# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΗ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΙΑ

ΓΙΑΝΝΗΣ Ν. ΜΟΣΧΟΒΑΚΗΣ

*Τμήμα Μαθηματικών*
*Πανεπιστήμιο Καλιφόρνιας, Λος Άντζελες*
*και*
*Πανεπιστήμιο Αθηνών*

μΠλ∀

Προκαταρκτική 2η έκδοση, γεμάτη λάθη, Μάρτιος 2007

Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία
Προκαταρκτική 2η έκδοση, Μάρτιος 2007


Παρατηρήσεις και διορθώσεις για κάθε είδους λάθη (μαθηματικά, γλωσσικά, ορθογραφικά, τυπογραφικά) είναι ευπρόσδεκτες, καλύτερα με email στη διεύθυνση ymos@math.uoa.gr.

*Αφιερωμένο στη μνήμη του Νίκου Κριτικού*

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

**Περί τίνος πρόκειται.** Η **Θεωρία Συνόλων** είναι μια συναρπαστική, ζωντανή μαθηματική θεωρία, με τις δικές της βασικές έννοιες, θεμελιακά αποτελέσματα και προβλήματα, και με σημαντικές εφαρμογές σε άλλες μαθηματικές θεωρίες. Ξέχωρα απ' αυτά, η **Αξιωματική Συνολοθεωρία** θεωρείται από πολλούς ως **θεμελίωση των μαθηματικών**: εικάζεται ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πράγματι σύνολα, και ότι οι ιδιότητές τους είναι πορίσματα των λιτών, κομψών αξιωμάτων για τα σύνολα. Τίποτα τόσο απλοϊκό δεν μπορεί να είναι η πλήρης αλήθεια, αλλά οπωσδήποτε, στα σύγχρονα μαθηματικά το «να αποσαφηνίσεις» κάποια έννοια είναι συνώνυμο με το «να την ορίσεις στη συνολοθεωρία». Η θεωρία συνόλων είναι η επίσημη γλώσσα των μαθηματικών, όπως τα μαθηματικά είναι η επίσημη γλώσσα της επιστήμης.

Σαν όλους τους συγγραφείς εισαγωγικών, πρώτων βιβλίων για τα σύνολα, έχω κι εγώ προσπαθήσει να εξηγήσω και τις δύο αυτές απόψεις του κλάδου.

Από την «καθαρή» θεωρία συνόλων, οι Σημειώσεις αυτές καλύπτουν τα βασικά αποτελέσματα για «αφηρημένα σύνολα», το Αξίωμα Επιλογής, υπερπεπερασμένη αναδρομή, πληθικούς και διατακτικούς αριθμούς. Λιγότερο συνηθισμένο είναι το Κεφάλαιο **10** για «σημειοσύνολα», που περιέχει αποτελέσματα με εφαρμογές στην Ανάλυση και εισάγει τον αναγνώστη στο Πρόβλημα του Συνεχούς, κεντρική ερώτηση της συνολοθεωρίας από τα πρώτα της βήματα. Υπάρχει και κάποια καινοτομία στην ανάπτυξη της θεωρίας πληθαρίθμων, που εισάγονται νωρίς (κατά τον Cantor αλλά λίγο πονηρά), έτσι ώστε οι βασικοί τύποι της πληθικής αριθμητικής να μπορούν να διδαχθούν όσο πιο γρήγορα γίνεται. Το Παράρτημα **A** εξηγεί την «κατασκευή» των πραγματικών αριθμών εκτενέστερα απ' ό,τι συνηθίζεται στην εποχή μας και με κάποιες καινοτομίες στην πρόσβαση του προβλήματος και σε μερικές από τις λεπτομέρειες. Το τελευταίο Παράρτημα **B** αποτελεί μια κάπως εκκεντρική εισαγωγή στη μαθηματική θεωρία **φυσικών προτύπων** διαφόρων αρχών της συνολοθεωρίας, μεταξύ των οποίων και η **Αρχή Αντιθεμελίωσης** του Aczel. Δεν απαιτεί γνώση της Λογικής, αλλά ο σοβαρός αναγνώστης του σίγουρα θ' αποφασίσει ότι πρέπει να μάθει Λογική.

Όσον αφορά τη συνολοθεωρία ως θεμελίωση των μαθηματικών, οι Σημειώσεις αυτές διαφέρουν από τα συνηθισμένα με δύο τρόπους. Καταρχήν έχω πάρει στα σοβαρά αυτό το «κάθε μαθηματικό αντικείμενο είναι σύνολο» (που βέβαια δεν είναι), κι έχω προσπαθήσει να του δώσω νόημα με την έννοια της **πιστής**

**απεικόνισης** μαθηματικών αντικειμένων από **δομημένα σύνολα**. Η ιδέα είναι παλιά, αλλά ίσως αυτό να είναι το πρώτο εισαγωγικό βιβλίο που την αποδέχεται, προσπαθεί να την εξηγήσει και τη χρησιμοποιεί με συνέπεια. Οι φίλοι της θεωρίας κατηγοριών θα αναγνωρίσουν μερικές από τις βασικές έννοιές της, ξεδιάντροπα περιτυλιγμένες από μια παραδοσιακή, καθαρά συνολοθεωρητική πρόσβαση στο πρόβλημα θεμελίωσης όπου «κατηγορίες» δεν αναφέρονται πουθενά. Και κατά δεύτερο λόγο, η **θεωρία υπολογισμού** θεωρείται μέρος των μαθηματικών που «χρήζουν θεμελίωσης», και τα σχετικά συνολοθεωρητικά αποτελέσματα καλύπτονται, μαζί με πολλά παραδείγματα. Η φιλοδοξία του βιβλίου είναι να εξηγήσει ό,τι για τα σύνολα πρέπει να μάθει κάθε σοβαρός φοιτητής και φοιτήτρια των μαθηματικών ή της θεωρητικής πληροφορικής.

Υπάρχουν πολλά ιστορικά σχόλια και περικοπές που σε μερικά μέρη δίνουν στις Σημειώσεις μια «λόγια» υφή που δεν τους αξίζει. Όλες οι περικοπές και οι περισσότερες παρατηρήσεις είναι από τις εξής δύο πολύτιμες συλλογές εργασιών, που ιδανικά θα πρέπει να είναι στη διάθεση του αναγνώστη.

Georg Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers*, μεταφρασμένο στα αγγλικά και με Εισαγωγή από τον Philip E. B. Jourdain, Dover Publications, New York.

Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, 1967.

**Οδηγίες χρήσης**. Περίπου το μισό βιβλίο μπορεί να καλυφθεί σ' ένα Τρίμηνο (δέκα βδομάδες), κάπως περισσότερο σ' ένα πλήρες Εξάμηνο. Τα Κεφάλαια **1 - 6** καλύπτουν τα βασικά και περιέχουν αρκετές λεπτομέρειες, έτσι ώστε ο σοβαρός φοιτητής να μπορεί να τα διαβάσει μόνος του, με λίγη βοήθεια. Για την επιτυχή χρήση αυτών των Σημειώσεων σε μάθημα είναι απαραίτητο αυτά τα βασικά να ξεπεραστούν γρήγορα: να παραλειφθεί το Κεφάλαιο **1**, που περιέχει κυρίως συμβολισμούς· περίπου μια βδομάδα για το Κεφάλαιο **2**, που εξηγεί τις θεμελιακές ιδέες του Cantor· και μετά «βήμα τροχάδην» μέσα από τα Κεφάλαια **3 - 6**, έτσι ώστε να φτάσει το μάθημα στη θεωρία καλά διατεταγμένων συνόλων του Κεφαλαίου **7** το πολύ την έκτη, αν είναι δυνατόν την πέμπτη βδομάδα. Από το Κεφάλαιο **7** και μετά, τα θεωρήματα γίνονται δυσκολότερα και η παρουσίασή τους πιο συνοπτική. Πόσα από την «πραγματική» συνολοθεωρία στα Κεφάλαια **7 - 12** μπορεί κανείς να καλύψει, εξαρτάται βέβαια από τους φοιτητές, το μήκος του μαθήματος, και πόσα θα παραλειφθούν. Αν οι φοιτητές είναι κυρίως της πληροφορικής, τότε το Κεφάλαιο **6** για Σταθερά Σημεία πρέπει να μελετηθεί πλήρως, με τα προβλήματά του, αλλά το Κεφάλαιο **10** για το χώρο Baire ίσως πρέπει να αφεθεί, όσο κι αν είναι κρίμα. Για φιλόδοξους αναλύστες, στο άλλο άκρο, το Κεφάλαιο **6** πρέπει να περικοπεί μετά το **6.27** (που κι αυτό είναι κρίμα), αλλά τουλάχιστον μια προσπάθεια πρέπει να γίνει να καλυφθεί μέρος του **10**. Στην ανάγκη, μπορούν να παραλειφθούν οι λεπτομέρειες για τις αριθμητικές πράξεις στο Κεφάλαιο **5**, ως επίσης και μερικά από τα ειδικότερα πορίσματα του Αξιώματος Επιλογής στο **9**. Κάπως απίθανο να βρεθεί χρόνος σε κανονικό μάθημα για τα Παραρτήματα (εγώ αφιερώνω μόνο μια διάλεξη για την κατασκευή των πραγματικών αριθμών), αλλά ελπίζω ότι ίσως είναι χρήσιμα για Σεμινάρια ή ατομική μελέτη.

Εφόσον μαθήματα συνολοθεωρίας δεν διδάσκονται συχνά και σπάνια καλύπτουν όσα πρέπει, προσπάθησα ιδιαίτερα να γράψω αυτές τις Σημειώσεις έτσι που να είναι κατάλληλες για ατομική μελέτη, από τον ικανό και σοβαρό φοιτητή. Υπάρχουν πολλές, απλές **Ασκήσεις**, που ελέγχουν την κατανόηση καινούριων εννοιών αμέσως μετά την εισαγωγή τους. Στο μάθημα παρουσιάζω μερικές απ' αυτές, για παραδείγματα, και αναθέτω τις υπόλοιπες στους φοιτητές. Τα **Προβλήματα** στο τέλος κάθε κεφαλαίου είναι ποικίλης δυσκολίας, και μερικά απ' αυτά καλύπτουν επιπρόσθετη ύλη. Όπως συνηθίζεται, τα πιο δύσκολα από τα προβλήματα σημαδεύονται μ' έναν *.

**Ευχαριστίες**. Ευχαριστώ το Μαθηματικό Τμήμα του Πανεπιστημίου Αθηνών για την ευκαιρία που μου έδωσε να διδάξω Συνολοθεωρία στην Αθήνα το Χειμώνα του 1990· τη Δήμητρα Κίτσιου και τον Στράτο Πάσχο για την πάλη τους με διάφορους υπολογιστές και εκτυπωτές του Πολυτεχνείου το 1990 όταν τυπώσαμε την πρώτη προκαταρκτική έκδοση· και ιδιαίτερα τον Θανάση Τσαρπαλιά που συνήθως διδάσκει το μάθημα Συνολοθεωρίας στο Πανεπιστήμιο, που χρησιμοποίησε τη δεύτερη προκαταρκτική έκδοση αυτών των Σημειώσεων το Χειμώνα του 1992 και που μου πρόσφερε πληθώρα χρήσιμων συμβουλών για το περιεχόμενο, τις ασκήσεις και την ελληνική ορολογία. Είμαι ευγνώμων στους συναδέλφους και φίλους στο UCLA και το Caltech (κέντρα έρευνας στη συνολοθεωρία) από τους οποίους έχω μάθει ό,τι ξέρω για τον κλάδο. Και είμαι ιδιαίτερα ευγνώμων στη γυναίκα μου Joan Rand Moschovakis και το φοιτητή μου Darren Kessner που διάβασαν μεγάλα μέρη από το κείμενο, έλυσαν τα περισσότερα Προβλήματα και διόρθωσαν πολλά από τα λάθη μου.

Το βιβλίο γράφηκε σχεδόν ταυτόχρονα στα ελληνικά και στα αγγλικά, με τη μαγεία του δίγλωσσου LaTeX[1] και σαν ακριβής αντικατοπτρισμός της προσωπικής μου μοίρας. Το αφιερώνω στον αείμνηστο Καθηγητή Νίκο Κριτικό για τα αξέχαστα απογεύματα που πέρασα μαζί του το Χειμώνα και την Άνοιξη του 1973 προσπαθώντας να μάθω με την πολύτιμη βοήθειά του πώς να μιλώ και να γράφω μαθηματικά στη μητρική μου γλώσσα. Λίγες ώρες με το Νίκο Κριτικό, να κατεβάζει τα Λεξικά (από τα γερμανικά στα ελληνικά, από τα λατινικά στα γερμανικά) για να βρει ακριβώς την τέλεια μετάφραση κάποιου όρου, σου μάθαιναν περισσότερα για την αγάπη της επιστήμης και της γλώσσας απ' ό,τι χρόνια τυπικών μεταπτυχιακών σπουδών. Θέλω επίσης να εκφράσω τις βαθύτατες ευχαριστίες μου στο φίλο Τάκη Κουφόπουλο, που διάβασε προσεκτικά και κριτικά την προκαταρκτική έκδοση αυτού του βιβλίου, διόρθωσε τα χειρότερα γλωσσικά

[1] Οι Έλληνες μαθηματικοί έχουμε μεγάλη υποχρέωση στον Silvio Levy, που προγραμμάτισε τόσο όμορφα τα Ελληνικά «απλά» στο METAFONT έτσι που να μπορούμε να χρησιμοποιούμε το TeX του Knuth και το LaTeX του Lamport για τη στοιχειοθέτηση ελληνικών μαθηματικών κειμένων. Όσοι ενδιαφέρονται για το πακέτο (δημοσίων, ελεύθερων) προγραμμάτων με το οποίο στοιχειοθέτησα την ελληνική έκδοση αυτού του βιβλίου μπορούν να μου γράψουν για περισσότερες πληροφορίες, αν γίνεται ηλεκτρονικά, στη διεύθυνση ynm@math.ucla.edu.

μου αμαρτήματα και πρότεινε μια σειρά αλλαγών που βελτίωσαν σημαντικά το τελειωμένο έργο.

Santa Monica, California Ιανουάριος 1993

**Για τη 2η έκδοση.** Οι πιο σημαντικές αλλαγές που έχω κάνει είναι ίσως σε μικρά πράγματα, που (ελπίζω) κάνουν το βιβλίο πιο εύκολο, και για το δάσκαλο και για το μαθητή: απλουστευμένες αποδείξεις, συμβολισμός και ορολογία, μερικά καινούρια διαγράμματα, καλύτερη διατύπωση μερικών αποτελεσμάτων (ιδιαίτερα αυτών που δικαιολογούν *αναδρομικούς ορισμούς* και *επαγωγικές αποδείξεις*) έτσι που να διευκολύνονται οι εφαρμογές τους, και (ίσως πιο σημαντικά), η διόρθωση λαθών, τυπογραφικών και άλλων. Για την ανακάλυψη αυτών των λαθών και πολλές χρήσιμες υποδείξεις είμαι ευγνώμων στους φίλους και συνάδελφους Serge Bozon, Joel Hamkins, Peter Hinman, Aki Kanamori, Joan Moschovakis, Larry Moss, Γιάννη Παναγιωτόπουλο, Θανάση Τσαρπαλιά, και πάρα πολλούς φοιτητές.

Ανάμεσα στις πιο σημαντικές αλλαγές σ' αυτή την έκδοση είναι οι εξής:

— Η απόδειξη του *Θεωρήματος του Suslin* στο Κεφάλαιο **10**, που (γενικότερα) έχει βελτιωθεί σημαντικά

— Μια καλύτερη (πιστεύω) ανάπτυξη της θεωρίας διατακτικών αριθμών στο Κεφάλαιο **12**, και την πρόσθεση νέου υλικού σ' αυτό το Κεφάλαιο, που τώρα περιλαμβάνει τα βασικά αποτελέσματα της διατακτικής αριθμητικής.

— Λύσεις όλων των ασκήσεων στα Κεφάλαια **1** – **12**, κατόπιν λαϊκής επιταγής. Αυτό αφαιρεί από τον διδάσκοντα τις πιο προφανείς, εύκολες αναθέσεις ασκήσεων, και έτσι έχω προσθέσει αρκετά, καινούρια εύκολα προβλήματα.

Είμαι ευγνώμων στο Θάνο Τσουάνα για τη διόρθωση της Αγγλικής 2ης έκδοσης (Notes on Set Theory, Springer, 2006) και τη μετάφραση στα Ελληνικά του καινούριου υλικού.

Παλαιό Φάληρο, Μάρτιος 2007

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύνολα έχουν χρησιμοποιηθεί σε όλους τους κλάδους των μαθηματικών από τους αρχαιότατους χρόνους, π.χ. στη γεωμετρία ορίζουμε τον κύκλο ως το σύνολο των σημείων που απέχουν ορισμένη απόσταση $r$ από ορισμένο σημείο $C$ (το κέντρο), μελετάμε τη δέσμη όλων των ευθειών που περνούν από ένα συγκεκριμένο σημείο κ.λπ. Η συστηματική μελέτη των συνόλων, όμως, άρχισε μόνο στα τέλη του 19ου αιώνα με την εργασία του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού Georg Cantor, που δημιούργησε μια αυστηρή θεωρία της έννοιας του *ολοκληρωμένου απείρου*, με την οποία μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα *ως προς το πλήθος*. Συγκεκριμένα, ας θέσουμε:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\} = \text{το σύνολο των ακεραίων αριθμών,}$$
$$\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\} = \text{το σύνολο των φυσικών αριθμών,}$$
$$\mathbb{Q} = \text{το σύνολο των ρητών αριθμών,}$$
$$\mathbb{R} = \text{τα σημεία μιας απεριόριστης ευθείας,}$$

όπου ταυτίζουμε το $\mathbb{R}$ με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, κάθε σημείο ταυτιζόμενο με τη (θετική ή αρνητική) του συντεταγμένη. Ο Cantor ερώτησε αν αυτά τα σύνολα «έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων» ή αν κάποιο από αυτά είναι «πολυπληθέστερο» των άλλων. Πριν εξηγήσουμε την απάντηση που έδωσε, στο επόμενο κεφάλαιο, θα ανασκοπήσουμε εδώ συνοπτικά μερικές από τις βασικές ιδέες για σύνολα και συναρτήσεις, κυρίως για να εξηγήσουμε το συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε.

Αλλά τι είναι τα σύνολα; Η ερώτηση είναι παρόμοια με την ερώτηση «τι είναι τα σημεία μιας ευθείας» την οποία ο Ευκλείδης απάντησε με το

«σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν».

Αυτός δεν είναι βέβαια αυστηρός, μαθηματικός ορισμός, αναγωγή της έννοιας του σημείου σε γνωστές έννοιες, αλλά μια κάποια περιγραφή, που θέλει να μας δώσει την εικόνα ότι το σημείο είναι κάτι που δεν έχει «έκταση». Όπως αυτή του σημείου, η έννοια του συνόλου είναι επίσης θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο Cantor την περιέγραψε ως εξής:

> «Με τη λέξη ‘σύνολο’ εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».

Όσο ασαφής και αν είναι αυτός ο ορισμός, συνεπάγεται δύο βασικές ιδιότητες των συνόλων.

1. Κάθε σύνολο $A$ έχει **στοιχεία** ή **μέλη**. Γράφουμε

$$x \in A \iff \text{το αντικείμενο } x \text{ είναι μέλος του (ή ανήκει στο) } A.$$

2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του, δηλαδή αν τα $A$, $B$ είναι σύνολα, τότε[2]

$$\begin{aligned} A = B &\iff \text{τα } A \text{ και } B \text{ έχουν τα ίδια μέλη} \qquad (1\text{-}1)\\ &\iff (\forall x)[x \in A \iff x \in B]. \end{aligned}$$

Αυτό το τελευταίο λέγεται η **ιδιότητα της έκτασης**. Το σύνολο των φοιτητών σ' αυτή την τάξη π.χ. θα παραμείνει σταθερό αν όλοι μας αλλάξουμε θέσεις, ξαπλώσουμε κάτω ή μετακινηθούμε σε κάποιο άλλο δωμάτιο: το σύνολο καθορίζεται τελείως από το *ποιοι* είμαστε, όχι από τη στάση μας ή τις θέσεις όπου τυχαίνει να βρισκόμαστε.

Κάπως ιδιότυπο είναι το **κενό σύνολο** $\emptyset$ που δεν έχει κανένα μέλος. Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι *μόνο ένα κενό σύνολο υπάρχει.*

Αν τα $A$ και $B$ είναι σύνολα, γράφουμε

$$A \subseteq B \iff (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B],$$

και αν $A \subseteq B$, λέμε ότι το $A$ είναι **υποσύνολο** του $B$, έτσι ώστε για κάθε $B$,

$$\emptyset \subseteq B, \quad B \subseteq B.$$

Αν το $A$ είναι **γνήσιο** υποσύνολο του $B$, γράφουμε $A \subsetneq B$,

$$A \subsetneq B \iff [A \subseteq B \;\&\; A \neq B].$$

Από την ιδιότητα της έκτασης έπεται ότι για όλα τα σύνολα $A$, $B$,

$$A = B \iff A \subseteq B \;\&\; B \subseteq A.$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πολλούς συμβολισμούς για να ορίσουμε συγκεκριμένα σύνολα και θα χρειαστούμε και άλλους, π.χ.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

είναι το (πεπερασμένο) σύνολο με μέλη ακριβώς τα στοιχεία $a_1, a_2, \dots, a_n$. Επίσης, αν η $P$ είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων, τότε

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν τη συνθήκη $P$, έτσι ώστε για κάθε $x$,

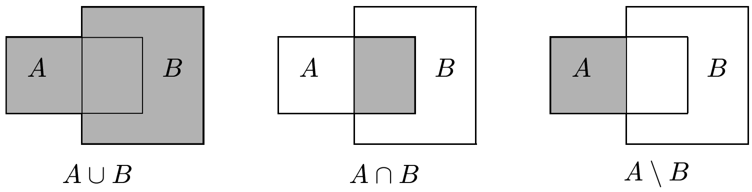
$$x \in A \iff P(x).$$

[2]Θα χρησιμοποιήσουμε συστηματικά ως συντομεύσεις τους συμβολισμούς της λογικής:

$\&$ : και, $\vee$ : ή, $\neg$ : όχι, $\Longrightarrow$ : συνεπάγεται, $\iff$ : τότε και μόνον αν,

$\forall$ : για κάθε, $\exists$ : υπάρχει, $\exists!$ : υπάρχει ακριβώς ένα.

