned}$$

και επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$\psi_1(n) = 1 \cdot n = n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_o.$$

(3) Για $m = 2$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\psi_2(0) = 0\\
&\psi_2(1) = \psi_2(\varepsilon(0)) = \phi_2(\psi_2(0)) = \phi_2(0) = 2\\
&\psi_2(2) = \psi_2(\varepsilon(1)) = \phi_2(\psi_2(1)) = \phi_2(2) = 2 + 2\\
&\psi_2(3) = \psi_2(\varepsilon(2)) = \phi_2(\psi_2(2)) = \phi_2(2 + 2) = 2 + (2 + 2)
\end{aligned}$$

και επαγωγικά επαληθεύεται ότι

$$\psi_2(n) = 2 \cdot n = \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n\text{-φορές}}.$$

(4) Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύεται ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\psi_m(n) = m \cdot n = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\text{-φορές}}.$$

Ο πολλαπλασιασμός συνδέεται ισχυρά με την πρόσθεση, αφού ορίζεται μέσω αυτής. Η συσχέτισή τους φαίνεται στην επόμενη

18.1 Πρόταση. *Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση, δηλ.*

$$m(n + p) = mn + mp, \quad \forall\, m, n, p \in \mathbb{N}_o.$$

Απόδειξη. Παρόμοια με τις προηγούμενες αποδείξεις, σταθεροποιούμε δύο φυσικούς $m, n \in \mathbb{N}_o$, και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{p \in \mathbb{N}_o \mid m(n + p) = mn + mp\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$m(n+0) = mn = mn + 0 = mn + m0,$$

άρα $0 \in S$. Έστω τώρα $p \in S$, δηλ. έστω ότι $m(n+p) = mn+mp$. Τότε, εφαρμόζοντας κατά σειρά τους ορισμούς των ϕ_n και ψ_m, την επαγωγική υπόθεση, την μεταθετικότητα και προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned} m(n+\varepsilon(p)) &= \psi_m(\phi_n(\varepsilon(p)) = \psi_m(\varepsilon(\phi_n(p))) = \phi_m(\psi_m(\phi_n(p)) \\ &= m + (m(n+p)) = m + (mn + mp) \\ &= mn + (mp + m) = mn + \phi_m(mp) \\ &= mn + \phi_m(\psi_m(p)) = mn + \psi_m(\varepsilon(p)) \\ &= mn + m(\varepsilon(p)) \end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός και προσεταιριστικός.

18.2 Πρόταση. *Για κάθε $m, n, p \in \mathbb{N}_o$ ισχύουν οι ισότητες:*

(1) $$mn = nm,$$

(2) $$m(np) = (mn)p.$$

Απόδειξη. Όπως φαίνεται από τους υπολογισμούς μας για τις ψ_0 και ψ_1, και από τον ορισμό της ψ_m, για κάθε $m \in \mathbb{N}_o$, ισχύουν οι ισότητες

(3) $$0m = m0 = 0,$$

(4) $$1m = m1 = m.$$

Αποδεικνύουμε πρώτα την προσεταιριστικότητα: Σταθεροποιούμε $m, n \in \mathbb{N}_o$, και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{p \in \mathbb{N}_o \mid m(np) = (mn)p\}.$$

Δείχνουμε επαγωγικά ότι $S = \mathbb{N}_o$. Ήδη γνωρίζουμε ότι για $p = 0$

$$m(n0) = m0 = 0 = (mn)0,$$

άρα $0 \in S$. Έστω $p \in S$, δηλ. έστω $m(np) = (mn)p$. Θα δείξουμε ότι $m(n\varepsilon(p)) = (mn)\varepsilon(p)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(mn)\varepsilon(p) &= \psi_{mn}(\varepsilon(p)) = \phi_{mn}(\psi_{mn}(p)) = \psi_{mn}(p) + mn \\ &= (mn)p + mn = m(np) + mn = m(np+n) \\ &= m(np + n1) = m(n(p+1)) \\ &= m(n\varepsilon(p))\end{aligned}$$

επομένως $\varepsilon(p) \in S$, άρα $S = \mathbb{N}_o$, κι επειδή τα m, n είναι τυχαία, η ισότητα ισχύει για κάθε $m, n, p \in \mathbb{N}_o$.

