ΔΙΑΤΑΞΗ

0.1 Ορισμός. Εστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια σχέση $R \subseteq X \times X$ λέγεται **διάταξη**, αν είναι

(Δ1) **ανακλαστική**, δηλ. $\forall\ x \in X\ :\ xRx$,

(Δ2) **αντισυμμετρική**, δηλ. $xRy\ \wedge\ yRx\ \Rightarrow\ x = y$, και

(Δ3) **μεταβατική**, δηλ. $xRy\ \wedge\ yRz\ \Rightarrow\ xRz$.

0.2 Παραδείγματα. (1) Η σχέση $x \leq y$ στο $\mathbb{R}$.

(2) Η σχέση $A \subseteq B$ στο $\mathcal{P}(X)$.

(3) Η σχέση $a|b$ στο $\mathbb{N}$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα (1), παρατηρούμε ότι για κάθε ζεύγος αριθμών $x, y \in \mathbb{R}$, ισχύει $x \leq y$ είτε $y \leq x$. Τα επόμενα δύο παραδείγματα δεν έχουν αυτή την ιδιότητα. Πράγματι, στο (2), αν το σύνολο X έχει δύο ή περισσότερα στοιχεία, τότε υπάρχουν $a, b \in X$ με $a \neq b$. Σε αυτή την περίπτωση είναι $\{a\}, \{b\} \in \mathcal{P}(X)$, αλλά δεν ισχύει ούτε $\{a\} \subseteq \{b\}$ ούτε $\{b\} \subseteq \{a\}$. Στο (3), έχουμε $5 \in \mathbb{N}$ και $6 \in \mathbb{N}$ αλλά δεν ισχύει ούτε $5|6$, ούτε $6|5$.

0.3 Ορισμός. Μια διάταξη R στο σύνολο $X \neq \emptyset$ λέγεται **ολική** αν

(ΟΔ) $\quad \forall\ x, y \in X\ :\ xRy\ \vee\ yRx$.

Συμφωνα με τον ορισμό της διάταξης, οι σχέσεις $<$ στο $\mathbb{R}$ και $\subsetneq$ στο $\mathcal{P}(X)$ **δεν** είναι διατάξεις: δεν είναι ανακλαστικές. Επίσης, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η υπόθεση στην αντισυμμετρική ιδιότητα δεν ικανοποιείται ποτέ. Για να περιλάβουμε στην μελέτη μας σχέσεις όπως αυτές, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

0.4 Ορισμός. Εστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Μια σχέση $S \subseteq X \times X$ λέγεται **αυστηρή διάταξη**, αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(ΑΔ1) $\forall\ x \in X\ :\ (x, x) \notin S$.

(ΑΔ2) $(x, y) \in S\ \Rightarrow\ (y, x) \notin S$.

(ΑΔ3) $xSy\ \wedge\ ySz\ \Rightarrow\ xSz$ (μεταβατικότητα).

Συμβολίζουμε με Δ_X την **διαγώνιο** του X, δηλ. το σύνολο

$$\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}.$$

Τότε για μια διάταξη R ισχύει πάντοτε $\Delta_X \subseteq R$, ενώ για μια αυστηρή διάταξη S ισχύει $S \cap \Delta_X = \emptyset$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στην επόμενη πρόταση:

0.5 Πρόταση. *Εστω ένα σύνολο $X \neq \emptyset$. Τότε:*

(i) Κάθε διάταξη $R \subseteq X \times X$ ορίζει μια αυστηρή διάταξη, την $S = R \setminus \Delta_X$.

(ii) Κάθε αυστηρή διάταξη $S \subseteq X \times X$ ορίζει μια διάταξη, την $R = S \cup \Delta_X$.

Απόδειξη. (i) Εστω R μια διάταξη στο X. Ορίζουμε την σχέση $S = R \setminus \Delta_X$, δηλ.

$$xSy \;\Leftrightarrow\; (x,y) \in R \setminus \Delta_X \;\Leftrightarrow\; xRy \;\wedge\; x \neq y.$$

Θα δείξουμε ότι η S είναι αυστηρή διάταξη. Πράγματι:

(ΑΔ1) Για κάθε $x \in X$ έχουμε $(x,x) \in \Delta_X$, άρα $(x,x) \notin R \setminus \Delta_X = S$.

(ΑΔ2) Με άτοπο: Εστω xSy και ySx. Τότε (xRy και $x \neq y$) και (yRx και $y \neq x$). Δηλ. xRy και yRx και $x \neq y$. Αλλά από την (Δ2) της R, οι xRy και yRx δίνουν $x = y$, άτοπο.

(ΑΔ3) Εστω xSy και ySz. Τότε (xRy και $x \neq y$) και (yRz και $y \neq z$). Από τις xRy και yRz, λόγω της μεταβατικότητας της R, έχουμε xRz. Επίσης είναι $x \neq z$. Πράγματι, αν $x = z$, τότε (βλ. τις δύο αρχικές υποθέσεις) xSy και ySx, άτοπο. Αρα xRz με $x \neq z$, δηλ. xSz.

(ii) Αντίστροφα, έστω S μια αυστηρή διάταξη στο X. Ορίζουμε την σχέση $R = S \cup \Delta_X$, δηλ.

$$xRy \;\Leftrightarrow\; xSy \;\vee\; x = y.$$

Θα δείξουμε ότι η R είναι διάταξη. Πράγματι:

(Δ1) Για κάθε $x \in X$, ισχύει $(x,x) \in \Delta_X$, άρα $(x,x) \in S \cup \Delta_X = R$ και η R είναι ανακλαστική.