Τα σύμβολα $=_{\text{ορ}}$ και $\iff_{\text{ορ}}$ διαβάζονται "ισούται εξ' ορισμού" και "ισοδύναμα εξ' ορισμού".




Διαγραμμα **1.1**. Πράξεις Boole.

Για παράδειγμα, αν

$$P(x) \iff x \in \mathbb{N} \,\&\, x \text{ άρτιος},$$

τότε $\{x \mid P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των άρτιων, φυσικών αριθμών. Όταν ενδιαφερόμαστε μονάχα για τη "συνάθροιση σε ολότητα" μελών ενός δοσμένου συνόλου $A$ που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη συνθήκη, χρησιμοποιούμε μια παραλαγή του παραπάνω συμβολισμού:

$$\{x \in A \mid P(x)\} =_{\text{ορ}} \{x \mid x \in A \,\&\, P(x)\},$$

έτσι ώστε, για παράδειγμα, $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\}$ είναι το σύνολο όλων των μη μηδενικών φυσικών αριθμών, ενώ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ είναι το σύνολο όλων των θετικών πραγματικών αριθμών.

Για όλα τα σύνολα $A$, $B$,

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \mid x \in A \vee x \in B\} && (\text{η ένωση των } A, B),\\ A \cap B &= \{x \in A \mid x \in B\} && (\text{η τομή των } A, B),\\ A \setminus B &= \{x \in A \mid x \notin B\} && (\text{η διαφορά των } A, B). \end{aligned}$$

Αυτές οι "πράξεις Boole" απεικονίζονται σχηματικά με τα διαγράμματα Venn στο Διάγραμμα **1.1**, όπου τα σύνολα αναπαραστούνται από εμβαδά στο επίπεδο. Η ένωση και η τομή μιας ακολουθίας συνόλων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο,

$$\textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots = \{x \mid (\exists n \in \mathbb{N})[x \in A_n]\},$$

$$\textstyle\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cap A_1 \cap \cdots = \{x \mid (\forall n \in \mathbb{N})[x \in A_n]\}.$$

Δύο σύνολα είναι **ξένα** αν η τομή τους είναι κενή,

$$A \text{ ξένο με το } B \iff A \cap B = \emptyset.$$

Με τους συμβολισμούς

$$f : X \to Y \quad \text{ή} \quad A \xrightarrow{f} B$$

εννοούμε ότι η $f$ είναι **συνάρτηση** που αντιστοιχίζει σε κάθε μέλος $x$ του συνόλου $X$ του **πεδίου ορισμού** της $f$, ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του **πεδίου τιμών** $Y$ της $f$. Τις συναρτήσεις καλούμε και **απεικονίσεις** ή **μετασχηματισμούς**. Πολλές φορές είναι χρήσιμος και ο συνοπτικός συμβολισμός $(x \mapsto f(x))$ που μας επιτρέπει να μιλήσουμε για κάποια συνάρτηση χωρίς να τη βαφτίσουμε επίσημα. Η

$$(x \mapsto x^2 + 1)$$

π.χ. στους πραγματικούς αριθμούς είναι η συνάρτηση (ας την πούμε) $f$ που ορίζεται με τον τύπο

$$f(x) = x^2 + 1, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

έτσι ώστε $f(0) = 1$, $f(2) = 5$ κ.λπ. Χωρίς να εισαγάγουμε το όνομα $f$ γι' αυτή τη συνάρτηση, μπορούμε να πούμε ότι «όλες οι τιμές της $(x \mapsto x^2 + 1)$ είναι θετικές».

Δύο συναρτήσεις είναι **ίσες** αν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και αντιστοιχούν την ίδια τιμή σε κάθε μέλος του κοινού τους πεδίου ορισμού.

$$f = g \iff (\forall x \in X)[f(x) = g(x)] \quad (f : X \to Y,\ g : X \to Z, x \in X).$$

Αναφορικά με συναρτήσεις, θα χρησιμοποιούμε επίσης τους συμβολισμούς

$$\begin{aligned} f : X \rightarrowtail Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{μονομορφισμός} \text{ (ένα-πρός-ένα)} \\ &\iff (\forall x, x' \in X)[f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'], \\ f : X \twoheadrightarrow Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{επιμορφισμός} \text{ (συνάρτηση επί)} \\ &\iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)[f(x) = y], \\ f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y &\iff_{\text{ορ}} \text{η } f \text{ είναι } \textbf{αντιστοιχία} \\ &\iff (\forall y \in Y)(\exists! x \in X)[f(x) = y]. \end{aligned}$$

Για κάθε $f : X \to Y$ και $A \subseteq X$, το σύνολο

$$f[A] =_{\text{ορ}} \{f(x) \mid x \in A\}$$

είναι η **εικόνα** του $A$ από την $f$, και αν $B \subseteq Y$ τότε το

$$f^{-1}[B] =_{\text{ορ}} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

είναι η **αντίστροφη εικόνα** του $B$ από την $f$.

Αν η $f$ είναι αντιστοιχία, τότε βέβαια η **αντίστροφη συνάρτηση** $f^{-1} : Y \to X$ μπορεί να οριστεί ανεξάρτητα με τον τύπο

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

και το σύνολο $f^{-1}[B]$ είναι ακριβώς η εικόνα του $B$ από την $f^{-1}$ όπως την ορίσαμε πιο πάνω.

Η **σύνθεση**

$$h =_{\text{ορ}} gf : X \to Z$$

δύο συναρτήσεων

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

ορίζεται με τον τύπο

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in X).$$

Πολλές χρήσιμες ιδιότητες των συνόλων και συναρτήσεων μπορούν να αποδειχτούν αμέσως από αυτούς τους ορισμούς και την ιδιότητα της έκτασης. Για παράδειγμα,

$$A \cup B = B \cup A,$$

επειδή για οποιοδήποτε $x$,

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \text{ ή } x \in B \\ &\iff x \in B \text{ ή } x \in A \\ &\iff x \in B \cup A. \end{aligned}$$

Σε μερικές περιπτώσεις η λογική της απόδειξης είναι κάπως περίπλοκη και είναι ευκολότερο να αποδείξουμε την ισότητα $U = V$ επαληθεύοντας ξεχωριστά τις συνεπαγωγές $x \in U \Longrightarrow x \in V$ και $x \in V \Longrightarrow x \in U$. Για παράδειγμα, αν $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$, τότε

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B].$$

Για να επαληθεύσουμε αυτήν την ισότητα, πρώτα δείχνουμε ότι

$$x \in f[A \cup B] \Longrightarrow x \in f[A] \cup f[B]\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in f[A \cup B]$, τότε υπάρχει κάποιο $y \in A \cup B$ τέτοιο που $x = f(y)$· και αν $y \in A$, τότε $x = f(y) \in f[A] \subseteq f[A] \cup f[B]$, ενώ αν $y \in B$, τότε $x = f(y) \in f[B] \subseteq f[A] \cup f[B]$. Έπειτα δείχνουμε την αντίστροφη συνεπαγωγή,

$$x \in f[A] \cup f[B] \Longrightarrow x \in f[A \cup B]\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in f[A]$, τότε $x = f(y)$ για κάποιο $y \in A \subseteq A \cup B$, και έτσι $x \in f[A \cup B]$, ενώ αν $x \in f[B]$, τότε $x = f(y)$ για κάποιο $y \in B \subseteq A \cup B$, άρα και πάλι $x \in f[A \cup B]$.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 1

**x1.1.** Για όλα τα σύνολα $A, B, C$,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \setminus (A \cap B) &= A \setminus B. \end{aligned}$$

**x1.2.** (Οι νόμοι του De Morgan) Για όλα τα σύνολα $A, B, C$,

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

**x1.3.** (Οι νόμοι του De Morgan για ακολουθίες) Για κάθε σύνολο $C$ και ακολουθία συνόλων $\{A_n\}_n = A_0, A_1, \dots,$

$$C \setminus (\bigcup_n A_n) = \bigcap_n (C \setminus A_n),$$
$$C \setminus (\bigcap_n A_n) = \bigcup_n (C \setminus A_n).$$

**x1.4.** Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και όλα τα $A, B \subseteq X$,

$$f[A \cap B] = f[A] \cap f[B],$$
$$f[A \setminus B] = f[A] \setminus f[B].$$

Δείξε επίσης ότι αυτές οι ισότητες δεν ισχύουν πάντα αν η $f$ δεν είναι μονομορφισμός.

**x1.5.** Για κάθε $f : X \to Y$ και όλα τα $A, B \subseteq Y$,

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B],$$
$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B],$$
$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B].$$

**x1.6.** Για όλες τις $f : X \to Y$ και όλες τις ακολουθίες συνόλων $A_n \subseteq X$, $B_n \subseteq Y$,

$$f^{-1}[\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n],$$
$$f^{-1}[\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-1}[B_n],$$
$$f[\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcup_{n=0}^{\infty} f[A_n].$$

**x1.7.** Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και κάθε ακολουθία συνόλων $A_n \subseteq X$,

$$f[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n].$$

**x1.8.** Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός, η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός, και επομένως η σύνθεση αντιστοιχιών είναι αντιστοιχία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# ΙΣΟΠΛΗΘΙΚΟΤΗΤΑ

Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά μπορούμε να διατυπώσουμε τους βασικούς ορισμούς του Cantor για το πληθικό μέγεθος των συνόλων.

**2.1. Ορισμός.** Δύο σύνολα $A$, $B$ είναι **ισοπληθικά** (equinumerous) ή **ίσα σε πλήθος** αν υπάρχει (αμοιβαία, ένα-προς-ένα) αντιστοιχία των στοιχείων τους, συμβολικά:

$$A =_c B \iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B].$$

Αυτός ο ορισμός της ισοπληθικότητας προφανώς βασίζεται στις διαισθήσεις μας για τα πεπερασμένα σύνολα. Μπορούμε να είμαστε σίγουροι π.χ. ότι ένα μαγαζί παπουτσιών προσφέρει τον ίδιο αριθμό αριστερών και δεξιών παπουτσιών, χωρίς να ξέρουμε ακριβώς ποιος είναι αυτός ο αριθμός: η συνάρτηση που συσχετίζει κάθε αριστερό παπούτσι με το δεξί παπούτσι στο ίδιο ζευγάρι είναι αντιστοιχία που φανερώνει την ισοπληθικότητα αυτών των δύο συνόλων. Το ριζοσπαστικό στοιχείο του ορισμού του Cantor είναι η πρόταση να δεχτούμε την ύπαρξη αμοιβαίας αντιστοιχίας ως χαρακτηριστική ιδιότητα της ισοπληθικότητας για όλα τα σύνολα, παρά το γεγονός ότι η εφαρμογή της στα άπειρα σύνολα μπορεί να θεωρηθεί προβληματική. Έτσι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ είναι ισοπληθικό με το γνήσιο υποσύνολό του $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$\{0, 1, 2, \dots\} =_c \{1, 2, 3, \dots\},$$

βάσει της αντιστοιχίας $(x \mapsto x + 1)$. Επίσης, στους πραγματικούς αριθμούς,

$$(0, 1) =_c (0, 2)$$

βάσει της αντιστοιχίας $(x \mapsto 2x)$ όπου, ως συνήθως, για δύο πραγματικούς αριθμούς $\alpha < \beta$,

$$(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}.$$

Θα χρησιμοποιούμε τον ανάλογο συμβολισμό και για τα κλειστά ή ημίκλειστα διαστήματα $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$ κ.λπ.

**2.2. Πρόταση.** *Για όλα τα σύνολα $A, B, C$,*

$$A =_c A,$$
$$\text{αν } \ A =_c B, \ \text{ τότε } \ B =_c A,$$
$$\text{αν } \ (A =_c B \,\&\, B =_c C), \ \text{ τότε } \ A =_c C.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \pi & : & 3 & 1 & 0 & \cancel{1} & 5 & \cancel{3} & 9 & 7 & \cdots \\ & & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \\ & & f(0) & f(1) & f(2) & & f(3) & & f(4) & f(5) & \cdots \end{array}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **2.1**. Διαγραφή επαναλήψεων μιας απαρίθμησης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για την τρίτη συνεπαγωγή παραδείγματος χάριν, αν οι αντιστοιχίες $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ και $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνουν τις ισοπληθικότητες της υπόθεσης, τότε η σύνθεση $gf : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνει ότι $A =_c C$. $\dashv$

**2.3. Ορισμός.** Το σύνολο $A$ είναι **μικρότερο-ίσο** του $B$ **ως προς το πλήθος** αν είναι ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του $B$, συμβολικά:

$$A \leq_c B \iff (\exists C)[C \subseteq B \ \& \ A =_c C].$$

**2.4. Πρόταση.** $A \leq_c B \iff (\exists f)[f : A \rightarrowtail B]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $A =_c C \subseteq B$ και η $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$ φανερώνει αυτή την ισοδυναμία, τότε η $f$ είναι μονομορφισμός από το $A$ στο $B$. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αν υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $f : A \rightarrowtail B$, τότε αυτός ο $f$ φανερώνει ότι $A =_c f[A] \subseteq B$, έτσι που $A \leq_c B$ από τον ορισμό. $\dashv$

**2.5. Άσκηση.** *Για όλα τα σύνολα $A, B, C$,*

$$A \leq_c A,$$
$$\textit{αν} \ \ (A \leq_c B \,\&\, B \leq_c C), \ \ \textit{τότε} \ \ A \leq_c C.$$

**2.6. Ορισμός.** Το σύνολο $A$ είναι **πεπερασμένο** (finite) αν υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $n$ ώστε

$$A =_c \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\},$$

αλλιώς το $A$ είναι **άπειρο** (infinite). Κατά συνέπεια το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι πεπερασμένο, αφού $\emptyset = \{i \in \mathbb{N} \mid i < 0\}$.

Το σύνολο $A$ είναι **απαριθμητό** ή **αριθμήσιμο** (countable ή denumerable) αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$, αλλιώς είναι **αναπαρίθμητο** ή **μη αριθμήσιμο** (uncountable).

**2.7. Πρόταση.** *Για κάθε σύνολο $A$, οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*
(1) *το $A$ είναι απαριθμητό,*
(2) $A \leq_c \mathbb{N}$.
(3) *Είτε $A = \emptyset$, είτε το $A$ επιδέχεται* **απαρίθμηση**, *δηλαδή υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, έτσι ώστε*

$$A = \pi[\mathbb{N}] = \{\pi(0), \pi(1), \pi(2), \dots\}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα αποδείξουμε τις συνεπαγωγές κυκλικά.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Αν το $A$ είναι απαριθμητό, τότε είτε $A =_c \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}$ για κάποιο $n$, είτε $A =_c \mathbb{N}$, οπότε και στις δύο περιπτώσεις, $A =_c C$ για κάποιο $C \subseteq \mathbb{N}$, άρα $A \leq_c \mathbb{N}$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Έστω $A \neq \emptyset$. Επιλέγουμε κάποιο $x_0 \in A$, και από το (2) παίρνουμε $f : A \rightarrowtail \mathbb{N}$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\pi(i) = \begin{cases} x_0, & \text{αν } i \notin f[A], \\ f^{-1}(i), & \text{διαφορετικά, δηλ., αν } i \in f[A]. \end{cases}$$

Η $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ είναι καλά ορισμένη (διότι η $f$ είναι μονομορφισμός, έτσι που η $f^{-1}(i)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη), και είναι επιμορφισμός, αφού $x_0 \in A$ και για κάθε $x \in A$, $x = \pi(f(x))$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Αν $A$ πεπερασμένο, τότε το (1) αληθεύει. Έστω $A$ όχι πεπερασμένο και $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ απαρίθμηση του $A$. Πρέπει να κατασκευάσουμε μιαν άλλη απαρίθμηση $f : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$ *χωρίς επαναλήψεις*, έτσι ώστε να είναι η $f$ αντιστοιχία του $\mathbb{N}$ με το $A$ που φανερώνει ότι το $A$ είναι αριθμήσιμα άπειρο. Η απόδειξη εξηγείται πλήρως από το Διάγραμμα **2.1**: απλώς διαγράφουμε τις επαναλήψεις από την απαρίθμηση $\pi$ του $A$. Για να δώσουμε αυστηρό, αναδρομικό ορισμό της $f$, παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή το $A$ δεν είναι πεπερασμένο, για κάθε ακολουθία $a_0, \ldots, a_n$ μελών του υπάρχει κάποιο $m$ έτσι που $\pi(m) \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$, και θέτουμε:

$$\begin{aligned} f(0) &= \pi(0), \\ m_n &= \text{το ελάχιστο } m > n \text{ ώστε } \pi(m) \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}, \\ f(n+1) &= \pi(m_n). \end{aligned}$$

Προφανώς η $f$ είναι μονομορφισμός και αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $x \in A$ είναι τιμή της. Εξ ορισμού $x = \pi(0) = f(0)$. Έστω $x = \pi(n+1)$· αν $x \in \{f(0), \ldots, f(n)\}$, τότε $x = f(i)$ για κάποιο $i \leq n$, και αν $x \notin \{f(0), \ldots, f(n)\}$, τότε εξ ορισμού $m_n = n + 1$ και $f(n+1) = \pi(m_n) = x$. $\dashv$

**2.8. Άσκηση.** *Αν το $A$ είναι αριθμήσιμο και υπάρχει μονομορφισμός $f : B \rightarrowtail A$, τότε και το $B$ είναι αριθμήσιμο. Ειδικότερα, κάθε υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου είναι αριθμήσιμο.*

**2.9. Άσκηση.** *Αν το $A$ είναι αριθμήσιμο και υπάρχει επιμορφισμός $f : A \twoheadrightarrow B$, τότε και το $B$ είναι αριθμήσιμο.*

Το επόμενο απλό θεώρημα είναι από τα πιο βασικά της συνολοθεωρίας.

**2.10. Θεώρημα** (Cantor). *Για κάθε ακολουθία $A_0, A_1, \ldots$ απαριθμητών συνόλων, η ένωση*

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = A_0 \cup A_1 \cup \cdots$$

*είναι επίσης απαριθμητό σύνολο.*

*Ειδικότερα, η ένωση $A \cup B$ δύο απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητό σύνολο.*

$$\begin{array}{ccccc}
A_0 : & a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\
A_1 : & a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\
A_2 : & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\
\vdots & & \cdots & &
\end{array}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **2.2**. Η πρώτη διαγώνιος μέθοδος του Cantor.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να εφαρμόσουμε τον πρώτο στην ακολουθία

$$A, B, B, \ldots$$

Για τον πρώτο, αρκεί (γιατί;) να αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που κανένα $A_n$ δεν είναι κενό, οπότε μπορούμε να βρούμε μιαν απαρίθμηση $\pi^n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$ για κάθε $A_n$. Αν θέσουμε

$$a_i^n = \pi^n(i)$$

για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, τότε για κάθε $n$

$$A_n = \{a_0^n, a_1^n, \ldots\},$$

και μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα στοιχείων από αυτές τις απαριθμήσεις που περιέχει όλα τα στοιχεία της ένωσης $A$. Τα βέλη στο Διάγραμμα **2.2** δείχνουν πώς μπορούμε να απαριθμήσουμε την ένωση:

$$A = \{a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_0^2, a_1^1, \ldots\}. \qquad \dashv$$

**2.11. Πόρισμα.** *Το σύνολο των (θετικών και αρνητικών) ακέραιων αριθμών*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

*είναι αριθμήσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, \ldots\}$ και το σύνολο των αρνητικών ακέραιων αριθμών είναι αριθμήσιμο μέσω της αντιστοιχίας $(x \mapsto -(x+1))$. $\dashv$

**2.12. Πόρισμα.** *Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ των $\geq 0$ ρητών είναι αριθμήσιμο, επειδή

$$\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

και κάθε $\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{N}\}$ απαριθμείται από την $(m \mapsto \frac{m}{n})$. Με τον ίδιο τρόπο, το σύνολο $\mathbb{Q}^-$ των αρνητικών ρητών αριθμών είναι επίσης αριθμήσιμο, καθώς και η ένωση $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$. $\dashv$

$$\begin{tikzcd}
\alpha_0 : & a_0^0 \arrow[dr] & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\
\alpha_1 : & a_0^1 & a_1^1 \arrow[dr] & a_2^1 & \cdots \\
\alpha_2 : & a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \arrow[dr] & \cdots \\
\vdots & & \cdots & & {}
\end{tikzcd}$$

Διάγραμμα **2.3**. Η δεύτερη διαγώνιος μέθοδος του Cantor.

Αυτό το πόρισμα ήταν το πρώτο σημαντικό βήμα προόδου που έκανε ο Cantor στο πρόβλημα της ταξινόμησης των τάξεων απείρου και θεωρήθηκε κάπως παράδοξο στην εποχή του, επειδή το $\mathbb{Q}$ φαίνεται τόσο μεγαλύτερο από το $\mathbb{N}$. Αμέσως μετά ο Cantor απέδειξε ότι υπάρχουν και αναπαρίθμητα σύνολα.