Αποδεικνύουμε τώρα την μεταθετικότητα: Σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{N}_o$, και θεωρούμε το σύνολο

$$T = \{n \in \mathbb{N}_o \mid mn = nm\}.$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι $T = \mathbb{N}_o$. Επειδή $m0 = 0m$, ισχύει ότι $0 \in T$. Έστω $n \in T$, δηλ. έστω $mn = nm$. Θα δείξουμε ότι $m\varepsilon(n) = \varepsilon(n)m$. Πράγματι, εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα, την επαγωγική υπόθεση και πάλι την επιμεριστική ιδιότητα, παίρνουμε

$$\begin{aligned}m\varepsilon(n) &= m(n+1) = mn + m = nm + m \\ &= nm + 1m = (n+1)m \\ &= \varepsilon(n)m\end{aligned}$$

που αποδεικνύει ότι $\varepsilon(n) \in \mathbb{N}_o$ και $T = \mathbb{N}_o$. □

Όπως λοιπόν η πρόσθεση, έτσι και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{N}_o$ είναι μεταθετικός και προσεταιριστικός και έχει ουδέτερο στοιχείο, το 1. Και πάλι, όπως στην πρόσθεση, κανένα στοιχείο εκτός του ουδέτερου δεν έχει αντίστροφο. Ισχύει όμως ο "Νόμος της Διαγραφής", αλλά για τα μη-μηδενικά στοιχεία. Για να τον δείξουμε χρειαζόμαστε πρώτα το επόμενο

18.3 Λήμμα. *Για κάθε ζεύγος φυσικών $m, n \neq 0$, ισχύει $mn \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ με $mn = 0$. Αφού $m, n \in \mathbb{N}_o \setminus \{0\} = \varepsilon(\mathbb{N}_o)$, υπάρχουν $m', n' \in \mathbb{N}_o$ με $m = \varepsilon(m')$ κι $n = \varepsilon(n')$. Τότε

$$\begin{aligned}0 = mn &= (m'+1)(n'+1) = m'n' + m' + n' + 1 \\ &= \varepsilon(m'n' + m'n + mn') \in \varepsilon(\mathbb{N}_o) = \mathbb{N},\end{aligned}$$

άτοπο. □

Αποτέλεσμα του προηγούμενου λήμματος είναι η συνεπαγωγή

$$n \in \mathbb{N}_o \ \wedge \ q \in \mathbb{N} \ \wedge \ nq = 0 \implies n = 0.$$

18.4 Πρόταση. *Για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_o$ και $q \in \mathbb{N}$, ισχύει η συνεπαγωγή*

$$mq = nq \implies m = n. \tag{5}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό με επαγωγή *ως προς* m. Θεωρούμε το σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}_o$ όλων των $m \in \mathbb{N}_o$ για τα οποία ισχύει η (5). Θέτοντας $m = 0$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$ και $q \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$0q = nq \implies 0 = nq \implies n = 0,$$

άρα $0 \in S$. Έστω τώρα ότι $m \in S$. Θα δείξουμε ότι $\varepsilon(m) \in S$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}_o$ και $q \in \mathbb{N}$ με $\varepsilon(m)q = nq$. Τότε $\varepsilon(m), q \neq 0$, άρα $nq = \varepsilon(m)q \neq 0$, επομένως $n \neq 0$. Δηλ. $n \in \mathbb{N} = \varepsilon(\mathbb{N}_o)$ και υπάρχει $n' \in \mathbb{N}_o$ με $n = n' + 1$. Η υπόθεση $\varepsilon(m)q = nq$ μας δίνει

$$\begin{aligned} \varepsilon(m)q = nq &\implies (m+1)q = (n'+1)q \\ &\implies mq + q = n'q + q \\ &\implies mq = n'q \\ &\implies m = n' \\ &\implies \varepsilon(m) = \varepsilon(n') \\ &\implies \varepsilon(m) = n \end{aligned}$$