(Δ2) Εστω xRy και yRx. Τότε

$$\begin{aligned} xRy \;\wedge\; yRx \;&\Rightarrow\; (xSy \;\vee\; x = y) \wedge (ySx \;\vee\; y = x) \\ &\Rightarrow\; (xSy \;\wedge\; ySx) \;\vee\; x = y. \end{aligned}$$

Η πρώτη συνθήκη δεν ικανοποιείται ποτέ, άρα $x = y$ και η R είναι αντισυμμετρική.

(Δ3) Εστω xRy και yRz. Τότε

$$\begin{aligned}
xRy \ \wedge \ yRz &\Rightarrow \ (xSy \vee x = y) \ \wedge \ (ySz \vee y = z) \\
&\Rightarrow \ (xSy \wedge ySz) \ \vee \ (xSy \wedge y = z) \\
&\qquad \vee \ (x = y \wedge ySz) \ \vee \ (x = y \wedge y = z) \\
&\Rightarrow \ xSz \ \vee \ xSz \ \vee \ xSz \ \vee \ x = z \\
&\Rightarrow \ (x, z) \in S \cup \Delta_X = R,
\end{aligned}$$

και η R είναι μεταβατική. $\square$

ΑΣΚΗΣΗ. Να ελεγχθεί η αν ισχύει η ισοδυναμία: η διάταξη R είναι ολική, εάν και μόνον εάν η αντίστοιχη αυστηρή διάταξη S είναι τριχοτομία (βλ. αξίωμα (Π 11) των πραγματικών αριθμών).

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο δίνοντας ένα παράδειγμα ολικής διάταξης στους μιγαδικούς αριθμούς.

0.6 Παράδειγμα. Εστω $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε την εξής σχέση:

$$z_1 \leq z_2 \ \Leftrightarrow \ (x_1 < x_2) \ \veebar \ (x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 \leq y_2).$$

(Δ1) Για κάθε $z = x + iy$, είναι $x = x$ και $y \leq y$, άρα $z \leq z$ και η σχέση είναι ανακλαστική.

(Δ2) Για την αντισυμμετρία παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
z_1 \leq z_2 \ \wedge \ z_2 \leq z_1 &\Rightarrow \ [x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)] \\
&\qquad \wedge \ [x_2 < x_1 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)] \\
&\Rightarrow \ [x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_1] \\
&\qquad \vee \ [x_1 < x_2 \ \wedge \ (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)] \\
&\qquad \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \ \wedge \ x_2 < x_1] \\
&\qquad \vee \ [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \ \wedge \ (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1)]
\end{aligned}$$

Οι τρεις πρώτες συνθήκες δεν ισχύουν ποτέ, άρα

$$\begin{aligned}
z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_1 \ &\Rightarrow \ (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_1 = x_2 \wedge y_2 \leq y_1) \\
&\Rightarrow (\ x_1 = x_2) \ \wedge \ (y_1 \leq y_2 \ \wedge \ y_2 \leq y_1) \\
&\Rightarrow \ x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \\
&\Rightarrow \ z_1 = z_2.
\end{aligned}$$

(Δ3) Για την μεταβατικότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_3 \;&\Rightarrow\; [x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)] \\ &\qquad \wedge\; [x_2 < x_3 \vee (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\ &\Rightarrow\; [x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3] \\ &\qquad \vee\; [x_1 < x_2 \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \\ &\qquad \vee\; [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge x_2 < x_3] \\ &\qquad \vee\; [(x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2) \wedge (x_2 = x_3 \wedge y_2 \leq y_3)] \end{aligned}$$

Κάθε μία από τις τρεις πρώτες συνθήκες συνεπάγεται ότι $x_1 < x_3$ ενώ η τελευταία συνεπάγεται ότι $x_1 = x_3$ και $y_1 \leq y_3$. Αρα

$$\begin{aligned} z_1 \leq z_2 \wedge z_2 \leq z_3 &\Rightarrow x_1 < x_3 \vee (x_1 = x_3 \wedge y_1 \leq y_3) \\ &\Rightarrow z_1 \leq z_3. \end{aligned}$$

(ΟΔ) Τέλος, η σχέση $z_1 \leq z_2$ είναι ολική διάταξη στο $\mathbb{C}$: Θεωρούμε δύο τυχαία $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Για τα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_1 < x_2$ ή $x_1 = x_2$ ή $x_2 < x_1$. Αν $x_1 < x_2$, τότε $z_1 \leq z_2$. Αν $x_2 < x_1$, τότε $z_2 \leq z_1$. Αν $x_1 = x_2$, εξετάζουμε την σχέση των y_1 και y_2: θα ισχύει $y_1 \leq y_2$ είτε $y_2 \leq y_1$. Στην πρώτη περίπτωση $z_1 \leq z_2$ ενώ στη δεύτερη $z_2 \leq z_1$. Αρα τελικά, για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ισχύει είτε $z_1 \leq z_2$ είτε $z_2 \leq z_1$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Αν $z_1 \leq z_2$ και $z \in \mathbb{C}$ τυχαίο, εύκολα βλέπει κανείς ότι $z_1 + z \leq z_2 + z$. Ομως, αν $z_1 \leq z_2$ και $0 < z$, δεν εξασφαλίζεται ότι $z_1 z \leq z_2 z$.

ΑΣΚΗΣΗ. (1) Βρείτε μια τριάδα μιγαδικών z_1, z_2, z που ικανοποιούν τις $z_1 \leq z_2$ και $z > 0$, αλλά δεν ισχύει $z_1 z \leq z_2 z$.

(2) Δείξτε ότι το $\mathbb{C}$ δεν μπορεί να εφοδιαστεί με ολική διάταξη που να ικανοποιεί τα αξιώματα (Π10)-(Π13) των πραγματικών αριθμών.