**2.13. Θεώρημα** (Cantor). *Το σύνολο*

$$\Delta = \{(a_0, a_1, \dots) \mid (\forall i)[a_i = 0 \vee a_i = 1]\}$$

*των απείρων, δυαδικών ακολουθιών είναι αναπαρίθμητο.*

Απόδειξη. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε[3] ότι το $\Delta$ είναι απαριθμητό, δηλαδή

$$\Delta = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \},$$

όπου για κάθε $n$,

$$\alpha_n = (a_0^n, a_1^n, \dots)$$

είναι μια ακολουθία από 0 και 1. Φτιάχνουμε έναν πίνακα με αυτές τις ακολουθίες όπως πριν, και μετά ορίζουμε την ακολουθία $\beta$ εναλλάσσοντας τα 0 με τα 1 στη «διαγώνιο» ακολουθία $a_0^0, a_1^1, \dots$:

$$\beta(n) = 1 - a_n^n.$$

Είναι προφανές ότι $\beta \neq \alpha_n$, για κάθε $n$, επειδή

$$\beta(n) = 1 - \alpha_n(n) \neq \alpha_n(n)\cdot$$

συνεπώς η ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ δεν απαριθμεί ολόκληρο το $\Delta$, αντίθετα με την αρχική μας υπόθεση. ⊣

**2.14. Πόρισμα** (Cantor). *Το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι αναπαρίθμητο.*

[3] Για να αποδείξουμε μια πρόταση $\theta$ με *απαγωγή σε άτοπο*, δεχόμαστε την άρνησή της $\neg\theta$ και απ' αυτήν συμπεραίνουμε κάτι που αντιτίθεται σε πράγματα γνωστά, μιαν αντίφαση, κάποιο *άτοπο*: συνάγεται ότι η άρνηση της $\theta$ δεν μπορεί να αληθεύει, και επομένως αληθεύει η $\theta$. Τέτοιες αποδείξεις τυπικά αρχίζουν με τη φράση-κλειδί *προς απαγωγή σε άτοπο*, που προειδοποιεί τον αναγνώστη ότι η υπόθεση που ακολουθεί είναι η άρνηση της πρότασης την οποία θέλουμε να αποδείξουμε.


ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **2.4**. Τα πρώτα τέσσερα στάδια στην κατασκευή του $\mathcal{C}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε πρώτα μιαν ακολουθία συνόλων $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \dots$ πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $\mathcal{C}_0 = [0,1]$.
2. Κάθε $\mathcal{C}_n$ είναι ένωση $2^n$ κλειστών διαστημάτων και
$$\mathcal{C}_0 \supseteq \mathcal{C}_1 \supseteq \cdots \mathcal{C}_n \supseteq \mathcal{C}_{n+1} \supseteq \cdots .$$
3. Το $\mathcal{C}_{n+1}$ κατασκευάζεται αφαιρώντας το (ανοικτό) μέσο τρίτο κάθε διαστήματος του $\mathcal{C}_n$, δηλαδή με την αντικατάσταση κάθε κλειστού διαστήματος $[a,b]$ στο $\mathcal{C}_n$ από τα δύο κλειστά διαστήματα
$$L[a,b] = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)],$$
$$R[a,b] = [a + \frac{2}{3}(b-a), b].$$

Σε κάθε δυαδική ακολουθία $\delta \in \Delta$ αντιστοιχίζουμε τώρα μιαν ακολουθία κλειστών διαστημάτων
$$F_0^\delta, F_1^\delta, \dots ,$$
με την εξής αναδρομή:
$$F_0^\delta = \mathcal{C}_0 = [0,1],$$
$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} LF_n^\delta, & \text{αν } \delta(n) = 0, \\ RF_n^\delta, & \text{αν } \delta(n) = 1. \end{cases}$$
Επαγωγικά, για κάθε $n$, το $F_n^\delta$ είναι ένα από τα κλειστά διαστήματα του $\mathcal{C}_n$ μήκους $3^{-n}$, και προφανώς
$$F_0^\delta \supseteq F_1^\delta \supseteq \cdots .$$
Η θεμελιακή ιδιότητα **πληρότητας των πραγματικών αριθμών** συνεπάγεται τώρα ότι η τομή αυτής της ακολουθίας δεν είναι κενή, μάλιστα περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό, ας τον ονομάσουμε
$$f(\delta) = \text{το μόνο στοιχείο της τομής } \bigcap_{n=0}^\infty F_n^\delta.$$
Η συνάρτηση $f$ απεικονίζει το αναπαρίθμητο σύνολο $\Delta$ μέσα στο σύνολο
$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^\infty \mathcal{C}_n,$$
το λεγόμενο **σύνολο του Cantor**, και για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι η $f$ είναι ένα-προς-ένα. Αλλά αν το $n$ είναι ο ελάχιστος αριθμός

όπου $\delta(n) \neq \varepsilon(n)$ και (π.χ.) $\delta(n) = 0$, έχουμε $F_n^\delta = F_n^\varepsilon$ από την επιλογή του $n$,

$$f(\delta) \in F_{n+1}^\delta = LF_n^\delta,\ f(\varepsilon) \in F_{n+1}^\varepsilon = RF_n^\delta,\ \text{και } LF_n^\delta \cap RF_n^\delta = \emptyset,$$

που σημαίνει ότι πράγματι η $f$ είναι μονομορφισμός. $\dashv$

Η επίκληση της πληρότητας των πραγματικών αριθμών είναι το μη τετριμμένο στοιχείο αυτής της απόδειξης, και είναι απαραίτητη, αφού όλη η κατασκευή εκτός από την τελευταία γραμμή μπορεί να επαναληφθεί για το $\mathbb{Q}$ που είναι απαριθμητό — χωρίς βέβαια να είναι πλήρες. Την πληρότητα των πραγματικών αριθμών θα μελετήσουμε αργότερα προσεκτικά, στο Παράρτημα **A**.

Η θεμελιακή σημασία αυτού του θεωρήματος ήταν προφανής απαρχής, ιδιαίτερα επειδή ο Cantor το εφάρμοσε αμέσως σε μια σημαντική πρόταση της θεωρίας των αλγεβρικών αριθμών. Πριν εκθέσουμε αυτή την εφαρμογή χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς και λήμματα.

**2.15. Ορισμός.** Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε σύνολο $B$, το σύνολο των (**διατεταγμένων**) **ζευγών** των $A, B$ συμβολίζεται με το

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, για κάθε $n \geq 2$,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n\},$$
$$A^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}.$$

Το $A_1 \times \cdots \times A_n$ λέγεται το **Καρτεσιανό γινόμενο** των $A_1, \dots, A_n$.

**2.16. Λήμμα.** (1) *Αν τα $A_1, \dots, A_n$ είναι απαριθμητά, τότε και το Καρτεσιανό τους γινόμενο $A_1 \times \cdots \times A_n$ είναι επίσης απαριθμητό.*

(2) *Για κάθε απαριθμητό σύνολο $A$, τα $A^n$ ($n \geq 2$) και η ένωσή τους*

$$\bigcup_{n=2}^\infty A^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid n \geq 2, x_1, \dots, x_n \in A\}$$

*είναι επίσης απαριθμητά σύνολα.*

Απόδειξη. (1) Αν κάποιο $A_i$ είναι κενό, τότε και το γινόμενο είναι κενό, εξ ορισμού. Διαφορετικά, για δύο σύνολα $A, B$, έχουμε μιαν απαρίθμηση

$$B = \{b_0, b_1, \dots\}$$

του $B$, προφανώς

$$A \times B = \bigcup_{n=0}^\infty (A \times \{b_n\}),$$

και κάθε $A \times \{b_n\}$ είναι ισοπληθικό με το $A$ (και επομένως απαριθμητό) με την αντιστοιχία $(x \mapsto (x, b_n))$. Έτσι έχουμε το ζητούμενο για $n = 2$. Για να αποδείξουμε την πρόταση για όλα τα $n \geq 2$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$A_1 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1} =_c (A_1 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$$

με την αντιστοιχία

$$f(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = ((a_1, \dots, a_n), a_{n+1}).$$

Έτσι, αν κάθε γινόμενο από $n \geq 2$ απαριθμητούς παράγοντες είναι απαριθμητό, τότε απαριθμητό θα είναι και κάθε γινόμενο από $n+1$ παράγοντες, και έτσι, με επαγωγή έχουμε το (1).

(2) Κάθε $A_n$ είναι απαριθμητό από το (1), και με μία ακόμα επίκληση στο Θεώρημα **2.10** συνάγουμε ότι το $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ είναι επίσης απαριθμητό. ⊣

**2.17. Ορισμός.** Ένας πραγματικός αριθμός $\alpha$ είναι **αλγεβρικός** αν είναι ρίζα κάποιου πολυώνυμου

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

με ακέραιους συντελεστές $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $(n \geq 1, a_n \neq 0)$, δηλαδή αν

$$P(\alpha) = 0.$$

Τυπικά παραδείγματα αλγεβρικών αριθμών είναι οι $\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{2})^2$ (γιατί;) αλλά και η πραγματική ρίζα της εξίσωσης $x^5 + x + 1 = 0$ που υπάρχει (γιατί;) αλλά που δεν μπορεί να εκφραστεί με ριζικά σύμφωνα με ένα κλασικό θεώρημα του Abel. Το βασικό αποτέλεσμα (από την Άλγεβρα) για τους αλγεβρικούς αριθμούς που θα χρειαστούμε, είναι ότι *ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ έχει το πολύ $n$ πραγματικές ρίζες.*

**2.18. Πόρισμα.** *Το σύνολο $K$ των πραγματικών αλγεβρικών αριθμών είναι απαριθμητό* (Cantor), *και επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί που δεν είναι αλγεβρικοί* (Liouville).

Απόδειξη. Το σύνολο $\Pi$ όλων των πολυώνυμων με ακέραιους συντελεστές είναι απαριθμητό, αφού κάθε τέτοιο πολυώνυμο καθορίζεται από την ακολουθία των συντελεστών του, και επομένως υπάρχει αντιστοιχία του $\Pi$ με το απαριθμητό $\bigcup_{n=2}^{\infty} \mathbb{Z}^n$. Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$, το σύνολο των ριζών του

$$\Lambda(P(x)) = \{\alpha \mid P(\alpha) = 0\}$$

είναι πεπερασμένο και επομένως απαριθμητό. Έπεται ότι το σύνολο των αλγεβρικών $K$ είναι ένωση μιας ακολουθίας πεπερασμένων συνόλων και επομένως επίσης απαριθμητό. ⊣

Αυτή η πρώτη εφαρμογή της καινούριας (τότε) θεωρίας συνόλων έπαιξε σημαντικό ρόλο στη γρήγορη και ευνοϊκή παραδοχή της από τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, επειδή η προηγούμενη απόδειξη του Liouville (ότι υπάρχουν μη αλγεβρικοί αριθμοί) ήταν δύσκολη. Ο Cantor απέδειξε κάτι πιο ισχυρό, ότι «σχεδόν όλοι» οι πραγματικοί αριθμοί δεν είναι αλγεβρικοί, με πολύ απλούστερη απόδειξη που χρησιμοποιεί μόνο το γεγονός ότι ένα πολυώνυμο βαθμού $n$ δεν μπορεί αν έχει περισσότερες από $n$ ρίζες, την πληρότητα του $\mathbb{R}$, και, φυσικά, τη νέα μέθοδο της *απαρίθμησης των μελών άπειρων συνόλων.*

Μέχρι τώρα έχουμε αποδείξει την ύπαρξη μόνο δύο τάξεων απείρου, αυτήν του $\mathbb{N}$ —τα απαριθμητά, άπειρα σύνολα— και αυτήν του $\mathbb{R}$. Υπάρχουν πολλές άλλες.

**2.19. Ορισμός.** Το **δυναμοσύνολο** (powerset) $\mathcal{P}(A)$ ενός συνόλου $A$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $A$,

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \text{ είναι σύνολο και } X \subseteq A\}.$$

**2.20. Άσκηση.** *Για όλα τα σύνολα* $A, B$,

$$A =_c B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B).$$

**2.21. Θεώρημα** (Cantor). *Για κάθε σύνολο* $A$,

$$A <_c \mathcal{P}(A),$$

*δηλαδή* $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ *αλλά* $A \neq_c \mathcal{P}(A)$. *Ειδικότερα, δεν υπάρχει επιμορφισμός* $\pi : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$.

Απόδειξη. Το ότι $A \leq_c \mathcal{P}(A)$ φανερώνεται από το μονομορφισμό

$$(x \mapsto \{x\}),$$

που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο $x$ του $A$ το **μονοσύνολο** $\{x\}$ με μόνο ένα στοιχείο, το $x$. (Προσέξτε: το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι διαφορετικό αντικείμενο από το στοιχείο $x$, που πιθανόν δεν είναι καν σύνολο!)

Προς απαγωγή σε άτοπο, δεχόμαστε ότι υπάρχει κάποια αντιστοιχία

$$\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$$

που δείχνει ότι $A =_c \mathcal{P}(A)$, και ορίζουμε το σύνολο

$$B = \{x \in A \mid x \notin \pi(x)\}.$$

έτσι που για κάθε $x \in A$,

$$x \in B \iff x \notin \pi(x). \tag{2-1}$$

Αφού το $B$ είναι υποσύνολο του $A$ και η $\pi$ είναι επιμορφισμός, πρέπει να υπάρχει κάποιο $b \in A$ ώστε $B = \pi(b)$· θέτωντας $x = b$ και $\pi(b) = B$ στη (2-1), καταλήγουμε στην αντιφατική ισοδυναμία

$$b \in B \iff b \notin B. \qquad \dashv$$

Υπάρχουν λοιπόν πολλές τάξεις απείρου, και ειδικότερα (τουλάχιστον) αυτές των συνόλων

$$\mathbb{N} <_c \mathcal{P}(\mathbb{N}) <_c \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) <_c \cdots.$$

Αν ορίσουμε τα σύνολα $T_n$ με την αναδρομή

$$\begin{aligned} T_0 &= \mathbb{N}, \\ T_{n+1} &= \mathcal{P}(T_n), \end{aligned} \tag{2-2}$$

τότε η ένωσή τους $T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από κάθε $T_n$, Πρόβλημα **x2.8**. Η ταξινόμηση και μελέτη των τάξεων απείρου είναι ένα από τα κεντρικά προβλήματα της συνολοθεωρίας.

Μια γενικότερη έννοια από αυτήν του δυναμοσυνόλου, είναι οι *χώροι συναρτήσεων*.

**2.22. Ορισμός.** Για όλα τα σύνολα $A, B$,

$$\begin{aligned} (A \to B) &=_{\text{ορ}} \{f \mid f : A \to B\} \\ &= \text{ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$

**2.23. Άσκηση.** *Αν* $A_1 =_c A_2$ *και* $B_1 =_c B_2$, *τότε* $(A_1 \to B_1) =_c (A_2 \to B_2)$.

Οι χώροι συναρτήσεων αποτελούν "γενικεύσεις" των δυναμοσυνόλων επειδή κάθε υποσύνολο $X \subseteq A$ αντιπροσωπεύεται από τη *χαρακτηριστική* του συνάρτηση $c_X : A \to \{0,1\}$,

$$c_X(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } t \in A \cap X, \\ 0, & \text{if } t \in A \setminus X, \end{cases} \quad (t \in A). \tag{2-3}$$

Μπορούμε να ανακτήσουμε το $X$ από τη $c_X$,

$$X = \{t \in A \mid c_X(t) = 1\},$$

που συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $(X \mapsto c_X)$ είναι αντιστοιχία του $\mathcal{P}(A)$ με το $(A \to \{0,1\})$. Έτσι,

$$(A \to \{0,1\}) =_c \mathcal{P}(A) >_c A, \tag{2-4}$$

και οι χώροι συναρτήσεων μας οδηγούν σε μεγάλα, μη απαριθμητά σύνολα. Το επόμενο προφανές πρόβλημα είναι να συγκρίνουμε ως προς το πλήθος αυτά τα αναπαρίθμητα σύνολα, ξεκινώντας από τα δύο απλούστερα: το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών.

**2.24. Λήμμα.** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού έχουμε ήδη δείξει ότι $\Delta \leq_c \mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \Delta$. Αυτό όμως έπεται άμεσα από τη (2-4), αφού $\Delta = (\mathbb{N} \to \{0,1\})$. ⊣

**2.25. Λήμμα.** $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, αφού το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$ και επομένως $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Αυτό φανερώνεται από τη συνάρτηση

$$x \mapsto \pi(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} \subseteq \mathbb{Q}$$

που είναι μονομορφισμός, επειδή αν $x < y$ είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει κάποιος ρητός $q$ ανάμεσά τους, δηλαδή $x < q < y$ και $q \in \pi(y) \setminus \pi(x)$. ⊣

Απ' αυτά τα απλά Λήμματα έπεται ότι η ισοπληθικότητα $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ θα είναι άμεσο πόρισμα του επόμενου βασικού θεωρήματος.

**2.26. Θεώρημα** (Schröder-Bernstein). *Για όλα τα σύνολα $A, B$,*

$$\text{αν } A \leq_c B \text{ και } B \leq_c A, \text{ τότε } A =_c B.$$

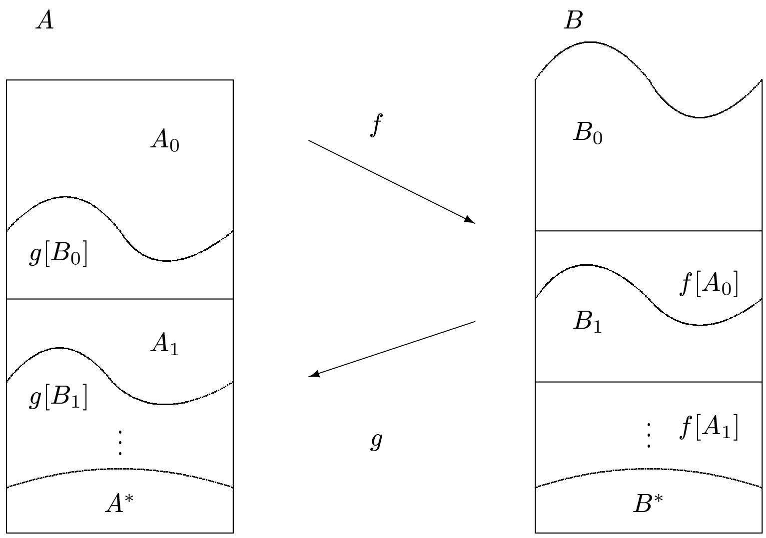
ΑΠΟΔΕΙΞΗ.[4] Υποθέτουμε ότι υπάρχουν μονομορφισμοί

$$f : A \rightarrowtail B, \; g : B \rightarrowtail A,$$

και ορίζουμε τα σύνολα $A_n$, $B_n$ με την αναδρομή

$$\begin{aligned} A_0 &= A, & B_0 &= B, \\ A_{n+1} &= gf[A_n], & B_{n+1} &= fg[B_n], \end{aligned}$$

[4] Μία διαφορετική απόδειξη σκιαγραφείται στα Προβλήματα **x4.26**, **x4.27**.




Διαγραμμα **2.5**. Απόδειξη του Θεωρήματος Schröder-Bernstein.

όπου $fg[X] = \{f(g(x)) \mid x \in X\}$ και ανάλογα για τη συνάρτηση $gf$. Με επαγωγή στο $n$ (εύκολα)

$$\begin{aligned} A_n &\supseteq g[B_n] \supseteq A_{n+1}, \\ B_n &\supseteq f[A_n] \supseteq B_{n+1}, \end{aligned}$$

ώστε έχουμε τις «αλυσίδες συνόλων»

$$\begin{aligned} A_0 &\supseteq g[B_0] \supseteq A_1 \supseteq g[B_1] \supseteq A_2 \cdots, \\ B_0 &\supseteq f[A_0] \supseteq B_1 \supseteq f[A_1] \supseteq B_2 \cdots. \end{aligned}$$

Ορίζουμε επίσης τις τομές

$$A^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \ B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n,$$

έτσι ώστε

$$B^* = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] \supseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{n+1} = B^*$$

και αφού η $f$ είναι μονομορφισμός, από το Πρόβλημα **x1.7**,

$$f[A^*] = f[\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n] = \bigcap_{n=0}^{\infty} f[A_n] = B^*.$$

Συνεπώς η $f$ είναι αντιστοιχία του $A^*$ με το $B^*$. Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned} A &= A^* \cup (A_0 \setminus g[B_0]) \cup (g[B_0] \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus g[B_1]) \cup (g[B_1] \setminus A_2) \ldots \\ B &= B^* \cup (B_0 \setminus f[A_0]) \cup (f[A_0] \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus f[A_1]) \cup (f[A_1] \setminus B_2) \ldots \end{aligned}$$

και αυτές οι ακολουθίες είναι διαχωρισμένες, δηλαδή κανένα σύνολο δεν έχει κοινά στοιχεία με κάποιο άλλο. Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να ελέγξουμε ότι για κάθε $n$,

$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus B_{n+1},$$
$$g[B_n \setminus f[A_n]] = g[B_n] \setminus A_{n+1},$$

από τις οποίες η πρώτη (π.χ.) αληθεύει επειδή η $f$ είναι μονομορφισμός και

$$f[A_n \setminus g[B_n]] = f[A_n] \setminus fg[B_n] = f[A_n] \setminus B_{n+1}.$$

Τελικά έχουμε την αντιστοιχία $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B$,

$$\pi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } x \in A^* \text{ ή } (\exists n)[x \in A_n \setminus g[B_n]], \\ g^{-1}(x), & \text{αν } x \notin A^* \text{ και } (\exists n)[x \in g[B_n] \setminus A_{n+1}], \end{cases}$$

που φανερώνει ότι $A =_c B$ και τελειώνει την απόδειξη. ⊣

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder-Bernstein μπορούμε να αποδείξουμε πολλές ισοπληθικότητες που αλλιώς είναι δύσκολες.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 2

**x2.1.** Για κάθε $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta$ πραγματικούς αριθμούς, $\infty$ ή $-\infty$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες

$$(\alpha, \beta) =_c (0, 1) =_c \mathbb{R}.$$

**x2.2.** Για κάθε $\alpha < \beta$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες

$$[\alpha, \beta) =_c [\alpha, \beta] =_c \mathbb{R}.$$

**x2.3.** $\mathcal{P}(\mathbb{N}) =_c \mathbb{R} =_c \mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 2$.

**x2.4.** Για όλα τα σύνολα $A, B$, $(A \to B) \leq_c \mathcal{P}(A \times B)$. Υποδειξη. Αντιπροσώπευσε κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ με το *γράφημά* της

$$G_f = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}.$$

**x2.5.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

$^*$**x2.6.** $(\mathbb{N} \to \mathbb{R}) =_c \mathbb{R}$.

$^*$**x2.7.** Για όλα τα σύνολα $A, B, C$,

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

Υποδειξη. Για κάθε $p : A \times B \to C$, όρισε την $\pi(p) = q : A \to (B \to C)$ με τον τύπο

$$q(x)(y) = p(x, y).$$

**x2.8.** Με τον ορισμό (2-2), για κάθε $m$,

$$T_m <_c T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n.$$

Για τα τελευταία δύο προβλήματα χρειάζεται κάποια οικειότητα με τις συνεχείς συναρτήσεις.