όπου έχουμε εφαρμόσει την επιμεριστικότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, την απαλειφή του q στην πρόσθεση και την επαγωγική υπόθεση. Άρα $\varepsilon(m) \in S$ και $S = \mathbb{N}_0$. □

19 Διάταξη

Η τελευταία δομή που ορίζουμε πάνω στο $\mathbb{N}_o$ είναι μια σχέση διάταξης. Έστω $m, n \in \mathbb{N}_o$. Θέτουμε

$$m \leq n \iff \exists\, q \in \mathbb{N}_o \ : \ m + q = n.$$

Η ανωτέρω σχέση είναι πράγματι διάταξη:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}_o$, υπάρχει $q = 0 \in \mathbb{N}_o$ με $n + 0 = n$, άρα η σχέση είναι ανακλαστική.

Αν $m \leq n$ και $n \leq m$, Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}_o$ με $m + p = n$ και $n + q = m$. Συνδυάζοντας τις δύο ισότητες παίρνουμε $m = n + q = m + p + q$ που με απαλειφή του m μας δίνει $p + q = 0$. Ισχυριζόμαστε ότι η τελευταία ισότητα ισχύει μόνον αν $p = q = 0$. Πράγματι, αν $q \neq 0$, τότε υπάρχει $q' \in \mathbb{N}_o$ με $q = q' + 1$, άρα $0 = p + q = \phi_p(\varepsilon(q')) = \varepsilon(\phi_p(q'))$, δηλ. $0 \in \varepsilon(\mathbb{N}_o)$, άτοπο. Άρα $p = q = 0$ και $m = n$. Αν $p \neq 0$, το αποτέλεσμα ισχύει, λόγω της μεταθετικότητας της πρόσθεσης. Επομένως, η σχέση που ορίσαμε είναι αντισυμμετρική.

Επίσης είναι και μεταβατική: Έστω $k \leq m$ και $m \leq n$. Τότε υπάρχουν $p, q \in \mathbb{N}_o$ με $k + p = m$ και $m + q = n$. Προσθέτοντας τις ισότητες κατά μέλη έχουμε $k + p + m + q = m + n$. Απαλείφοντας το m έχουμε $k + (p + q) = n$, οπότε $k \leq n$ και η σχέση είναι μεταβατική.

Συμπεραίνουμε ότι η $\leq$ είναι σχέση διάταξης. Συμβολίζουμε με $<$ την αντίστοιχη αυστηρή διάταξη. Θα δείξουμε ότι η διάταξη των φυσικών είναι ολική. Θα χρειαστούμε το επόμενο

19.1 Λήμμα. *Για $m, n \in \mathbb{N}_o$, ισχύει η συνεπαγωγή*

$$m < n \implies m + 1 \leq n.$$

Απόδειξη. Η υπόθεση $m < n$ σημαίνει ότι $m \leq n$, άρα υπάρχει $q \in \mathbb{N}_o$ με $m + q = n$, αλλά $m \neq n$, δηλ. $q \neq 0$. Άρα το q είναι στοιχείο της εικόνας $\varepsilon(\mathbb{N}_o) = \mathbb{N}$, δηλ. υπάρχει $q' \in \mathbb{N}_o$ με $q = q' + 1$. Τότε

$$m + q' + 1 = n \implies (m + 1) + q' = n \implies m + 1 \leq n. \qquad \square$$

19.2 Πρόταση. *Η διάταξη των φυσικών είναι ολική.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_o$ ισχύει είτε $m \leq n$ είτε $n \leq m$. Σταθεροποιούμε ένα $m \in \mathbb{N}_o$ και θεωρούμε το σύνολο S των φυσικών n που σχετίζονται με το m μέσω της $\leq$, δηλ. εκείνων των $n \in \mathbb{N}_o$ για τους οποίους ισχύει $m \leq n$ είτε $n \leq m$.

Παρατηρούμε ότι $0 + m = m$, άρα $0 \leq m$ και $0 \in S$.

Θεωρούμε τώρα $n \in S$ και θα δείξουμε ότι και $\varepsilon(n) \in S$. Από την υπόθεση $n \in S$ προκύπτει είτε ότι $m \leq n$ είτε ότι $n \leq m$. Αν $m \leq n$, επειδή και $n \leq n + 1$, η ζητούμενη σχέση $m \leq n + 1$ προκύπτει από την μεταβατική ιδιότητα της διάταξης. Έστω $n \leq m$. Τότε ή $n = m$ ή ισχύει η αυστηρή διάταξη $n < m$. Στην πρώτη περίπτωση

$$m = n \implies m \leq m + 1 = n + 1 = \varepsilon(n) \implies \varepsilon(n) \in S.$$

Στην δεύτερη περίπτωση που $n < m$, από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε $\varepsilon(n) = n + 1 \leq m$ και επομένως $\varepsilon(n) \in S$, που αποδεικνύει ότι $S = \mathbb{N}_o$. $\square$

Η ανωτέρω διάταξη των φυσικών αριθμών είναι *συμβατή με τις πράξεις* των φυσικών, όπως φαίνεται από την επόμενη

19.3 Πρόταση. *(i) Η διάταξη των φυσικών είναι συμβατή με την πρόσθεση, δηλ. για κάθε $m, n, q \in \mathbb{N}_o$ ισχύει*

$$m \leq n \iff m + q \leq n + q$$

(ii) Η διάταξη είναι συμβατή με τον πολλαπλασιασμό, δηλ. για κάθε $m, n, q \in \mathbb{N}_o$ ισχύει

$$m \leq n \implies mq \leq nq.$$

Η συνεπαγωγή (ii) είναι ισοδυναμία, αν και μόνον αν $q \neq 0$.

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} m \leq n &\iff \exists\, p \in \mathbb{N}_o \;:\; m + p = n \\ &\iff \exists\, p \in \mathbb{N}_o \;:\; m + p + q = n + q \\ &\iff m + q \leq n + q \end{aligned}$$

(ii) Εδώ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} m \leq n &\implies \exists\, p \in \mathbb{N}_o \;:\; m + p = n \\ &\implies \exists\, p \in \mathbb{N}_o \;:\; (m + p)q = nq \\ &\implies \exists\, pq \in \mathbb{N}_o \;:\; mq + pq = nq \\ &\implies mq \leq nq \end{aligned}$$

Σχετικά με το αντίστροφο, αυτό δεν ισχύει αν $q = 0$, αφού για κάθε $m, n \in \mathbb{N}_o$ είναι $m0 = n0 = 0$. Αν όμως $q \neq 0$, τότε ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή

$$mq \leq nq \implies m \leq n.$$

Πράγματι, έστω $m, n \in \mathbb{N}_o$ και $q \in \mathbb{N}$ με $mq \leq nq$. Θα δείξουμε ότι $m \leq n$. Επειδή η διάταξη των φυσικών είναι ολική, για τα m, n ισχύει είτε $m \leq n$ είτε $n \leq m$. Αν ισχύει η $m \leq n$, έχουμε το ζητούμενο. Αν ισχύει $n \leq m$, από την (ii) που αποδείξαμε, έπεται ότι $nq \leq mq$ και σε συνδυασμό με την υπόθεση, λόγω της αντισυμμετρικότητας, $mq = nq$. Επειδή $q \neq 0$, απαλείφοντάς το στην τελευταία ισότητα, παίρνουμε $m = n$, δηλ. πάλι $m \leq n$. $\square$