$^*$**x2.9.** Το σύνολο $C[0,1]$ όλων των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

$^*$**x2.10.** Το σύνολο των μονοτονικών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εκθέσαμε τα πρώτα βασικά αποτελέσματα της συνολοθεωρίας όπως τη δημιούργησε ο Cantor και οι πρωτοπόροι μαθηματικοί που τον ακολούθησαν στα τελευταία είκοσι πέντε χρόνια του 19ου αιώνα. Μέχρι την αρχή του 20ού αιώνα, η θεωρία αυτή ανδρώθηκε και δικαιώθηκε με πολλές και σημαντικές εφαρμογές, ιδιαίτερα στην ανάλυση. Η μεγαλύτερή της επιτυχία ήταν (ίσως) η δημιουργία μιας εξαιρετικά όμορφης και χρήσιμης θεωρίας *υπερπεπερασμένης αριθμητικής*, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Μέχρι το 1900, δύο βασικά προβλήματα σχετικά με την έννοια της ισοπληθικότητας δεν είχαν ακόμη λυθεί. Αυτά έπαιξαν αργότερα αποφασιστικό ρόλο στην εξέλιξη της συνολοθεωρίας και θα τα μελετήσουμε προσεκτικά στα επόμενα κεφάλαια. Εδώ τα διατυπώνουμε μόνο ως εικασίες.

**3.1. Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων.**[5] *Για όλα τα σύνολα $A$, $B$, είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$.*

**3.2. Υπόθεση του Συνεχούς** (Continuum Hypothesis). Δεν υπάρχει σύνολο πραγματικών αριθμών $X$ με πλήθος ενδιάμεσο αυτών του $\mathbb{N}$ και και του $\mathbb{R}$, δηλαδή

$$\textbf{(CH)} \qquad (\forall X \subseteq \mathbb{R})[X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathbb{R}].$$

Εφόσον $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$, η **CH** είναι ειδική περίπτωση της **Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς** (Generalized Continuum Hypothesis),δηλαδή της υπόθεσης ότι για κάθε άπειρο σύνολο $A$,

$$\textbf{(GCH)} \qquad (\forall X \subseteq \mathcal{P}(A))[X \leq_c A \vee X =_c \mathcal{P}(A)].$$

Αν και οι δύο αυτές εικασίες αληθεύουν, τότε οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ και οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$ εκπροσωπούν τις δύο ελάχιστες «τάξεις απείρου»: κάθε άπειρο σύνολο είναι ή απαριθμητό ή ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$ ή «αυστηρά πολυπληθέστερο» του $\mathbb{R}$.

[5] Ο Cantor ανήγγειλε το «θεώρημα συγκρισιμότητας πληθαρίθμων» το 1895 και το 1899 σκιαγράφησε μια κάπως προβληματική απόδειξη σε ένα γράμμα στον Dedekind, το οποίο όμως δεν δημοσιεύτηκε μέχρι το 1932. Μάλλον είναι πιο κοντά στην αλήθεια να πούμε ότι μέχρι το 1900 (τουλάχιστον) το πρόβλημα της συγκρισιμότητας των συνόλων ως προς το πλήθος ήταν ακόμη άλυτο.

Σ' αυτή τη διαισθητική της φάση, η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε με βάση τον ορισμό της έννοιας του συνόλου που έδωσε ο Cantor όπως τον διατυπώσαμε στην Εισαγωγή, περίπου όπως αποδείξαμε και εμείς τα βασικά αποτελέσματά της στο Κεφάλαιο **2**. Αν εξετάσουμε προσεχτικά αυτές τις αποδείξεις θα δούμε ότι όλες στηρίζονται στην ιδιότητα της έκτασης (1-1) και στην ακόλουθη παραδοχή:

**3.3. Γενική Αρχή Συμπερίληψης** (General Comprehension Principle). Για κάθε $n$-μελή οριστική συνθήκη (definite condition) $P$, υπάρχει ένα σύνολο

$$A = \{\vec{x} \mid P(\vec{x})\}$$

με μέλη ακριβώς τις $n$-άδες αντικειμένων που ικανοποιούν την $P(\vec{x})$, έτσι ώστε για κάθε $\vec{x}$,

$$\vec{x} \in A \iff P(\vec{x}). \tag{3-1}$$

Η ιδιότητα της έκτασης συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο $A$ ικανοποιεί την (3-1), και καλούμε αυτό το $A$ **έκταση** (extension) ή **συμπερίληψη** (comprehension) της συνθήκης $P$.

**3.4. Οριστικές συνθήκες και τελεστές.** Ο περιορισμός της αρχής σε **οριστικές συνθήκες** είναι απαραίτητος για να αποφύγουμε άσχετες με τα μαθηματικά αοριστίες, όπως το σύνολο

$$\{x \mid x \text{ έντιμος πολιτικός}\}$$

για το οποίο ίσως υπάρχει αντιλογία αν περιέχει τον κύριο Τάδε ή την κυρία Δείνα. Διαισθητικά, μια $n$-μελής συνθήκη $P$ είναι οριστική αν για κάθε $n$-άδα αντικειμένων $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι καθορισμένο χωρίς αμφισβήτηση αν η $P(\vec{x})$ αληθεύει ή όχι. Παραδείγματος χάριν, οι διμελείς συνθήκες

$$\begin{aligned} P(x, y) &\iff_{\text{ορ}} \text{ ο } x \text{ είναι γονιός του } y, \\ S(s, t) &\iff_{\text{ορ}} \text{ οι } s \text{ και } t \text{ είναι αδέλφια} \\ &\iff (\exists x)[P(x, s) \,\&\, P(x, t)] \end{aligned}$$

είναι και οι δύο οριστικές, αν δεχτούμε (για το παράδειγμα) ότι οι νόμοι της Βιολογίας καθορίζουν πατρότητα χωρίς αμφισβήτηση. Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης εφαρμόζεται, και μπορούμε να δημιουργήσουμε τα σύνολα ζευγών

$$\begin{aligned} A &=_{\text{ορ}} \{(x, y) \mid \text{ο } x \text{ είναι γονιός του } y\}, \\ B &=_{\text{ορ}} \{(s, t) \mid \text{οι } s \text{ και } t \text{ είναι αδέλφια}\}. \end{aligned}$$

Δεν απαιτούμε από μιαν οριστική συνθήκη να είναι *αποκρίσιμη*, δηλαδή να έχουμε μια κατασκευαστική μέθοδο υπολογισμού της αληθοτιμής της. Παραδείγματος χάριν, είναι γνωστό το πρόβλημα της αριθμοθεωρίας, αν υπάρχουν άπειρα ζεύγη πρώτων αριθμών, και η αληθοτιμή της συνθήκης

$$G(n) \iff_{\text{ορ}} n \in \mathbb{N} \,\&\, (\exists m > n)[m, m+2 \text{ είναι πρώτοι}]$$

δεν είναι γνωστή για μεγάλες τιμές του $n$. Παρ' όλα αυτά, η συνθήκη $G$ είναι αναμφισβήτητα οριστική και μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε στον ορισμό του συνόλου

$$C =_{\text{ορ}} \{n \in \mathbb{N} \mid (\exists m > n)[m, m+2 \text{ είναι και οι δύο πρώτοι}]\}.$$

Αν η *Εικασία των Διδύμων Πρώτων* αληθεύει, τότε $C = \mathbb{N}$, αν όχι, τότε το $C$ είναι κάποιο μεγάλο αρχικό τμήμα των φυσικών αριθμών.

Κατ' αναλογίαν, ένας **τελεστής** $n$ μεταβλητών $F$ είναι **οριστικός** αν αντιστοιχίζει σε κάθε $n$-άδα αντικειμένων $\vec{x}$ ένα συγκεκριμένο, αναμφισβήτητα καθορισμένο αντικείμενο $w = F(\vec{x})$. Π.χ. αν δεχτούμε πάλι ότι η Βιολογία δεν θα μας προδώσει, ο τελεστής

$$F(x) =_{\text{ορ}} \begin{cases} \text{ο πατέρας του } x, & \text{αν ο } x \text{ είναι άνθρωπος,} \\ x, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

είναι οριστικός. Ο κάπως ανόητος διαχωρισμός περιπτώσεων είναι τυπικά αναγκαίος, για να βεβαιωθούμε ότι ο $F$ πάντα καθορίζει μια τιμή, για κάθε $x$. Αν χρειαζόμασταν αυτό το παράδειγμα σε μια πραγματική εφαρμογή, θα δίναμε τον ορισμό με το απλούστερο

$$F(x) =_{\text{ορ}} \text{ ο πατέρας του } x,$$

αφήνοντας στον αναγνώστη την αγγαρεία να διαλέξει κάποια συμβατική και άνευ σημασίας τιμή $F(x)$ για μη ανθρώπους $x$. Όπως και για τις συνθήκες, δεν επιμένουμε ότι ένας οριστικός τελεστής πρέπει να είναι *υπολογίσιμος*, μάλιστα η αμφιλογία για την τιμή του $F$ στο συγκεκριμένο παράδειγμα φτάνει μερικές φορές μέχρι τα δικαστήρια.

Εκτός από τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, στο προηγούμενο κεφάλαιο δεχτήκαμε και την ύπαρξη συγκεκριμένων συνόλων όπως το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και ακόμη την οριστικότητα βασικών σχέσεων από τα κλασικά μαθηματικά, όπως την

$$\text{Function}(f, A, B) \iff \text{η } f \text{ είναι συνάρτηση από το } A \text{ στο } B.$$

Αυτό δεν είναι πρόβλημα, καθώς αυτές τις προϋποθέσεις πάντοτε τις δέχονται οι μαθηματικοί, συνειδητά ή όχι.

Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης έχει μια ακατανίκητη έλξη, ακολουθεί τόσο φυσικά από τις διαισθήσεις μας για την έννοια του συνόλου, ώστε το επόμενο θεώρημα καλείται «παράδοξο».

**3.5. Το παράδοξο του Russell.** *Η Γενική Αρχή Συμπερίληψης δεν ισχύει.*

Αποδειξη. Από τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, το σύνολο όλων των συνόλων

$$V =_{\text{ορ}} \{x \mid \text{το } x \text{ είναι σύνολο}\}$$

είναι σύνολο, κι έχει την κάπως περίεργη ιδιότητα να ανήκει στον εαυτό του, $V \in V$. Τα κοινά μαθηματικά σύνολα —αριθμών, συναρτήσεων κ.λπ— βεβαίως δεν περιέχουν τον εαυτό τους, και είναι φυσικό να τα θεωρήσουμε ως μέλη ενός μικρότερου κόσμου συνόλων, που δημιουργούμε πάλι με επίκληση της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης,

$$R = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι σύνολο και } x \notin x\}.$$

Ο ορισμός του $R$, όμως, αμέσως συνεπάγεται ότι

$$R \in R \iff R \notin R,$$

που είναι προφανώς άτοπο. ⊣

«Παράδοξο», όταν δεν θα πει «λάθος», σημαίνει «γεγονός ενάντιο στις διαισθήσεις μας», και τέτοια παράδοξα είχαν ήδη βρεθεί αρκετά στη συνολοθεωρία πριν από την ανακοίνωση του Russell το 1902, σε ένα ιστορικό γράμμα στον κορυφαίο Γερμανό φιλόσοφο και θεμελιωτή της μαθηματικής λογικής Gottlob Frege. Αυτά τα άλλα παράδοξα όμως ήταν κάπως τεχνικά και έθεταν σε αμφιβολία μόνο μέρη από τα πιο προχωρημένα κεφάλαια της θεωρίας του Cantor. Μπορούσε κανείς να εικάσει ότι κάποιο συστηματικό λάθος γινόταν στην ανώτερη συνολοθεωρία, κάτι σαν μια απρόσεκτη «διαίρεση διά του μηδενός» που σύντομα κάποιος θα έβρισκε πώς να το διορθώσει. Εξάλλου, τέτοιες αντιφάσεις και παράδοξα είχαν υπάρξει και στο λογισμό, και μετά την αυστηρή θεμελίωση αυτής της θεωρίας που μόλις είχε σχεδόν ολοκληρωθεί στο τέλος του αιώνα, όλα αποσβήστηκαν χωρίς να επηρεάσουν καθόλου τα ζωτικά μέρη της ανάλυσης. Το παράδοξο του Russell όμως ήταν κάτι τελείως διαφορετικό: απλό, σύντομο, άγγιζε την ουσία της βασικής έννοιας του συνόλου και την «προφανή» και μοναδική αρχή πάνω στην οποία είχε στηριχτεί όλη η θεωρία, και φαινομενικά την κατέστρεφε. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι το παράδοξο του Russell έφερε μια φιλοσοφική **κρίση αμφιβολίας** πρώτα στη συνολοθεωρία, και μέσα απ' αυτή, αργότερα, σε όλα τα μαθηματικά, που δεν ξεπεράστηκε τελείως για τριάντα χρόνια περίπου.

Μερικοί, όπως ο Γάλλος γεωμέτρης Poincaré και ο Ολλανδός τοπολόγος και φιλόσοφος Brouwer πρότειναν ριζοσπαστικές λύσεις στο πρόβλημα που —ουσιαστικά— απέρριπταν τη συνολοθεωρία και πολλά κλασικά μαθηματικά μαζί της, σαν «ψευδοθεωρίες» χωρίς ουσιαστικό περιεχόμενο. Απ' αυτούς που δίσταζαν να εγκαταλείψουν τον «παράδεισο του Cantor», πρώτος ο Russell επιχείρησε τη «σωτηρία» της συνολοθεωρίας από την καταστροφή με την περιώνυμή του **θεωρία των τύπων** (theory of types), η οποία όμως είναι δύσχρηστη στις εφαρμογές και δεν έγινε γενικά αποδεκτή από την πλειονότητα των μαθηματικών.[6] Σχεδόν παράλληλα με τον Russell, ο Zermelo πρότεινε το 1908 μια διαφορετική λύση που με τα χρόνια και την εργασία πολλών εξελίχτηκε στη σύγχρονη θεωρία των συνόλων, όπως την μελετάμε και την εφαρμόζουμε σήμερα.

Στο πρώτο του δημοσίευμα σ' αυτό το θέμα το 1908 ο Zermelo αντιμετώπισε το πρόβλημα πρακτικά. Χωρίς αμφιβολία η Γενική Αρχή Συμπερίληψης ήταν εσφαλμένη, αυτό είναι προφανές από το παράδοξο του Russell. Από την άλλη

[6] Η θεωρία των τύπων είχε μεγάλη επίδραση στην εξέλιξη της φιλοσοφίας και λογικής και μερικές από τις βασικές ιδέες της βρήκαν τελικά τη θέση τους και στη θεωρία συνόλων.

μεριά, οι συγκεκριμένες εφαρμογές αυτής της αρχής στις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων για τα σύνολα (όπως αυτών στο προηγούμενο κεφάλαιο) είναι ελάχιστες, απλές, κάπως προφανείς, και φαινομενικά μη προβληματικές.

> «Σ' αυτές τις περιστάσεις, δεν υπάρχει αυτή τη στιγμή για μας καμία άλλη επιλογή παρά να προχωρήσουμε προς την αντίθετη κατεύθυνση [από αυτήν της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης] και, ξεκινώντας από τη θεωρία συνόλων όπως αυτή έχει εξελιχθεί ιστορικά, να αναζητήσουμε αυτούς τους κανόνες που είναι απαραίτητοι για την εδραίωση των θεμελίων αυτού του κλάδου των μαθηματικών. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα πρέπει, από τη μια μεριά, να περιορίσουμε αυτούς τους κανόνες αρκετά ώστε να αποκλείσουμε όλες τις αντιφάσεις και, από την άλλη μεριά, πρέπει να τους δεχτούμε αρκετά ισχυρούς ώστε να διατηρήσουμε ό,τι είναι πολύτιμο σ' αυτή τη θεωρία».

Με άλλα λόγια, ο Zermelo πρότεινε να αντικαταστήσουμε τις άμεσες *διαισθήσεις* του Cantor για τα σύνολα που μας οδήγησαν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης με μερικά **αξιώματα**, υποθέσεις για τα σύνολα που τις δεχόμαστε «εξ ανάγκης», επειδή είναι απαραίτητες για τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων της υπάρχουσας θεωρίας.

Με μια τέτοια αμφίβολη, σχεδόν ύποπτη φιλοσοφική βάση ξεκίνησε η **αξιωματική συνολοθεωρία**, σίγουρα ένα από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα της επιστήμης του 20ού αιώνα. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα που είχε, όμως, από την αρχή, ήταν η μεγαλοφυΐα του Zermelo, που επέλεξε ένα εξαιρετικά φυσικό και εύχρηστο σύστημα αξιωμάτων. Κανένα από τα αξιώματα του Zermelo δεν έχει αφαιρεθεί ή σημαντικά αναθεωρηθεί και (μέχρι πρόσφατα) μόνο δύο αξιώματα προστέθηκαν στα εφτά δικά του στη δεκαετία 20 – 30, χρήσιμα για την ομαλή ανάπτυξη της συνολοθεωρίας αλλά που δεν αγγίζουν τις εφαρμογές της στα κλασικά μαθηματικά. Επιπλέον, το καθένα από τα αξιώματα του Zermelo εκφράζει μια διαισθητικά προφανή ιδιότητα των συνόλων που κατά φυσικό τρόπο συναντάμε στα μαθηματικά. Με το πέρασμα των χρόνων και τη χρήση δημιουργήθηκε μια καινούρια διαισθητική έννοια «εδραιωμένου συνόλου» που δεν οδηγεί σε αντιφάσεις και για την οποία τα αξιώματα της συνολοθεωρίας είναι τελείως προφανή. Θα επανέλθουμε στο πρόβλημα της θεμελιακής βάσης της συνολοθεωρίας, καλύτερα προετοιμασμένοι μετά τη μελέτη των βασικών, μαθηματικών της αποτελεσμάτων.

Το βασικό πρότυπο για την αξιωματοποίηση της συνολοθεωρίας ήταν βέβαια η αξιωματική γεωμετρία του Ευκλείδη, που για 2.000 χρόνια είχε εδραιωθεί ως το «τέλειο» παράδειγμα μαθηματικής θεωρίας. Αν μη τι άλλο, η αξιωματική μέθοδος ξεκαθαρίζει τα νερά και μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε ό,τι μαθηματικές δυσκολίες και αντιφάσεις ίσως υπάρχουν στις βασικές διαισθήσεις μας για τα μαθηματικά αντικείμενα που μελετάμε, από τυχόν προβλήματα της λογικής, δηλαδή πιθανά λάθη στις αποδείξεις μας. Όπως προχωράμε στη μελέτη των πορισμάτων από τα αξιώματα του Zermelo, θα είναι πολλές φορές χρήσιμο να υπενθυμίζουμε στον εαυτό μας το παράδειγμα της γεωμετρίας του Ευκλείδη.

**3.6. Η αξιωματική βάση της συνολοθεωρίας.** Δεχόμαστε εξαρχής ότι υπάρχει ένα **πεδίο** ή **κόσμος** (universe) **αντικειμένων** $\mathcal{W}$, μερικά από τα οποία είναι **σύνολα**, και κάποιες **οριστικές συνθήκες και τελεστές** στο $\mathcal{W}$, ανάμεσά τους οι βασικές συνθήκες

$$\begin{aligned} x = y &\iff \text{το αντικείμενο } x \text{ είναι το ίδιο με το } y, \\ \mathrm{Set}(x) &\iff \text{το } x \text{ είναι σύνολο}, \\ x \in y &\iff \mathrm{Set}(y) \text{ και το } x \text{ είναι μέλος του } y. \end{aligned}$$

Τα αντικείμενα του $\mathcal{W}$ που δεν είναι σύνολα τα λέμε **άτομα** (atoms ή urelements), αλλά δεν απαιτούμε την ύπαρξή τους· δηλαδή αφήνουμε ανοικτό το ενδεχόμενο όλα τα αντικείμενα να είναι σύνολα. Οι οριστικές συνθήκες και οι τελεστές δεν είναι ούτε σύνολα ούτε άτομα.

Έτσι βέβαια αρχίζει κάθε αξιωματική θεωρία. Στην Ευκλείδειο Γεωμετρία ξεκινάμε με την υπόθεση ότι υπάρχουν *σημεία*, *γραμμές* και διάφορα άλλα γεωμετρικά αντικείμενα, και ότι μερικές βασικές, οριστικές συνθήκες έχουν οριστεί πάνω σ' αυτά, π.χ. έχει νόημα να ρωτήσουμε αν «το σημείο $P$ κείται στην ευθεία $L$». Κατόπιν διατυπώνουμε τα κλασικά αξιώματα του Ευκλείδη γι' αυτά τα αντικείμενα και προχωράμε να αποδείξουμε συμπεράσματά τους. Η Γεωμετρία είναι κάπως περίπλοκη, υπάρχουν πολλών ειδών βασικά αντικείμενα και πολλά λεπτά αξιώματα που τα συνδέουν. Σε σύγκριση μ' αυτήν, η συνολοθεωρία του Zermelo είναι λιτή, ασκητική: έχει μόνο σύνολα και άτομα, και μόνο εφτά, απλά αξιώματα που τα συνδέουν. Στο υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου θα διατυπώσουμε έξι απ' αυτά τα αξιώματα, με λίγα σχόλια και παραδείγματα. Είναι κάπως ευκολότερο να αναβάλουμε τη διατύπωση του τελευταίου, έβδομου αξιώματος μέχρις ότου κατανοήσουμε μερικά από τα συμπεράσματα των πρώτων έξι στα αμέσως επόμενα κεφάλαια.

**3.7.** (**I**) **Αξίωμα Έκτασης** (Axiom of Extensionality). *Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε σύνολο $B$,*

$$A = B \iff (\forall x)[x \in A \iff x \in B].$$

**3.8.** (**II**) **Αξίωμα του Κενού Συνόλου και του Ζεύγους** (Emptyset and Pairset Axiom). (a) *Υπάρχει ένα «συμβατικό» σύνολο $\emptyset$ που δεν έχει κανένα μέλος.* (b) *Για κάθε $x$ και κάθε $y$, υπάρχει σύνολο $\{x, y\}$ με μοναδικά μέλη τα $x$ και $y$, έτσι που να ικανοποιείται η ισοδυναμία*

$$t \in A \iff t = x \vee t = y. \tag{3-2}$$

Το Αξίωμα Έκτασης συνεπάγεται ότι μόνο ένα κενό σύνολο υπάρχει, και ότι για όλα τα $x, y$, μόνο ένα σύνολο $A$ ικανοποιεί την (3-2). Αυτό το **δισύνολο** των $x$ και $y$ το συμβολίζουμε

$$\{x, y\} =_{\text{ορ}} \text{το μοναδικό σύνολο με μόνα μέλη τα } x, y.$$

Αν $x = y$, τότε $\{x, x\} = \{x\}$ είναι το **μονοσύνολο** του αντικειμένου $x$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το αξίωμα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά απλά σύνολα, π.χ. τα

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\},\ \dots,$$

αλλά καθένα απ' αυτά έχει το πολύ δύο μέλη!

**3.9. Άσκηση.** *Δείξε ότι* $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

**3.10.** (**III**) **Αξίωμα Εξειδίκευσης** *ή* **Διαχωρισμού**. (Separation Axiom ή Aussonderungsaxiom).*Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη $P$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \in B \iff x \in A \,\&\, P(x). \tag{3-3}$$

Από το Αξίωμα Έκτασης πάλι, μόνο ένα $B$ μπορεί να ικανοποιεί την (3-3) και το συμβολίζουμε

$$B = \{x \in A \mid P(x)\}.$$

Χαρακτηριστική συμβολή του Zermelo, αυτό το αξίωμα είναι προφανώς περιορισμός της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης που συνεπάγεται πολλά από τα «αγαθά» πορίσματά της. Π.χ. μπορούμε να ορίσουμε την τομή και τη διαφορά δύο συνόλων ως

$$A \cap B =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \in B\},$$
$$A \setminus B =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Η απόδειξη του παράδοξου του Russell μας δίνει ένα θεώρημα:

**3.11. Θεώρημα.** *Για κάθε σύνολο $A$, το σύνολο*

$$\mathbf{r}(A) =_{\text{ορ}} \{x \in A \mid x \notin x\} \tag{3-4}$$

*δεν είναι μέλος του $A$. Έπεται ότι η συλλογή όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο, δηλαδή δεν υπάρχει σύνολο $V$ που να ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \in V \iff \mathrm{Set}(x).$$

Απόδειξη. Προσέξτε πρώτα ότι το $\mathbf{r}(A)$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού. Αν (προς απαγωγή σε άτοπο) $\mathbf{r}(A) \in A$, τότε (όπως και πριν) ισχύει η ισοδυναμία

$$\mathbf{r}(A) \in \mathbf{r}(A) \iff \mathbf{r}(A) \notin \mathbf{r}(A),$$

που προφανώς είναι αντιφατική. $\dashv$

**3.12.** (**IV**) **Αξίωμα Δυναμοσυνόλου** (Powerset Axiom). *Για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ με μόνα μέλη τα υποσύνολα του $A$, δηλαδή*

$$X \in B \iff \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A. \tag{3-5}$$

Ο συμβολισμός $X \subseteq A$ είναι συντόμευση του $(\forall t)[t \in X \Longrightarrow t \in A]$. Το Αξίωμα Έκτασης συνεπάγεται ότι για κάθε $A$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί την (3-5) κι αυτό είναι βέβαια το **δυναμοσύνολο** του $A$, συμβολικά

$$\mathcal{P}(A) =_{\text{ορ}} \{X \mid \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A\}.$$

**3.13. Άσκηση.** $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *και* $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

**3.14. Άσκηση.** *Για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει σύνολο $B$ του οποίου μέλη είναι ακριβώς όλα τα μονοσύνολα των μελών του $A$, δηλαδή*

$$x \in B \iff (\exists t \in A)[x = \{t\}].$$

**3.15. (V) Αξίωμα Ένωσης** (Unionset Axiom). *Για κάθε σύνολο $\mathcal{E}$, υπάρχει ένα σύνολο $B$ με μέλη τα μέλη των μελών του $\mathcal{E}$, που ικανοποιεί δηλαδή την ισοδυναμία*

$$t \in B \iff (\exists X \in \mathcal{E})[t \in X]. \tag{3-6}$$

Από το Αξίωμα Έκτασης πάλι, για κάθε $\mathcal{E}$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί την (3-6), το ονομάζουμε **ένωση** του $\mathcal{E}$ και το συμβολίζουμε με

$$\bigcup \mathcal{E} =_{\text{op}} \{t \mid (\exists X \in \mathcal{E})[t \in X]\}.$$

Ο τελεστής της ένωσης είναι πιο χρήσιμος όταν το $\mathcal{E}$ είναι **οικογένεια συνόλων**, δηλαδή όταν το $\mathcal{E}$ και κάθε μέλος του $X \in \mathcal{E}$ είναι σύνολα. Αυτή είναι η περίπτωση στην απλούστερη εφαρμογή, που μας δίνει (επιτέλους) τον διμελή τελεστή της ένωσης συνόλων: θέτουμε

$$A \cup B = \bigcup \{A, B\}.$$

χρησιμοποιώντας τα αξιώματα (**II**) και (**V**), και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} t \in A \cup B &\iff (\exists X \in \{A, B\})[t \in X] \\ &\iff t \in A \vee t \in B. \end{aligned}$$

**3.16. Άσκηση.** $\bigcup \emptyset = \bigcup \{\emptyset\} = \emptyset$.

**3.17. (VI) Αξίωμα Απείρου** (Axiom of Infinity). *Υπάρχει κάποιο σύνολο $I$ που περιέχει το κενό σύνολο $\emptyset$ και το μονοσύνολο κάθε μέλους του, δηλαδή*

$$\emptyset \in I \,\&\, (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I].$$

Χωρίς να έχουμε αυστηρό ορισμό του «απείρου» ακόμη, είναι προφανές ότι οποιοδήποτε $I$ ικανοποιεί τις συνθήκες του αξιώματος είναι άπειρο, αφού

$$\emptyset \in I \,\&\, (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I].$$

και όλα αυτά τα σύνολα είναι διαφορετικά από το Αξίωμα Έκτασης. Η διαισθητική αντίληψη του αξιώματος του απείρου είναι ότι απαιτεί ακριβώς την ύπαρξη του συνόλου

$$I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\},$$

αλλά είναι απλούστερο (και αρκεί) να δεχτούμε για το $I$ τη χαρακτηριστική ιδιότητα του αξιώματος.

Η κοινή αντίληψη φιλοσόφων και μαθηματικών του 19ου αιώνα ήταν ότι η ύπαρξη απείρων συνόλων μπορεί να αποδειχτεί, και ειδικότερα, ότι είναι εφικτό να «κατασκευάσουμε» το σύνολο των φυσικών αριθμών από το τίποτα, «μόνο με τη Λογική». Όλες οι αποδείξεις που είχαν προταθεί στηρίζονταν στην εσφαλμένη

Γενική Αρχή Συμπερίληψης και οδηγούσαν σε αντιφάσεις. Σήμερα καταλαβαίνουμε τα πράγματα κάπως καλύτερα: η Λογική μπορεί να ταξινομήσει τους ορθούς τρόπους του «σκέπτεσθαι», αλλά (από τη φύση της) δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη ουδενός, πόσο μάλλον απείρων συνόλων. Με τη σωστή και σαφή αντιμετώπιση αυτού του θέματος στη διατύπωση ξέχωρου Αξιώματος Απείρου, ο Zermelo έκανε μια ιδιαίτερα σημαντική προσφορά στη διαδικασία αποβολής από τη Λογική οντολογικών απαιτήσεων και στη διαχώρισή της από τη μαθηματική ανάπτυξη της συνολοθεωρίας, προς όφελος και των δύο κλάδων.

**3.18. Αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές.** Ο Zermelo δέχτηκε τις *οριστικές συνθήκες* διαισθητικά, τις περιέγραψε περίπου όπως τις περιγράψαμε και εμείς στο **3.4**, και χρησιμοποίησε σε εφαρμογές του Αξιώματος Εξειδίκευσης πολλές πολύπλοκες συνθήκες χωρίς ξέχωρη απόδειξη της «οριστικότητάς» τους. Αυτό θα κάνουμε και εμείς, επειδή οι αποδείξεις οριστικότητας είναι βαρετές και σπάνια βοηθούν την κατανόηση. Αξίζει όμως εδώ, για μια φορά, να απαριθμήσουμε τις ελάχιστες (και προφανείς) ιδιότητες των οριστικών συνθηκών και τελεστών που αρκούν για να στηρίξουν όλες τις αποδείξεις που θα δώσουμε.

1. Οι εξής βασικές συνθήκες είναι οριστικές:

$$\begin{aligned} x = y &\iff_{\text{ορ}} \text{το } x \text{ και το } y \text{ είναι το ίδιο αντικείμενο,} \\ \mathrm{Set}(x) &\iff_{\text{ορ}} \text{το } x \text{ είναι σύνολο,} \\ x \in y &\iff_{\text{ορ}} \mathrm{Set}(y) \text{ και το } x \text{ είναι μέλος του } y, \end{aligned}$$

2. Για κάθε αντικείμενο $c$ και κάθε $n$, ο σταθερός τελεστής $n$ μεταβλητών

$$F(x_1, \dots, x_n) = c$$

είναι οριστικός.

3. Κάθε *τελεστής προβολής*

$$F_i(x_1, \dots, x_n) = x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

είναι οριστικός.

4. Αν η $P$ είναι οριστική συνθήκη $n+1$ μεταβλητών και για κάθε $n$-άδα $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ αντικειμένων υπάρχει ακριβώς ένα $w$ που ικανοποιεί την $P(\vec{x}, w)$, τότε ο τελεστής

$$F(\vec{x}) = \text{ το μοναδικό } w \text{ ώστε } P(\vec{x}, w)$$

είναι οριστικός.

5. Αν η $Q$ είναι οριστική συνθήκη $m$ μεταβλητών, αν κάθε $F_i$ είναι οριστικός τελεστής $n$ μεταβλητών για $i = 1, \dots, m$, και αν

$$P(\vec{x}) \iff_{\text{ορ}} Q(F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x})),$$

τότε η συνθήκη $P$ είναι επίσης οριστική.

6. Αν οι $Q$, $R$ και $S$ είναι οριστικές συνθήκες με τον προφανή αριθμό μεταβλητών, τότε οριστικές είναι και οι συνθήκες που ορίζονται απ' αυτές με

τις απλές πράξεις της λογικής, ως εξής:

$$\begin{aligned}
P_1(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \neg P(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ η } P(\vec{x}) \text{ δεν αληθεύει,}\\
P_2(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} Q(\vec{x})\ \&\ R(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ η } Q(\vec{x}) \text{ και η } R(\vec{x}) \text{ αληθεύουν,}\\
P_3(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} Q(\vec{x}) \vee R(\vec{x}) &&\Longleftrightarrow \text{ μια από τις } Q(\vec{x}),\ R(\vec{x}) \text{ αληθεύει,}\\
P_4(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\exists y)S(\vec{x},y) &&\Longleftrightarrow \text{ για κάποιο } y, \text{ αληθεύει η } S(\vec{x},y),\\
P_5(\vec{x}) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\forall y)S(\vec{x},y) &&\Longleftrightarrow \text{ για κάθε } y, \text{ αληθεύει η } S(\vec{x},y).
\end{aligned}$$

Όλες οι συνθήκες και οι τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε μπορούν να αποδειχτούν οριστικές με αναφορά σ' αυτές τις απλές ιδιότητες. Εκτός όμως από ένα πρόβλημα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου (γι' αυτούς που ενδιαφέρονται στη λογική), θα παραλείψουμε τέτοιες τεχνικές αποδείξεις οριστικότητας και συμβουλεύουμε τον αναγνώστη να κάνει το ίδιο: μας απομακρύνουν από το κύριο έργο μας, που είναι να μελετήσουμε τα σύνολα και όχι τις οριστικές συνθήκες και τους τελεστές.

**3.19. Κλάσεις**. Έχοντας απορρίψει με τόσες φαμφάρες τη Γενική Αρχή Συμπερίληψης, θα ισχυριστούμε τώρα ότι *για κάθε μονομελή οριστική συνθήκη* $P$, *υπάρχει μια* **κλάση**

$$A = \{x \mid P(x)\}, \tag{3-7}$$

*τέτοια ώστε για κάθε αντικείμενο* $x$,

$$x \in A \iff P(x). \tag{3-8}$$

Για να δώσουμε νόημα σ' αυτή την αρχή και να την αποδείξουμε, χρειαζόμαστε ένα συμβατικό συμβολισμό και τη σημαντική έννοια της «κλάσης». Κάθε σύνολο θα είναι κλάση, αλλά εξαιτίας του Παραδόξου του Russell **3.5**, απαραιτήτως υπάρχουν κλάσεις που δεν είναι σύνολα αλλιώς οι (3-7) και (3-8) μας οδηγούν αμέσως στο Παράδοξο του Russel, στην περίπτωση $P(x) \iff \mathrm{Set}(x)\,\&\,x \notin x$.

Καταρχήν ας συμφωνήσουμε ότι για κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη $P$, θα γράφουμε συνώνυμα

$$x \in P \iff P(x).$$

Παραδείγματος χάριν, αν Set είναι η βασική συνθήκη του «είναι σύνολο», αποδίδουμε ακριβώς το ίδιο νόημα στις εκφράσεις

$$x \in \mathrm{Set} \iff \mathrm{Set}(x) \iff \text{το } x \text{ είναι σύνολο.}$$

Τίποτα καινούριο σ' αυτό, μόνο ένας απλός, συμβατικός συμβολισμός.

Η μονομελής συνθήκη $P$ είναι **ισομελής** (ίση σε έκταση, coextensive) με ένα σύνολο $A$, αν τα αντικείμενα που την ικανοποιούν είναι ακριβώς τα μέλη του $A$, συμβολικά

$$P =_{\mathrm{e}} A \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\forall x)[P(x) \iff x \in A]. \tag{3-9}$$

Για παράδειγμα, αν

$$P(x) \iff x \neq x,$$

τότε $P =_{\rm e} \emptyset$. Από το Παράδοξο του Russell **3.5**, υπάρχουν συνθήκες που δεν είναι ισομελείς με σύνολα. Από την άλλη μεριά, *μια μονομελής, οριστική συνθήκη $P$ είναι ισομελής το πολύ με ένα σύνολο*: επειδή αν $P =_{\rm e} A$ και επίσης $P =_{\rm e} B$, τότε για κάθε $x$,

$$x \in A \iff P(x) \iff x \in B,$$

και $A = B$ από το Αξίωμα Έκτασης.

Εξ ορισμού, μια **κλάση** (class) $A$ *είναι είτε σύνολο, είτε μονομελής, οριστική συνθήκη που δεν είναι ισομελής με κανένα σύνολο.* Σε κάθε μονομελή συνθήκη $P$ αντιστοιχίζουμε την κλάση

$$\{x \mid P(x)\} =_{\rm o\rho} \begin{cases} \text{το μοναδικό σύνολο } A \text{ τέτοιο ώστε } P =_{\rm e} A, \\ \qquad \text{αν } P =_{\rm e} A \text{ για κάποιο σύνολο } A, \\ P, \quad \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{3-10}$$

Αν $A =_{\rm o\rho} \{x \mid P(x)\}$, τότε είτε η $P$ είναι ισομελής με κάποιο σύνολο, οπότε $P =_{\rm e} A$ και από τον ορισμό $x \in A \iff P(x)$, είτε η $P$ δεν είναι ισομελής με κανένα σύνολο, οπότε $A = P$ και

$$x \in A \iff x \in P \iff P(x) \quad \text{(από το συμβατικό συμβολισμό).}$$

Αυτό είναι ακριβώς η *Γενική Αρχή Συμπερίληψης για Κλάσεις* που διατυπώσαμε πιο πάνω στις (3-7) και (3-8).

**3.20. Άσκηση.** *Για κάθε σύνολο $A$,*

$$\{x \mid x \in A\} = A,$$

*άρα κάθε σύνολο είναι κλάση. Δείξε επίσης ότι*

$$\{X \mid \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A\} = \mathcal{P}(A).$$

**3.21. Άσκηση.** *Οι κλάσεις $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων και* Set *όλων των συνόλων δεν είναι σύνολα.*

Αν η $P$ είναι μια $n$-μελής οριστική συνθήκη και ο $F$ ένας $n$-μελής οριστικός τελεστής, θέτουμε:

$$\{F(\vec{x}) \mid P(\vec{x})\} =_{\rm o\rho} \{w \mid (\exists \vec{x})[P(\vec{x}) \,\&\, w = F(\vec{x})]\}. \tag{3-11}$$

Παραδείγματος χάριν, για $F(x) = \{x\}$,

$$\{\{x\} \mid x = x\} = \{w \mid (\exists x)[w = \{x\}]\} = \text{Η κλάση όλων των μονοσυνόλων.}$$

**3.22. Άσκηση.** *Η κλάση $\{\{x\} \mid x = x\}$ όλων των μονοσυνόλων δεν είναι σύνολο.*

**3.23. Άσκηση.** *Για κάθε κλάση $A$,*

$$\begin{aligned} \text{η } A \text{ είναι σύνολο} &\iff \text{για κάποια κλάση } B, A \in B \\ &\iff \text{για κάποιο σύνολο } X, A \subseteq X, \end{aligned}$$

*όπου η σχέση «υποκλάσης» ορίζεται όπως και για τα σύνολα,*

$$A \subseteq B \iff_{\rm o\rho} (\forall x)[x \in A \Longrightarrow x \in B].$$

**3.24. Επιλογή και Αντικατάσταση: προσοχή!** Η αξιωματοποίηση της συνολοθεωρίας δεν θα είναι πλήρης μέχρι να εισαγάγουμε το τελευταίο Αξίωμα Επιλογής του Zermelo στο Κεφάλαιο **8** και το μεταγενέστερο Αξίωμα Αντικατάστασης στο Κεφάλαιο **11**. Υπάρχουν σοβαροί λόγοι γι' αυτές τις αναβολές, που θα τους εξηγήσουμε εν καιρώ, αλλά επίσης υπάρχουν σοβαροί λόγοι για την εισαγωγή αυτών των αξιωμάτων: πολλά από τα απλούστατα συνολοθεωρητικά επιχειρήματα βασίζονται σ' αυτά τα αξιώματα, μεταξύ τους και μερικές από τις πλέον βασικές αποδείξεις του Κεφαλαίου **2**. Επομένως, μέχρι το Κεφάλαιο **8** πρέπει να προσέχουμε ιδιαίτερα ότι οι αποδείξεις μας μπορούν πράγματι να δικαιολογηθούν με βάση τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) και ότι δεν έχουμε αθέλητα χρησιμοποιήσει και κάποια άλλη «προφανή» αλήθεια για τα σύνολα, την οποία δεν έχουμε ακόμη ούτε αποδείξει ούτε συμπεριλάβει στα αξιώματα. Σε μερικά μέρη θα αποδείξουμε κάτι ασθενέστερο αυτού που πράγματι ισχύει, επειδή η πλήρης αλήθεια χρειάζεται Επιλογές ή Αντικατάσταση για να επιβεβαιωθεί. Αυτό μάλλον είναι καλό: θα μας κρατήσει επιφυλακτικούς και θα μας βοηθήσει να μάθουμε καλύτερα την τέχνη του *να συλλογίζεσαι αξιωματικά*.

**3.25. Περί ατόμων**.Οι περισσότερες σύγχρονες μελέτες στην αξιωματική συνολοθεωρία δέχονται ευθύς εξ αρχής τη λεγόμενη **Αρχή Αγνότητας** (Principle of Purity), ότι *δεν υπάρχουν άτομα* και ότι όλα τα αντικείμενα στο βασικό μας πεδίο αντικειμένων είναι *σύνολα*. Έχει μια ελκυστική απλότητα η ιδέα ενός τέτοιου μαθηματικού κόσμου όπου τα πάντα είναι σύνολα. Ακολουθώντας τον Zermelo έχουμε επιτρέψει την ύπαρξη ατόμων (χωρίς να την απαιτήσουμε), κυρίως επειδή αυτό κάνει τη συνολοθεωρία πιο φυσικά και άμεσα εφαρμόσιμη στις άλλες επιστήμες: θέλουμε τα αποτελέσματά μας να είναι εφαρμόσιμα σε σύνολα από *πλανήτες, μόρια ή βατράχια*, και τα βατράχια δεν είναι σύνολα. Οπωσδήποτε, το κόστος αυτής της επιλογής είναι ελάχιστο: σε μερικά μέρη πρέπει να πούμε «αντικείμενο», όπου οι εξορκιστές των ατόμων θα έλεγαν «σύνολο». Είναι όμως σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι κανένα από τα αξιώματά μας δεν απαιτεί την ύπαρξη ατόμων, και επομένως κανένα από τα συμπεράσματά τους δεν βασίζεται στα άτομα: ό,τι αποδείξουμε παραμένει αληθές στον κόσμο των αγνών συνόλων, εφόσον βέβαια αυτός ο κόσμος ικανοποιεί τα αξιώματα του Zermelo.

**3.26. Αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του κόσμου $\mathcal{W}$.** Όπως και να φανταστούμε το πεδίο $\mathcal{W}$ της αξιωματικής μας θεωρίας, είναι προφανές ότι δεν περιέχει όλα τα «στοιχεία της διαίσθησης ή του στοχασμού μας» στην έκφραση του Cantor: δεν περιέχει π.χ. αυτόν τον ίδιο κόσμο $\mathcal{W}$, που δεν είναι σύνολο και οπωσδήποτε είναι στοιχείο του στοχασμού μας και αναντίρρητο μαθηματικό αντικείμενο. Αν δεχτούμε ότι υπάρχουν μαθηματικά αντικείμενα έξω από το $\mathcal{W}$, τότε μπορούμε (χρήσιμα) να θεωρήσουμε τα αξιώματα ως *ιδιότητες κλειστότητας* του $\mathcal{W}$. Μέχρι στιγμής έχουμε δεχτεί ότι το $\mathcal{W}$ περιέχει το $\emptyset$, ότι είναι κλειστό για τους τελεστές του ζεύγους $\{x, y\}$ (**II**), δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ (**IV**) και ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ (**V**), ότι περιέχει κάθε οριστική υποσυλλογή κάθε συνόλου (**III**), και ότι περιέχει επίσης κάποιο σύνολο $I$ με τη χαρακτηριστική ιδιότητα του Αξιώματος Απείρου (**VI**). Μπορούμε ακόμη να ερμηνεύσουμε το Αξίωμα

Έκτασης (**I**) ως ιδιότητα κλειστότητας του $\mathcal{W}$: στη μη τετριμμένη κατεύθυνσή του, απαιτεί για όλα τα σύνολα $A, B$ τη συνεπαγωγή

$$A \neq B \Longrightarrow (\exists t)[t \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)], \tag{3-12}$$

δηλαδή κάθε ανισότητα $A \neq B$ μεταξύ δύο συνόλων δικαιολογείται από κάποιο «νόμιμο» αντικείμενο $t \in \mathcal{W}$ που ανήκει στο ένα και όχι στο άλλο.

Αυτή η ερμηνεία των αξιωμάτων είναι συμβατή με δύο διαφορετικές απόψεις του κόσμου $\mathcal{W}$. Η πρώτη θεωρεί τον κόσμο σαν κάτι χαώδες, άμορφο, δύσκολο στην κατανόηση και αδύνατο να οριστεί: αλλά κάθε αντικείμενο που ανήκει στο $\mathcal{W}$ είναι συγκεκριμένο, οριστικό, ολοκληρωμένο, και αυτές οι ιδιότητες των αντικειμένων αρκούν για να δικαιολογήσουν τις ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{W}$ που εκφράζουν τα αξιώματα. Ας την πούμε αυτή τη *μεγάλη άποψη* του $\mathcal{W}$. Η *μικρή άποψη* είναι ότι ο κόσμος $\mathcal{W}$ αποτελείται ακριβώς από εκείνα τα αντικείμενα των οποίων την ύπαρξη «εγγυώνται» τα αξιώματα, τα αντικείμενα δηλαδή που μπορούν να «κατασκευαστούν» με επανειλημμένες εφαρμογές των αξιωμάτων: τα αξιώματα αληθεύουν στο $\mathcal{W}$ επειδή συμπεριλάβαμε σ' αυτό, επίτηδες, ακριβώς όλα τα αντικείμενα που απαιτούνται από τις ιδιότητες κλειστότητας που εκφράζουν τα αξιώματα. Βεβαίως, καμία από αυτές τις απόψεις δεν μας δίνει αυστηρό, μαθηματικό ορισμό του $\mathcal{W}$, αλλά είναι προφανές ότι εκφράζουν διαφορετικές απόψεις του μαθηματικού κόσμου των συνόλων. Με τη μικρή άποψη, π.χ. δεν υπάρχουν άτομα, αφού κανένα από τα αξιώματα δεν τα απαιτεί, ενώ η μεγάλη άποψη επιτρέπει βατράχια ανάμεσα στα αντικείμενα του $\mathcal{W}$.

Υπάρχουν επιχειρήματα που ευνοούν και τις δύο αυτές απόψεις, οι οποίες έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στη φιλοσοφία της συνολοθεωρίας, ακόμη και στην πρακτική της, υποβάλλοντας το είδος των προβλημάτων που αξίζουν μελέτη. Θα επιστρέψουμε στο θέμα αυτό στο Κεφάλαιο **11** και στο Παράρτημα **B**, όταν θα έχουμε τη δυνατότητα να το συζητήσουμε κάπως πιο σοβαρά. Εν τω μεταξύ, θα αναφερθούμε συχνά στα αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{W}$, μια χρήσιμη κατανόησή τους που είναι συμβατή με κάθε φιλοσοφική πρόσβαση στη συνολοθεωρία.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 3

**x3.1.** Για κάθε μη κενό σύνολο $\mathcal{E}$ και για κάθε $X \in \mathcal{E}$, ορίζουμε την *τομή του $\mathcal{E}$ μέσω του $X$*,

$$\bigcap\nolimits_X \mathcal{E} =_{\text{ορ}} \{x \in X \mid (\forall U \in \mathcal{E})[x \in U]\}.$$

Δείξε ότι για όλα τα μέλη $X, Y$ του $\mathcal{E}$,

$$\bigcap\nolimits_X \mathcal{E} = \bigcap\nolimits_Y \mathcal{E},$$

δηλαδή η τομή $\bigcap_X \mathcal{E}$ είναι ανεξάρτητη του $X$ που χρησιμοποιήσαμε στον ορισμό της, και επομένως μπορούμε να τη συμβολίζουμε $\bigcap \mathcal{E}$ χωρίς να δείχνουμε αυτό το $X$. Δείξε επίσης ότι $A \cap B = \bigcap \{A, B\}$.

**x3.2.** Για οποιαδήποτε σύνολα $A, B$, εξέτασε ποιές από τις παρακάτω κλάσεις είναι ή όχι σύνολο.

1. $\{\{\emptyset, x\} \mid x \in A\}$.
2. $\{x \mid \mathrm{Set}(x) \,\&\, x \neq \emptyset\}$.
3. $\{\{x, y\} \mid x \in A \,\&\, y \in B\}$.
4. $\{\mathcal{P}(X) \mid X \subseteq A\}$.

**x3.3.** Δείξε αυστηρά ότι οι ακόλουθες συνθήκες και τελεστές είναι οριστικοί, χρησιμοποιώντας μόνο τα (**I**) – (**VI**) και τα αξιώματα στο **3.18**. (Το $c$ είναι τυχόν αντικείμενο.)

$$\begin{aligned}
P_1(x) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \in c, & F_1(x,y) &=_{\text{ορ}} \{x,y\},\\
P_2(x,y,z) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} z \in x, & F_2(X) &=_{\text{ορ}} \bigcup X,\\
P_3(X,Y) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} X \subseteq Y, & F_3(X) &=_{\text{ορ}} \mathcal{P}(X),\\
P_4(X,Y) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} X \cap Y = \emptyset, & F_4(x) &=_{\text{ορ}} \{x\},\\
P_5(X,Y) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \mathcal{P}(X) \subseteq Y. & F_5(X,Y) &=_{\text{ορ}} X \cup Y.
\end{aligned}$$

Στα υπόλοιπα προβλήματα της ενότητας αυτής θεωρούμε την έννοια της *ισοδυναμίας* κατά το Zermelo, η οποία διαισθητικά ισχύει όταν δυο σύνολα είναι ισοπληθικά. Αφού ορίσουμε τις *συναρτήσεις* μέσα στην αξιωματική θεωρία του Zermelo στο επόμενο κεφάλαιο, τα προβλήματα αυτά θα είναι επουσιώδη· τώρα όμως, έχουν ενδιαφέρον.

**3.27. Ορισμός.** Δύο σύνολα $A$, $B$ είναι **ξένα** (disjoint) αν $A \cap B = \emptyset$. Το σύνολο $W$ είναι **σύνδεσμος** δύο ξένων συνόλων $A$ και $B$ (κατά τον Zermelo), αν ισχύουν οι εξής τρεις συνθήκες:

1. $Z \in W \Longrightarrow (\exists x \in A, y \in B)[Z = \{x, y\}]$.
2. Για κάθε $x \in A$, υπάρχει ακριβώς ένα $y \in B$ ώστε $\{x, y\} \in W$.
3. Για κάθε $y \in B$ υπάρχει ακριβώς ένα $x \in A$ ώστε $\{x, y\} \in W$.

**x3.4.** Δείξε ότι αν τα $A$, $B$ είναι ξένα σύνολα, τότε η κλάση

$$\Sigma(A,B) = \{W \mid \text{το } W \text{ είναι σύνδεσμος του } A \text{ με το } B\}$$

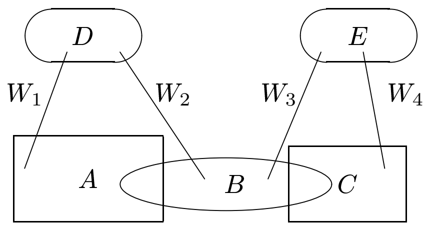
είναι σύνολο.

**3.28. Ορισμός.** Δύο σύνολα $A$, $B$ είναι **ισοδύναμα κατά τον Zermelo** αν υπάρχει τρίτο σύνολο $C$ ξένο των δύο και σύνδεσμοι του $A$ με το $C$ και του $B$ με το $C$, συμβολικά:

$$\begin{aligned}
A \sim_Z B \iff (\exists C, W, W')[&A \cap C = \emptyset \,\&\, B \cap C = \emptyset\\
&\& \; W \in \Sigma(A,C) \,\&\, W' \in \Sigma(B,C)].
\end{aligned}$$

***x3.5.** Η συνθήκη ισοδυναμίας του Zermelo έχει τις εξής ιδιότητες, για όλα τα σύνολα $A$, $B$, $C$:

$$\begin{gathered}
A \sim_Z A,\\
\text{αν } A \sim_Z B, \text{ τότε } B \sim_Z A,\\
\text{αν } (A \sim_Z B \,\&\, B \sim_Z C), \text{ τότε } A \sim_Z C.
\end{gathered}$$




Διαγραμμα **3.1**. Η υπόθεση του τρίτου μέρους του Προβλήματος **x3.5**.

Υποδειξη. Για να δείξεις ότι $A \sim_Z A$, πρέπει να βρεις κάποιο σύνολο $C$ με $A \cap C = \emptyset$ τέτοιο ώστε να υπάρχει σύνδεσμος $W$ του $A$ με το $C$. Η υπόθεση για την (τελευταία) μεταβατική ιδιότητα εικονίζεται στο Διάγραμμα **3.1**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# ΤΑ ΠΑΝΤΑ ΣΥΝΟΛΑ;

Ο επόμενος στόχος μας είναι να διερευνήσουμε αν τα βασικά αποτελέσματα της διαισθητικής συνολοθεωρίας του Κεφαλαίου **2** μπορούν πράγματι να αποδειχτούν με βάση τα αξιώματα του Zermelo. Ευθύς εξ αρχής βρίσκουμε μια δυσκολία: ο βασικός ορισμός της *ισοπληθικότητας* χρησιμοποιεί την έννοια της συνάρτησης, για να ορίσουμε την έννοια του *απαριθμητού* χρειαζόμαστε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, το θεμελιακό θεώρημα **2.21** του Cantor αναφέρεται στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών κ.λπ. Δηλαδή τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου **2** δεν αναφέρονται μόνο σε σύνολα, αλλά επίσης σε σημεία, αριθμούς, συναρτήσεις, Καρτεσιανά γινόμενα και πολλά άλλα μαθηματικά αντικείμενα που απλά δεν είναι σύνολα. Πού θα βρούμε αυτά τα αντικείμενα μέσα στα αξιώματα του Zermelo που μόνο για σύνολα μιλάνε;

Μια προφανής λύση είναι να υποθέσουμε ότι αυτά τα μη σύνολα που μας ενδιαφέρουν είναι ανάμεσα στα *άτομα* που επιτρέπει η θεωρία του Zermelo και να προσθέσουμε αξιώματα που εκφράζουν τις βασικές μας διαισθήσεις για τα σημεία, τους αριθμούς, τις συναρτήσεις κ.λπ. Αυτό μπορεί να γίνει, αλλά είναι άβολο και υπάρχει μια πολύ καλύτερη λύση.

Τυπικό παράδειγμα της μεθόδου που θα ακολουθήσουμε είναι η «ταύτιση» της (προσανατολισμένης) γεωμετρικής ευθείας $\Pi$ με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, μέσω της αντιστοιχίας που «ταυτίζει» κάθε σημείο $P \in \Pi$ με την τετμημένη του $x(P)$ ως προς ένα πάγιο, αρχικό σημείο $O$ με τετμημένη $x(O) = 0$. Τι ακριβώς σημαίνει αυτή η «ταύτιση»; *Όχι βέβαια ότι τα σημεία είναι πραγματικοί αριθμοί.* Οι άνθρωποι έχουν άμεσες γεωμετρικές διαισθήσεις για τα σημεία που είναι άσχετες με τις συντεταγμένες τους και τις είχαν πριν ο Descartes ανακαλύψει την αναλυτική γεωμετρία. Κάθε Αθηναίος της κλασικής εποχής καταλάβαινε την έννοια της πρότασης

> Το Φάληρο είναι ανάμεσα στον Πειραιά και το Σούνιο κατά μήκος της ακτής,

αν και αγνοούσε την αναλυτική γεωμετρία. Πιο ενδεικτικά: πολλοί μορφωμένοι αρχαίοι Αθηναίοι είχαν τέλεια κατανόηση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, χωρίς να ξέρουν τίποτα για συντεταγμένες. Αυτό που εννοούμε με την «ταύτιση» του $\Pi$ με το $\mathbb{R}$ είναι ότι η αντιστοιχία $P \mapsto x(P)$ μας δίνει μια **πιστή απεικόνιση** του $\Pi$ στο $\mathbb{R}$ που μας επιτρέπει να δώσουμε αριθμητικούς ορισμούς για όλες τις χρήσιμες γεωμετρικές έννοιες και να μελετήσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες του

Π **ως εάν τα σημεία να ήταν αριθμοί**. Για παράδειγμα: η πρόταση πιο πάνω εκφράζεται πιστά με τις αριθμητικές ανισότητες

$$x(\text{Πειραιάς}) < x(\text{Φάληρο}) < x(\text{Σούνιο}),$$

αν οι τετμημένες αυξάνουν από τα δυτικά προς τα ανατολικά. Με τον ίδιο τρόπο, θα βρούμε *πιστές απεικονίσεις* στα σύνολα όλων των μαθηματικών αντικειμένων που χρειαζόμαστε και θα μελετήσουμε τη θεωρία συνόλων με βάση μόνο το λιτό σύστημα των αξιωμάτων του Zermelo, **ως εάν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα να ήταν σύνολα**. Το λεπτό και όχι πάντα τετριμμένο πρόβλημα είναι να διατυπώσουμε σε κάθε περίπτωση τον σωστό ορισμό της «πιστής απεικόνισης» και να αποδείξουμε ότι μια τέτοια πιστή απεικόνιση υπάρχει.

**4.1. Διατεταγμένο ζεύγος** (Ordered pair). Θεωρούμε πρώτα τη βασική έννοια του (**διατεταγμένου**) **ζεύγους**. Διαισθητικά, το ζεύγος $(x, y)$ είναι το «πράγμα» που έχει «πρώτο μέλος» το $x$ και «δεύτερο μέλος» το $y$, και διαφέρει από το μη διατεταγμένο ζεύγος αφού (π.χ.) $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ ενώ $(0, 1) \neq (1, 0)$. Επομένως η πρώτη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους είναι η εξής:

$$\text{(OP1)} \qquad (x, y) = (x', y') \iff x = x' \,\&\, y = y'.$$

Υπάρχει και μια δεύτερη, ίσως λιγότερο προφανής χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους, που μας επιτρέπει να ορίσουμε Καρτεσιανά γινόμενα: για όλα τα σύνολα $A$, $B$,

$$\text{(OP2)} \qquad \text{η κλάση } A \times B =_{\text{ορ}} \{(x, y) \mid x \in A \,\&\, y \in B\} \text{ είναι σύνολο.}$$

Το πρόβλημα λοιπόν της πιστής απεικόνισης του «ζεύγους» στη συνολοθεωρία διαμορφώνεται ως εξής: πρέπει να βρούμε έναν οριστικό τελεστή $(x, y)$, τέτοιον ώστε οι (OP1) και (OP2) να συνάγονται από τα αξιώματα του Zermelo.

**4.2. Λήμμα.** *Ο* **τελεστής ζεύγους** *του* **Kuratowski**

$$(x, y) =_{\text{ορ}} \{\{x\}, \{x, y\}\} \tag{4-1}$$

*ικανοποιεί τις* (OP1), (OP2).

Αποδειξη. (OP1). Η κατεύθυνση $\Longleftarrow$ είναι προφανής. Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση $\Longrightarrow$ ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $x = y$, τότε $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$, το $(x, y) = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ είναι μονοσύνολο, επομένως και το ίσο του $(x', y')$ είναι μονοσύνολο, ώστε $x' = y'$. Επομένως $(x', y') = \{\{x'\}\}$ και αφού αυτό είναι ίσο με το $\{\{x\}\}$, έχουμε $x = x'$ και αμέσως, επίσης, $y = x = x' = y'$.

Αν $x \neq y$, τότε στο $(x, y)$ ανήκουν το μονοσύνολο $\{x\}$ και το δισύνολο $\{x, y\}$, και αυτά πρέπει να αντιστοιχούν στα μέλη $\{x'\}$ και $\{x', y'\}$ του ίσου συνόλου $(x', y')$, δηλαδή $\{x\} = \{x'\}$, $\{x, y\} = \{x', y'\}$, ώστε αμέσως $x = x'$ και $y = y'$.

(OP2). Αρκεί να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε δύο σύνολα $A, B$, υπάρχει σύνολο $C$ τέτοιο ώστε

$$x \in A \,\&\, y \in B \Longrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} \in C\cdot \tag{4-2}$$

διότι αν ισχύει αυτό, τότε

$$A \times B = \{z \in C \mid (\exists x \in A)(\exists y \in B)[z = (x, y)]\},$$

και το $A \times B$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**). Για να δείξουμε την (4-2), υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in A,\ y \in B &\implies \{x\},\ \{x,y\} \subseteq (A \cup B) \\ &\implies \{x\},\ \{x,y\} \in \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\implies \{\{x\},\ \{x,y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \\ &\implies (x,y) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να θέσουμε $C = \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. ⊣

Καθορίζουμε τώρα ένα συγκεκριμένο τελεστή ζεύγους $(x, y)$ που ικανοποιεί τις (OP1), (OP2), ίσως το ζεύγος του Kuratowski που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του **4.2**, ίσως κάποιο άλλο: από δω και πέρα μπορούμε να ξεχάσουμε τον συγκεκριμένο τελεστή που διαλέξαμε, το μόνο που έχει σημασία είναι ότι ο τελεστής του ζεύγους ικανοποιεί τις (OP1), (OP2).

**4.3. Άσκηση.** *Έστω*

$$\mathrm{Pair}(z) \iff_{\mathsf{op}} (\exists x)(\exists y)[z = (x, y)],$$

$$\mathrm{First}(z) =_{\mathsf{op}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } x \text{ ώστε } (\exists y)[z = (x, y)], & \text{αν } \mathrm{Pair}(z), \\ z, \text{ αλλιώς}, \end{cases}$$

$$\mathrm{Second}(z) =_{\mathsf{op}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } y \text{ ώστε } (\exists x)[z = (x, y)], & \text{αν } \mathrm{Pair}(z), \\ z, \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

*Έπεται ότι*

$$\mathrm{Pair}(z) \iff z = (\mathrm{First}(z), \mathrm{Second}(z)).$$

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος μπορούμε εύκολα να ορίσουμε τριάδες, τετράδες κ.λπ. όπως και τα αντίστοιχα γινόμενα, π.χ.

$$(x, y, z) =_{\mathsf{op}} (x, (y, z)), \tag{4-3}$$

$$(x, y, z, w) =_{\mathsf{op}} (x, (y, z, w)) = (x, (y, (z, w))), \tag{4-4}$$

$$A \times B \times C =_{\mathsf{op}} A \times (B \times C), \tag{4-5}$$

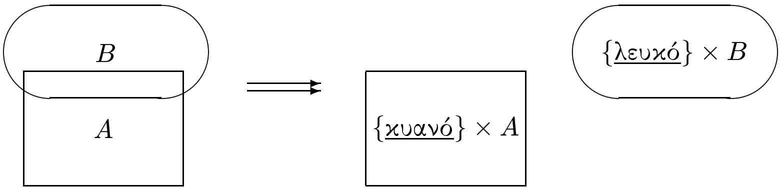
κ.λπ. Με αυτό τον ορισμό, $(n+1)$-άδα είναι ένα ζεύγος με δεύτερο μέλος $n$-άδα.

**4.4. Άσκηση.** *Για όλα τα $x, y, z, x', y', z'$,*

$$(x, y, z) = (x', y', z') \iff x = x' \,\&\, y = y' \,\&\, z = z'.$$

**4.5. Ξένη ένωση** (Disjoint union). Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε αντικείμενο $\underline{\text{κυανό}}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο ζευγών $\{\underline{\text{κυανό}}\} \times A$ σαν ένα «μπλε αντίγραφο» του $A$, εικονίζοντας την αντικατάσταση του κάθε $a \in A$ με το ζεύγος $(\underline{\text{κυανό}}, a)$ ως το συνολοθεωρητικό ανάλογο της βαφής του $a$ με χρώμα $\underline{\text{κυανό}}$. Καθορίζουμε δύο τέτοια διαφορετικά «χρώματα»

$$\underline{\text{κυανό}} =_{\mathsf{op}} \emptyset, \quad \underline{\text{λευκό}} =_{\mathsf{op}} \{\emptyset\}, \tag{4-6}$$




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **4.1**. Κατασκευή της ξένης ένωσης.

και ορίζουμε την **ξένη ένωση** δύο συνόλων με τον τύπο

$$A \uplus B =_{\text{ορ}} (\{\underline{\text{κυανό}}\} \times A) \cup (\{\underline{\text{λευκό}}\} \times B).$$

Η κατασκευή απεικονίζεται σχηματικά στο Διάγραμμα **4.1**, και η έννοια είναι χρήσιμη, όπως θα δούμε. Είναι αυτονόητο ότι η συγκεκριμένη ταυτότητα των <u>κυανό</u> και <u>λευκό</u> είναι άσχετη και πρέπει να ξεχαστεί αμέσως: το μόνο σημαντικό είναι ότι $\underline{\text{κυανό}} \neq \underline{\text{λευκό}}$.

**4.6. Άσκηση.** *Δείξε ότι για όλα τα σύνολα $A$, $B$, $A \uplus \emptyset \subseteq A \uplus B$. Δείξε επίσης με κάποιο παράδειγμα ότι αν χρησιμοποιήσουμε το ζεύγος Kuratowski στον ορισμό της ξένης ένωσης, τότε η αληθοφανής $A \subseteq A \uplus B$ δεν ισχύει.*

Θεωρούμε τώρα την έννοια της **σχέσης** (relation), που διαποτίζει τα μαθηματικά. Διαισθητικά, *διμελής σχέση* $R$ ανάμεσα σε αντικείμενα $x \in A$ και $y \in B$ είναι μια συνθήκη που ικανοποιείται από μερικά $x \in A$, $y \in B$ και δεν ικανοποιείται από άλλα. Π.χ. η σχέση

$$xRy \iff \text{ο } x \text{ είναι γιος της } y$$

είναι ορισμένη στα $A = \{\text{άντρες}\}$, $B = \{\text{γυναίκες}\}$ και ικανοποιείται από τα $x, y$ ακριβώς αν η $y$ έχει γεννήσει τον $x$. Ο προφανής τρόπος να απεικονίσουμε μια διμελή σχέση στη συνολοθεωρία είναι να την ταυτίσουμε με την **έκτασή** της, το σύνολο των ζευγών που την ικανοποιούν.

**4.7. Σχέσεις.** **Διμελής σχέση** στα σύνολα $A$, $B$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $R$ του γινομένου $A \times B$. Χρησιμοποιούμε ισοδύναμα τους συμβολισμούς

$$R(x, y) \iff xRy \iff (x, y) \in R.$$

Προφανή παραδείγματα σχέσεων είναι η **ισότητα** και οι σχέσεις του «**ανήκειν**» και του **υποσυνόλου**, περιορισμένες σε κάποιο σύνολο $A$,

$$\begin{aligned} x =_A y &\iff_{\text{ορ}} x \in A \,\&\, y \in A \,\&\, x = y, \\ x \in_A Y &\iff_{\text{ορ}} x \in A \,\&\, Y \subseteq A \,\&\, x \in Y, \\ X \subseteq_A Y &\iff_{\text{ορ}} X \subseteq Y \subseteq A\cdot \end{aligned}$$

σύμφωνα με τον ορισμό αυτές ταυτίζονται με τα σύνολα

$$\begin{aligned}
=_A &=_{\text{ορ}} \{(x,y) \in A \times A \mid x = y\},\\
\in_A &=_{\text{ορ}} \{(x,Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\},\\
\subseteq_A &=_{\text{ορ}} \{(X,Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}.
\end{aligned}$$

**4.8. Σχέσεις και οριστικές συνθήκες**. Οι οριστικές συνθήκες $=$, $\in$ και $\subseteq$ στο πεδίο ορισμού $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων δεν είναι σχέσεις σύμφωνα με τον ορισμό **4.7**, και μάλιστα δεν είναι καν «ισομελείς» με σχέσεις, επειδή ικανοποιούνται από πάρα πολλά ζεύγη. Η διαφορά ανάμεσα στις σχέσεις και τις οριστικές συνθήκες είναι σημαντική: συνοπτικά, *κάθε σχέση καθορίζει μια οριστική συνθήκη αλλά* (γενικά) *το αντίθετο δεν ισχύει*. Στην επόμενη Άσκηση διατυπώνουμε αυστηρά αυτή τη διαφορά. Παρ' όλα αυτά, θα αναφερθούμε πολλές φορές π.χ. *στη σχέση* $=$ *στο σύνολο* $A$, εννοώντας (χωρίς σοβαρό κίνδυνο σύγχυσης) τον περιορισμό $=_A$ όπως τον ορίσαμε πιο πάνω.

**4.9. Άσκηση.** (1) *Για κάθε διμελή σχέση* $R \subseteq (A \times B)$, *η συνθήκη*

$$R^*(x,y) \iff_{\text{ορ}} (x,y) \in R$$

*είναι οριστική. (Τίποτα δεν χρειάζεται γι' αυτό, εκτός κι αν θέλεις να εξασκηθείς στην εφαρμογή του* **3.18***.)*

(2) *Για κάθε οριστική διμελή συνθήκη* $P$ *και οποιαδήποτε σύνολα* $A$, $B$, *ο* **περιορισμός**

$$P_{A,B} =_{\text{ορ}} \{(x,y) \in A \times B \mid P(x,y)\}$$

*της* $P$ *στο* $A \times B$ *είναι διμελής σχέση.*

**4.10. Ιδιότητες σχέσεων σε ένα σύνολο** $A$. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι οι σχέσεις δύο μεταβλητών στο ίδιο σύνολο, που ταξινομούνται και μελετώνται ανάλογα με τις δομικές ιδιότητες που ικανοποιούν. Οι επόμενες τρεις ιδιότητες εμφανίζονται συχνά, μόνες τους ή σε διάφορους συνδυασμούς, με $P \subseteq A \times A$:

$$\begin{aligned}
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{αυτοπαθής} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x \in A)[x P x],\\
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{συμμετρική} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x, y \in A)[x P y \Longrightarrow y P x],\\
\text{η } P \text{ είναι } \textbf{μεταβατική} &\iff_{\text{ορ}} (\forall x, y, z \in A)[[x P y \,\&\, y P z] \Longrightarrow x P z].
\end{aligned}$$

(Οι αντίστοιχοι αγγλικοί όροι είναι reflexive, symmetric και transitive.) Η $P$ είναι **σχέση ισοδυναμίας** (equivalence relation) στο $A$ αν έχει και τις τρεις αυτές ιδιότητες.

Για σχέσεις ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε συνήθως σύμβολα σαν τα $\sim$, $\approx$, $\simeq$, και οι τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες παίρνουν τη μορφή

$$\begin{gathered}
x \sim x,\\
x \sim y \Longrightarrow y \sim x,\\
[x \sim y \,\&\, y \sim z] \Longrightarrow x \sim z.
\end{gathered}$$

**4.11. Άσκηση.** *Για κάθε σύνολο $A$, η σχέση ισότητας $\{(x,y) \mid x = y \in A\}$, η σταθερά αληθής σχέση $\{(x,y) \mid x, y \in A\}$ και για κάθε $B \subseteq A$, η σχέση*

$$x \sim_{A/B} y \iff_{\text{ορ}} x = y \in A \vee [x \in B \,\&\, y \in B]$$

*είναι σχέσεις ισοδυναμίας.*

**4.12. Πρόταση.** *Έστω η $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $A$. Τότε για κάθε $x \in A$ ορίζουμε με*

$$[x/{\sim}] = \{y \in A \mid x \sim y\} \tag{4-7}$$

*την* **κλάση ισοδυναμίας**[7] *του $x$ και συμβολίζουμε με*

$$[\![A/{\sim}]\!] = \{[x/{\sim}] \in \mathcal{P}(A) \mid x \in A\}. \tag{4-8}$$

*το σύνολο αυτών των κλάσεων ισοδυναμίας. Άρα $[x/{\sim}] \neq \emptyset$ για κάθε $x \in A$, και για κάθε $x, y \in A$,*

$$x \sim y \iff [x/{\sim}] = [y/{\sim}], \tag{4-9}$$

$$x \not\sim y \iff [x/{\sim}] \cap [y/{\sim}] = \emptyset, \tag{4-10}$$

*έτσι ώστε το $[\![A/{\sim}]\!]$ είναι μια οικογένεια μη κενών και ξένων ανα δύο υποσυνόλων του $A$ τέτοια που $\bigcup [\![A/{\sim}]\!] = A$.*

*Αντιστρόφως, για κάθε οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $A$ τέτοια που $A = \bigcup \mathcal{E}$, η σχέση*

$$x \sim y \iff_{\text{ορ}} (\exists X \in \mathcal{E})[x \in X \,\&\, y \in X]$$

*είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$ και $[\![A/{\sim}]\!] = \mathcal{E}$.*

Απόδειξη. Κάθε $[x/{\sim}] \neq \emptyset$, επειδή $x \in [x/{\sim}]$. Από τη μεταβατικότητα και συμμετρικότητα της $\sim$,

$$t \sim x \,\&\, x \sim y \Longrightarrow t \sim y, \quad t \sim y \,\&\, x \sim y \Longrightarrow t \sim x$$

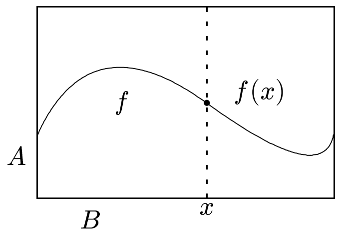
άρα

$$\begin{aligned} x \sim y &\Longrightarrow (\forall t \in A)[t \sim x \iff t \sim y] \\ &\Longrightarrow [x/{\sim}] = [y/{\sim}]. \end{aligned}$$

Αυτό συνεπάγεται αμέσως τις (4-9) και (4-10). Όσο για το αντίστροφο, η αυτοπάθεια και η συμμετρία της $\sim$ είναι τετριμμένες. Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε υπάρχουν σύνολα $X$, $Y$ στην $\mathcal{E}$ τέτοια που $x, y \in X$, $y, z \in Y$, ειδικότερα $y \in X \cap Y$, και αφού τα σύνολα στην $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο, συμπεραίνουμε ότι $X = Y$, άρα $x \sim z$. ⊣

**4.13. Άσκηση.** *Υπολόγισε τις κλάσεις ισοδυναμίας για τις σχέσεις ισοδυναμίας της Άσκησης* **4.11**.

[7] Κάθε $[x/{\sim}]$ είναι προφανώς σύνολο, υποσύνολο του $A$, και θα ήταν πιο ταιριαστό να το λέγαμε το «σύνολο ισοδυναμίας» του $x$, αλλά η κλασική ορολογία είναι πανάρχαιη και καθιερωμένη.




Διαγραμμα **4.2**. Μία συνάρτηση σαν σύνολο από διατεταγμένα ζεύγη.

Ακολουθώντας την ίδια τακτική, ταυτίζουμε κάθε **τριμελή σχέση** $R$ στα σύνολα $A$, $B$, $C$ με το σύνολο των τριάδων που την ικανοποιούν, δηλαδή τριμελής σχέση στα $A$, $B$, $C$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $A \times B \times C$. Χρησιμοποιούμε ισοδύναμα τους συμβολισμούς

$$R(x, y, z) \iff_{\text{ορ}} (x, y, z) \in R.$$

Με τον ίδιο τρόπο απεικονίζουμε στη συνολοθεωρία και τις συναρτήσεις, ταυτίζοντάς τες με τη «γραφική τους παράσταση».

**4.14. Συναρτήσεις. Συνάρτηση** (**απεικόνιση**, **μετασχηματισμός**) $f : A \to B$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $A$ και πεδίο τιμών το σύνολο $B$ είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο $f \subseteq (A \times B)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(\forall x \in A)(\exists! y \in B)[(x, y) \in f],$$

αναλυτικότερα,

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)[(x, y) \in f],$$
$$\text{και } (x, y) \in f \,\&\, (x, y') \in f \Longrightarrow y = y'.$$

Αν απεικονίσουμε το γινόμενο $A \times B$ στο επίπεδο όπως στο Διάγραμμα **4.2**, το παραπάνω σημαίνει πως κάθε «κατακόρυφη ευθεία» τέμνει το σύνολο $f$ σε ακριβώς ένα σημείο: Για $x \in A$ και $f : A \to B$ γράφουμε, ως συνήθως,

$$\begin{aligned} f(x) &=_{\text{ορ}} \text{ το μοναδικό } y \in B \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in f \\ &= \text{ η τιμή της } f \text{ στο στοιχείο } x \end{aligned} \qquad (x \in A).$$

Ο χώρος συναρτήσεων

$$\begin{aligned} (A \to B) =_{\text{ορ}} &\{f \subseteq A \times B \mid f : A \to B\} \\ &= \{f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid (\forall x \in A)(\exists! y \in B)(x, y) \in f\} \end{aligned}$$

είναι σύνολο από το Αξίωμα Εξειδίκευσης (**III**).

Θα υιοθετήσουμε όλους τους συνηθισμένους συμβολισμούς και συντομεύσεις σχετικές με συναρτήσεις, γράφοντας π.χ. μερικές φορές τη μεταβλητή χωρίς τις παρενθέσεις ή σαν δείκτη,

$$f(x) = fx = f_x.$$

Εξαιρετικά χρήσιμος είναι και ο συμβολισμός $\mapsto$, π.χ. **οικογένεια συνόλων με δείκτες** στο σύνολο $I$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση

$$A = (i \mapsto A_i)_{i \in I} : I \to E$$

για κάποιο $I \neq \emptyset$ και κάποιο $E$, όπου κάθε τιμή $A_i$ είναι σύνολο. Ονομάζουμε το $I$ **σύνολο δεικτών** και ορίζουμε την ένωση και την τομή μιας οικογένειας με δείκτες στο $I$ όπως συνήθως,

$$\begin{aligned} \bigcup\nolimits_{i \in I} A_i &=_{\mathsf{op}} \{x \in \bigcup E \mid (\exists i \in I)[x \in A_i]\}, \\ \bigcap\nolimits_{i \in I} A_i &=_{\mathsf{op}} \{x \in \bigcup E \mid (\forall i \in I)[x \in A_i]\}. \end{aligned} \tag{4-11}$$

Επίσης ορίζουμε **γινόμενο** μιας οικογένειας με δείκτες στο $I$, το σύνολο όλων των συναρτήσεων που επιλέγουν για κάθε δείκτη $i \in I$ ένα στοιχείο από την τιμή $A_i$,

$$\prod\nolimits_{i \in I} A_i =_{\mathsf{op}} \{f : I \to \bigcup\nolimits_{i \in I} A_i \mid (\forall i \in I)[f(i) \in A_i]\}. \tag{4-12}$$

Μονομορφισμοί, επιμορφισμοί, αντιστοιχίες, εικόνες και αντίστροφες εικόνες συναρτήσεων ορίζονται ακριβώς όπως στην Εισαγωγή. Θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

$$\begin{aligned} (A \rightarrowtail B) &=_{\mathsf{op}} \{f \in (A \to B) \mid \text{η } f \text{ είναι μονομορφισμός, 1-1}\}, \\ (A \twoheadrightarrow B) &=_{\mathsf{op}} \{f \in (A \to B) \mid \text{η } f \text{ είναι επιμορφισμός, επί του } B\}, \\ (A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B) &=_{\mathsf{op}} (A \rightarrowtail B) \cap (A \twoheadrightarrow B) \text{ (αντιστοιχία).} \end{aligned}$$

Για κάθε $X \subseteq A$, ο **περιορισμός** (restriction) $f \restriction X$ μιας συνάρτησης $f : A \to B$ είναι η συνάρτηση που υπολείπεται αν αφαιρέσουμε από την $f$ τα ζεύγη με πρώτο μέλος έξω από το $X$,

$$f \restriction X =_{\mathsf{op}} \{(x, y) \in f \mid x \in X\}. \tag{4-13}$$

Επίσης είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι η βασική συνθήκη του «είναι συνάρτηση»

$$\text{Function}(f) \iff_{\mathsf{op}} (\exists A)(\exists B)[f \in (A \to B)] \tag{4-14}$$

είναι προφανώς οριστική. Όταν αναφερόμαστε σε κάποια *συνάρτηση* $f$ χωρίς μνεία συγκεκριμένων συνόλων $A$, $B$ ώστε $f : A \to B$, θα εννοούμε οποιοδήποτε αντικείμενο $f$ που ικανοποιεί τη συνθήκη Function($f$).

**4.15. Άσκηση.** *Δείξε από τα αξιώματα, πως για κάθε συνάρτηση $f$, το* **πεδίο ορισμού** *της*

$$\text{Domain}(f) =_{\mathsf{op}} \{x \mid (\exists y)[(x, y) \in f]\}$$

*και η* **εικόνα** *της*

$$\text{Image}(f) =_{\mathsf{op}} \{y \mid (\exists x)[(x, y) \in f]\}$$

*είναι σύνολα, και πως για κάθε σύνολο $B$,*

$$\textit{αν } \text{Image}(f) \subseteq B, \textit{ τότε } f : \text{Domain}(f) \to B.$$

*Σαν επακόλουθο,*

$$\text{αν } \operatorname{Function}(f), \text{ τότε } f : \operatorname{Domain}(f) \to \operatorname{Image}(f).$$

**4.16. Σχετικά με τις συναρτήσεις σαν σύνολα ζευγών.** Αυτή η «ταύτιση» στη συνολοθεωρία μιας συνάρτησης $f : A \to B$ με το σύνολο των ζευγών $\{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = y\}$ έχει θεωρηθεί προβληματική, επειδή έχουμε έμφυτες «λειτουργικές» διαισθήσεις για την έννοια της συνάρτησης και πολλές φορές με τη λέξη «συνάρτηση» εννοούμε έναν «κανόνα υπολογισμού». Παραδείγματος χάριν, οι δύο συναρτήσεις στους πραγματικούς αριθμούς

$$f(x, y) =_{\text{ορ}} (x + y)^2,$$
$$g(x, y) =_{\text{ορ}} x^2 + 2xy + y^2$$

ταυτίζονται στη συνολοθεωρία, ενώ σαν κανόνες υπολογισμού είναι προφανώς διαφορετικοί. Αυτό δε δημιουργεί πρόβλημα αν ξεκαθαρίσουμε στο νου μας ότι ο «ορισμός» **4.14** δεν αντικαθιστά τη διαισθητική έννοια της συνάρτησης αλλά μόνο την απεικονίζει στη *συνολοθεωρία*, πιστά όσον αφορά τις χρήσεις αυτής της έννοιας *στη συνολοθεωρία*:[8] μπορούμε τώρα να ορίσουμε την ισοπληθικότητα και τη συνθήκη σύγκρισης πλήθους χωρίς αναφορά σε αντικείμενα έξω από την αξιωματική μας θεωρία,

$$A =_c B \iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B] \iff (A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow B) \neq \emptyset,$$
$$A \leq_c B \iff_{\text{ορ}} (\exists f)[f : A \rightarrowtail B] \iff (A \rightarrowtail B) \neq \emptyset.$$
$$A <_c B \iff_{\text{ορ}} A \leq_c B \,\&\, A \neq_c B.$$

**4.17. Άσκηση.** *Δείξε από τα αξιώματα ότι* $A =_c B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) =_c \mathcal{P}(B)$, *αναφέροντας τα αξιώματα που χρησιμοποιείς.*

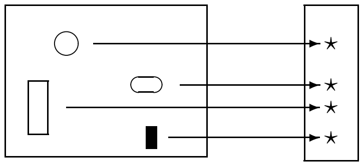
**4.18. Άσκηση.** *Δείξε από τα αξιώματα ότι αν* $A =_c A'$ *και* $B =_c B'$, *τότε*

$$A \uplus B =_c A' \uplus B', \quad A \times B =_c A' \times B', \quad (A \to B) =_c (A' \to B').$$

**4.19. Πληθάριθμοι κατά τον Cantor.** Είναι κάπως ειρωνικό το γεγονός ότι μια από τις πλέον δύσκολες διαισθητικές έννοιες να απεικονίσουμε πιστά στη συνολοθεωρία είναι αυτή του *πληθαρίθμου*, οπωσδήποτε από τις βασικότερες του θέματός μας. Ο Cantor την εισήγαγε το 1895 στο ίδιο δημοσίευμα από το οποίο αποσπάσαμε τον «ορισμό» του συνόλου στην Εισαγωγή, ως εξής:

> Κάθε σύνολο $A$ έχει μια καθορισμένη 'ισχύ', που καλούμε τον 'πληθάριθμο' του $A$.
>
> Με το όνομα 'ισχύ' ή 'πληθάριθμο' του $A$ ονομάζουμε τη γενική έννοια που απορρέει από το σύνολο $A$, όταν με το στοχασμό μας αποσύρουμε από τα στοιχεία $x$ την ιδιαίτερη φύση τους και τη σειρά με την οποία έχουν δοθεί.

[8] Το αν η διαισθητική έννοια της συνάρτησης σαν υπολογιστικός κανόνας μπορεί επίσης να απεικονιστεί πιστά στη συνολοθεωρία είναι ενδιαφέρον πρόβλημα στο οποίο δεν έχει δοθεί ακόμη γενικά αποδεκτή λύση.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **4.3**. Κατασκευή του $|A|$ κατά τον Cantor.

> Το αποτέλεσμα αυτής της διπλής πράξης αφαίρεσης, τον πληθάριθμο του $A$ συμβολίζουμε $\overline{\overline{A}}$. Εφόσον κάθε στοιχείο $x$, αφού αφαιρέσουμε την ιδιαίτερή του φύση, γίνεται μια 'μονάδα', ο πληθάριθμος $\overline{\overline{A}}$ είναι ένα συγκεκριμένο σύνολο αποτελούμενο από μονάδες, και αυτός ο αριθμός υπάρχει στο νου μας ως διανοητική εικόνα ή προβολή του συνόλου $A$.

Έπειτα από κάμποση συζήτηση, ο Cantor συμπεραίνει από αυτόν τον «ορισμό» ότι οι πληθάριθμοι ικανοποιούν τις επόμενες δύο βασικές συνθήκες:

$$A =_c \overline{\overline{A}},$$
$$\text{αν } \ A =_c B, \ \text{ τότε } \ \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Η πρώτη από αυτές προκύπτει φυσικά από την έννοια του Cantor: η διαδικασία αφαίρεσης του στοχασμού μας που αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A$ κάποια «μονάδα» $u_x$ καταφανώς ορίζει μια αντιστοιχία $x \mapsto u_x$ ανάμεσα στο $A$ και το $\overline{\overline{A}}$. Ο Cantor δικαιολογεί τη δεύτερη συνθήκη με έναν περιληπτικό συλλογισμό, στον οποίο η φράση-κλειδί είναι η εξής:

> ο $\overline{\overline{A}}$ αναπτύσσεται (ας το πούμε έτσι) από το $A$, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο του $A$ δημιουργεί μιαν ειδική μονάδα.

Για να φτάσουμε στη δεύτερη συνθήκη με τέτοια επιχειρήματα πρέπει να δεχτούμε ότι αυτές οι «ειδικές μονάδες» εξαρτώνται μόνο από το «πόσα μέλη» έχει το $A$ και όχι την ειδική τους φύση, που κάπως μοιάζει να στηρίζεται σε μια έννοια πληθικότητας και να οδηγεί σε φαύλο κύκλο, αλλά οπωσδήποτε αυτά είπε ο Cantor.

Υπάρχει και μια τρίτη, πιο τεχνική ιδιότητα των πληθαρίθμων που ο Cantor χρησιμοποιεί χωρίς σχόλιο στον ορισμό και τη μελέτη τελεστών που δρουν σε άπειρες οικογένειες συνόλων: *για κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, η κλάση των πληθαρίθμων $\{\overline{\overline{X}} \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.* Όπως και να ερμηνεύσουμε την κατασκευή του Cantor, είναι πεντακάθαρο απ' αυτά τι πρέπει να κάνουμε για να την απεικονίσουμε πιστά στη συνολοθεωρία. Χρησιμοποιούμε μοντέρνο συμβολισμό αντί για το άχαρο $\overline{\overline{A}}$ του Cantor.

**4.20. Πρόβλημα Ανάθεσης Πληθαρίθμων**: *να ορίσουμε στην κλάση όλων των συνόλων έναν τελεστή $|A|$ με τις ιδιότητες*

(C1) $$A =_c |A|,$$

(C2) $$\text{αν } A =_c B, \text{ τότε } |A| = |B|,$$

(C3) *για κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, το $\{|X| \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.*

Είναι δύσκολο πρόβλημα και δεν λύθηκε μέχρι την περίοδο 1920–30, όταν το έλυσε ο von Neumann με μια κομψή κατασκευή που όμως στηρίζεται και στα δύο αξιώματα που μας λείπουν ακόμη, της Επιλογής και της Αντικατάστασης. Θα εκθέσουμε τη λύση του von Neumann στο Κεφάλαιο **12**, μετά από αρκετή προκαταρκτική εργασία. Μέχρι τότε, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλοί τελεστές που ικανοποιούν τις (C1) και (C3), μεταξύ των οποίων και ο τετριμμένος $|A| = A$! Αυτό που είναι λιγότερο εμφανές είναι ότι αυτές οι δύο απλές ιδιότητες του τελεστή $|A|$ αρκούν για την ανάπτυξη μιας ικανοποιητικής θεωρίας πληθικότητας.

**4.21. Πληθάριθμοι.** Καλούμε (ασθενή) **τελεστή πληθικότητας** οποιονδήποτε οριστικό τελεστή στα σύνολα $A \mapsto |A|$ που ικανοποιεί την (C1) και την (C3), και **ισχυρό τελεστή πληθικότητας** αν επιπλέον ικανοποιεί την (C2). Οι **πληθάριθμοι** ή **πληθικοί αριθμοί** (cardinal numbers) (με βάση κάποιον δοσμένο τελεστή πληθικότητας) είναι οι τιμές του,

(C4) $$\mathrm{Card}(\kappa) \iff \kappa \in \mathrm{Card} \iff_{\mathsf{op}} (\exists A)[\kappa = |A|].$$

**4.22. Άσκηση.** *Δείξε πως για κάθε τελεστή πληθικότητας και οποιαδήποτε σύνολα $A, B$,*

$$|A| = |B| \Longrightarrow A =_c B,$$

έτσι που το αντίστροφο του (C2) αληθεύει για όλους τους τελεστές πληθικότητας, ακόμα και για τους ασθενείς.

Καθορίζουμε τώρα έναν (πιθανόν ασθενή) τελεστή πληθικότητας και ορίζουμε τις αριθμητικές πράξεις στους πληθαρίθμους ως εξής:

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &=_{\mathsf{op}} |\kappa \uplus \lambda| &&=_c \kappa \uplus \lambda, \\ \kappa \cdot \lambda &=_{\mathsf{op}} |\kappa \times \lambda| &&=_c \kappa \times \lambda, \\ \kappa^\lambda &=_{\mathsf{op}} |(\lambda \to \kappa)| &&=_c (\lambda \to \kappa). \end{aligned}$$

Οι πράξεις σε άπειρα σύνολα ορίζονται ανάλογα,[9]

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{i \in I} \kappa_i =_{\mathsf{op}} |\{(i, x) \in I \times \bigcup_{i \in I} \kappa_i \mid x \in \kappa_i\}|, \\ &\textstyle\prod_{i \in I} \kappa_i =_{\mathsf{op}} |\prod_{i \in I} \kappa_i|. \end{aligned}$$

Η ιδέα είναι προφανής, π.χ. το άθροισμα $\kappa+\lambda$ είναι «ο αριθμός των στοιχείων» στο σύνολο όλων των αντικειμένων που προέρχονται από ξένα μεταξύ τους αντίγραφα των $\kappa$ και $\lambda$.

[9]Παραδοσιακά συμβολίζεται το Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων και η πράξη πολλαπλασιασμού απείρων πληθαρίθμων με το ίδιο κεφαλαίο Π, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση.

Παρατηρούμε πως μόνο μία επιλογή υπάρχει για τον $|\emptyset|$,

$$0 =_{\text{ορ}} |\emptyset| = \emptyset, \tag{4-15}$$

επειδή μόνο ο ορισμός $|\emptyset| = \emptyset$ ικανοποιεί την $\emptyset =_c |\emptyset|$. Είναι επίσης βολικό να εισαγάγουμε τους συμβολισμούς

$$1 =_{\text{ορ}} |\{0\}|, \quad 2 =_{\text{ορ}} |\{0,1\}| \tag{4-16}$$

ώστε να μπορούμε εύκολα να αναφερθούμε στους πληθαρίθμους κάποιου μονοσυνόλου και κάποιου δισυνόλου.

**4.23. Άσκηση.** *Για όλα τα σύνολα $A, B$, $|A \cup B| \leq_c |A| + |B|$, και*

$$\textit{αν}\ \ A \cap B = \emptyset,\ \ \textit{τότε}\ \ |A \cup B| =_c |A| + |B|.$$

**4.24. Άσκηση.** *Για όλους τους πληθαρίθμους, αν $\kappa_1 =_c \kappa_2$ και $\lambda_1 =_c \lambda_2$, τότε*

$$\kappa_1 + \lambda_1 =_c \kappa_2 + \lambda_2, \quad \kappa_1 \cdot \lambda_1 =_c \kappa_2 \cdot \lambda_2, \quad \kappa_1^{\lambda_1} =_c \kappa_2^{\lambda_2}.$$

**4.25. Πληθική αριθμητική.** Ίσως φαίνεται κάπως ανόητη η δημιουργία θεωρίας κάποιου ασθενούς τελεστή πληθικότητας που μπορεί να είναι και ο τετριμμένος $|X| = X$, αλλά ο συμβολισμός των πληθαρίθμων και των αριθμητικών πράξεων πάνω τους μας επιτρέπει να εκφράσουμε απλά πολύπλοκες «σχέσεις ισοπληθικότητας». Θεωρούμε, για παράδειγμα, την εξίσωση

$$\kappa^{(\lambda+\mu)} =_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu. \tag{4-17}$$

Μοιάζει προφανής, αληθεύει κατά την Άσκηση **4.28**, και εκφράζει ακριβώς το ίδιο γεγονός με την

$$((\lambda \uplus \mu) \to \kappa) =_c (\lambda \to \kappa) \times (\mu \to \kappa), \tag{4-18}$$

πολλοί θα έλεγαν απλούστερα. Επιπλέον:

(1) η συστηματική ανάπτυξη κανόνων σαν τον (4-17) οδηγεί σε μια *πληθική αριθμητική* που εν καιρώ μας υποδεικνύει καινούρια (και χρήσιμα) γεγονότα ισοδυναμίας κατ' αναλογίαν με τη συνηθισμένη αριθμητική· και

(2) όταν επιτέλους κατασκευάσουμε τον ισχυρό τελεστή πληθικότητας του von Neumann, θα έχουμε ήδη αποδείξει όλες τις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των πληθαρίθμων με το $=_c$ στη θέση του $=$: το μόνο που θα παραμένει θα είναι να αφαιρέσουμε (στο μυαλό μας) το δείκτη $_c$ από αποτελέσματα που ήδη έχουμε καταλάβει, χάρη στο ακόλουθο συμπέρασμα.

**4.26. Άσκηση.** *Αν ορίσουμε τους πληθάριθμους χρησιμοποιώντας ισχυρό τελεστή πληθικότητας, τότε για όλους τους πληθικούς αριθμούς $\kappa, \lambda$,*

$$|\kappa| = \kappa \ \textit{και}\ \kappa =_c \lambda \iff \kappa = \lambda. \tag{4-19}$$

Για να αποδείξουμε ταυτότητες της πληθικής αριθμητικής, χρησιμοποιούμε συστηματικά την (C1) και τις ιδιότητες αντικατάστασης της Άσκησης **4.18**. Για παράδειγμα, η προσεταιριστική ιδιότητα της πληθικής πρόσθεσης δείχνεται με τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
\kappa + (\lambda + \mu) &=_c \kappa \uplus (\lambda + \mu) && \text{ορισμός,} \\
&=_c \kappa \uplus (\lambda \uplus \mu) && \text{ορισμός, (C1) και } \mathbf{4.18}, \\
&=_c (\kappa \uplus \lambda) \uplus \mu && \text{θέλει απόδειξη} \\
&=_c (\kappa + \lambda) + \mu && \text{αναστρέφοντας τα βήματα.}
\end{aligned}$$

Η μαθηματική ουσία αυτού του υπολογισμού είναι στο βήμα με την ένδειξη «θέλει απόδειξη», που σ' αυτήν την περίπτωση είναι πολύ εύκολο:

**4.27. Άσκηση.** *Δείξε ότι για οποιαδήποτε τρία σύνολα $K, L, M$,*

$$K \uplus (L \uplus M) =_c (K \uplus L) \uplus M.$$

**4.28. Άσκηση.** *Δείξε την* (4-17)*, αποδεικνύοντας πρώτα ότι για οποιαδήποτε τρία σύνολα $K, L, M$,*

$$\text{αν } L \cap M = \emptyset, \ \text{ τότε } ((L \cup M) \to K) =_c (L \to K) \times (M \to K).$$

Όσον αφορά την πιο τεχνική ιδιότητα (C3), ας θεωρήσουμε την ταυτότητα

$$|\textstyle\bigcup_{i \in I} A_i| =_c \sum_{i \in I} |A_i|, \tag{4-20}$$

που οπωσδήποτε πρέπει να αληθεύει αν τα σύνολα στην οικογένεια $(i \mapsto A_i)_{i \in I}$ είναι ξένα ανά δύο. Πριν την αποδείξουμε όμως, πρέπει να της δώσουμε σαφές νόημα, και γι' αυτό πρέπει να βεβαιωθούμε ότι πράγματι *υπάρχει συνάρτηση* $(i \mapsto |A_i|)$, και για να αποδείξουμε αυτό χρειαζόμαστε την (C3):

**4.29. Λήμμα.** *Για κάθε οικογένεια συνόλων $A = (i \mapsto A_i)_{i \in I}$ υπάρχει συνάρτηση $f : I \to f[I]$ ώστε*

$$f(i) = |A_i| \quad (i \in I).$$

Απόδειξη. Από την (C3) με

$$\mathcal{E} = \{A_i \mid i \in I\} = A[I],$$

υπάρχει σύνολο $W$ που περιέχει κάθε $|A_i|$ για $i \in I$, και θέτουμε

$$f =_{\mathsf{op}} \{(i, w) \in I \times W \mid w = |A_i|\}. \qquad \dashv$$

Πάντως ταυτότητες σαν την (4-20) χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής για να αποδειχτούν, και επομένως δεν θα έχουμε πολλές ευκαιρίες να χρησιμοποιήσουμε την (C3) πριν από το Κεφάλαιο **8**.

**4.30. Δομημένα σύνολα** (structured sets). *Τοπολογικός χώρος* είναι ένα σύνολο *σημείων* $X$, στο οποίο έχει οριστεί κάποια *τοπολογική δομή* που προσδιορίζεται από μια οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του $X$ με τις εξής ιδιότητες:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
2. $A, B \in \mathcal{T} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.
3. Για κάθε οικογένεια $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{T}$ συνόλων στην $\mathcal{T}$, η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ επίσης ανήκει στην $\mathcal{T}$.

Κάθε οικογένεια συνόλων $\mathcal{T}$ με αυτές τις ιδιότητες καλείται **τοπολογία**, με **ανοικτά σύνολα** τα μέλη της και **κλειστά σύνολα** τα συμπληρώματά τους σχετικά με τον $X$, δηλαδή τα σύνολα της μορφής $X \setminus G$ με το $G$ ανοικτό.

Τέτοιες έννοιες συνόλων «προικισμένων» με δομή βρίσκουμε παντού στα μαθηματικά: υπάρχουν γραφήματα, ομάδες, διανυσματικοί χώροι, πολλαπλότητες, μερικά διατεταγμένοι χώροι κ.λπ. κ.λπ. Σε καθεμιά απ' αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει ένα σύνολο $X$, τυπικά καλούμενο «ο χώρος», και ένα σύμπλεγμα σχετιζόμενων αντικειμένων που επιβάλλουν κάποια δομή στο χώρο—συναρτήσεις, οικογένειες, άλλοι χώροι με τη δική τους δομή κ.λπ. Ο τελεστής ζεύγους προσφέρει έναν απλό τρόπο να απεικονίσουμε πιστά τέτοιες έννοιες στη συνολοθεωρία.

**Δομημένο σύνολο** (ή χώρος) καλείται ένα ζεύγος

$$U = (A, \mathcal{S}), \tag{4-21}$$

όπου το $A = \mathrm{Field}(U)$ είναι σύνολο, το *πεδίο* του $U$, και $\mathcal{S}$ είναι τυχόν αντικείμενο, ο *σκελετός* (frame)[10] του $U$.

Παραδείγματος χάριν, **τοπολογικός χώρος** είναι ένα δομημένο σύνολο $(X, \mathcal{T})$, όπου ο σκελετός $\mathcal{T}$ είναι τοπολογία στο $X$, όπως το ορίσαμε αυτό πιο πάνω. *Ομάδα* είναι ένα δομημένο σύνολο

$$U = (G, (e, \cdot)) \tag{4-22}$$

όπου $e \in G$, $\cdot : G \times G \to G$ είναι διμελής συνάρτηση και ισχύουν τα *αξιώματα ομάδας* τα οποία εδώ δεν μας ενδιαφέρουν. Προσέξτε ότι με τον ορισμό της τριάδας (4-3), ο ορισμός (4-22) είναι ισοδύναμος του

$$U = (G, e, \cdot). \tag{4-23}$$

Συχνά ο σκελετός δομημένου συνόλου είναι $n$-άδα αντικειμένων, και τότε το δομημένο σύνολο είναι $(n+1)$-άδα που έχει για πρώτο στοιχείο το πεδίο. Θα συναντήσουμε πολλά παραδείγματα τέτοιων δομημένων συνόλων στη συνέχεια.

Όπως συνηθίζεται στα μαθηματικά, θα ταυτίζουμε συστηματικά ένα δομημένο σύνολο με το πεδίο του όταν ο σκελετός είναι προφανής ή άνευ σημασίας. Για παράδειγμα, θα αναφερόμαστε στον «τοπολογικό χώρο $X$» αντί για το εξεζητημένο «$(X, \mathcal{T})$», με «σημεία» τα μέλη του $X$, «υποσύνολα» τα υποσύνολα του $X$ κ.λπ. Στη γενική περίπτωση, τα μέλη ενός δομημένου συνόλου $U$ είναι τα μέλη του πεδίου του $\mathrm{Field}(U)$,

$$x \in U \iff_{\text{ορ}} x \in \mathrm{Field}(U), \tag{4-24}$$

τα υποσύνολα του $U$ είναι τα υποσύνολα του $\mathrm{Field}(U)$ κ.λπ. Παρατηρήστε ότι ο συμβατικός συμβολισμός (4-24) δεν μπορεί να προκαλέσει σύγχυση: έχουμε

[10] Πιο ταιριαστό θα ήταν να ονομάζαμε το $\mathcal{S}$ τη *δομή* του χώρου $(A, \mathcal{S})$, αλλά η λέξη αυτή έχει χρησιμοποιηθεί τόσο πολύ στη Λογική και τη Συνολοθεωρία που είναι καλύτερο να αποφύγουμε την αυστηρή σύνδεσή της με μία ακόμη έννοια. Μερικοί καλούν «δομές» τα αντικείμενα που εδώ καλούμε «δομημένα σύνολα», τουλάχιστον όταν αυτά είναι ιδιαίτερα απλά.

(σκόπιμα) αποφύγει να προσδιορίσουμε συγκεκριμένο τελεστή ζεύγους—και μάλιστα δεν έχουμε αποκλείσει την πιθανότητα το ζεύγος $(A, \mathcal{S})$ να είναι άτομο (!)—ώστε η πρόταση

$$x \in (A, \mathcal{S})$$

δεν έχει νόημα μέχρις ότου την ορίσουμε, και μόλις τώρα την ορίσαμε με την (4-24).

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 4

Ο ορισμός του ζεύγους στην απόδειξη του **4.2** ανακαλύφθηκε από τον Πολωνό συνολοθεωρητικό και τοπολόγο Kuratowski. Μερικά χρόνια νωρίτερα, ο Αμερικανός αναλύστας Wiener είχε βρει μιαν άλλη, κάπως πιο πολύπλοκη λύση στο πρόβλημα του ορισμού του ζεύγους στη συνολοθεωρία.

**x4.1.** (Wiener) Οι ιδιότητες (OP1) και (OP2) στο **4.1** ισχύουν με τον εξής ορισμό του ζεύγους:

$$(x, y) =_{\mathsf{op}} \{\{\emptyset, \{x\}\}, \{\{y\}\}\}.$$

**x4.2.** Οι ιδιότητες (OP1) και (OP2) στο **4.1** ισχύουν με τον ακόλουθο ορισμό του ζεύγους:

$$(x, y) =_{\mathsf{op}} \{\{0, x\}, \{1, y\}\},$$

όπου τα $0, 1$ είναι δύο διακεκριμένα αντικείμενα, σαν αυτά που ορίζονται από την (4-16). Υποδειξη. Υπολόγισε τα $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$ και $(1, 0)$ (με αυτό το ζεύγος) για να δεις τι συμβαίνει, και τότε διάκρινε περιπτώσεις, ανάλογα με το αν $x = y$ ή $x \neq y$.

**x4.3.** Δείξε από τα αξιώματα ότι για όλα τα σύνολα $A, B, C$,

$$((A \times B) \to C) =_c (A \to (B \to C)).$$

**x4.4.** Δείξε από τα αξιώματα το θεώρημα του Cantor **2.21**, ότι για κάθε σύνολο $A$, $A <_c \mathcal{P}(A)$. Ποια αξιώματα χρειάζονται;

**x4.5.** Η διμελής σχέση $\sim \subseteq (A \times A)$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$ τότε και μόνον αν υπάρχει σύνολο $Q$ και επιμορφισμός

$$\pi : A \twoheadrightarrow Q \tag{4-25}$$

έτσι ώστε

$$x \sim y \iff \pi(x) = \pi(y). \tag{4-26}$$

Αν ισχύουν οι (4-25) και (4-26), καλούμε το $Q$ **πηλίκο** του $A$ από την $\sim$ και τον $\pi$ **προσδιοριστικό ομομορφισμό** ή απλούστερα **προσδιορισμό** της $\sim$. Στην απόδειξη του **4.12** κατασκευάσαμε το πηλίκο $[\![A/\!\sim]\!]$ και τον προσδιορισμό $(x \mapsto [x/\!\sim])$, αλλά σε πολλές περιπτώσεις υπάρχουν άλλα πηλίκα που βοηθούν περισσότερο την κατανόηση της δομής της συγκεκριμένης σχέσης ισοδυναμίας.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & A \arrow[d, "\pi"] \\ Q \arrow[r, "f^*"] & Q \end{tikzcd}$$

Διαγραμμα **4.4**.

**x4.6.** Υποθέτουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$ και η $\pi : A \to A$ είναι συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$x \sim y \Longrightarrow \pi(x) = \pi(y) \in [x/{\sim}].$$

Δείξε ότι η $\pi$ είναι προσδιορισμός που φανερώνει ότι η εικόνα της $\pi[A] \subseteq A$ είναι πηλίκο του $A$ από την $\sim$.

**x4.7.** Έστω $x_0 \in A$ στοιχείο κάποιου συνόλου και όρισε στο συναρτησιακό χώρο $(A \to B)$ τη σχέση

$$f \sim g \iff_{\text{ορ}} f(x_0) = g(x_0).$$

Δείξε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο χώρο $(A \to B)$, και βρες έναν προσδιορισμό $\pi : (A \to B) \twoheadrightarrow B$ που φανερώνει ότι το $B$ είναι πηλίκο του $(A \to B)$ από την $\sim$.

**x4.8.** Έστω $x_0 \neq x_1$ δύο διαφορετικά μέλη ενός συνόλου $A$. Να ορίσεις προσδιορισμό που φανερώνει ότι το $(B \times B)$ είναι πηλίκο του $(A \to B)$ από τη σχέση ισοδυναμίας

$$f \sim g \iff_{\text{ορ}} f(x_0) = g(x_0) \,\&\, f(x_1) = g(x_1).$$

**x4.9.** Έστω σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $A$ και $f : A \to A$ συνάρτηση που **σέβεται** την $\sim$, δηλαδή

$$x \sim y \Longrightarrow f(x) \sim f(y).$$

Έστω $Q$ οποιοδήποτε πηλίκο του $A$ από την $\sim$. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^* : Q \to Q$ τέτοια ώστε το Διάγραμμα **4.4** να είναι *αντιμεταθετικό*, δηλαδή $\pi f = f^* \pi$,

$$f^*(\pi x) = \pi(f(x)), \quad (x \in A),$$

όπου η $\pi : A \to Q$ είναι ο προσδιορισμός.

**x4.10.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$,

$$\kappa + 0 =_c \kappa, \quad \kappa \cdot 0 =_c 0, \quad \kappa \cdot 1 =_c \kappa.$$

**x4.11.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$,

$$\kappa + (\lambda + \mu) =_c (\kappa + \lambda) + \mu,$$
$$\kappa + \lambda =_c \lambda + \kappa.$$

**x4.12.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$,

$$\begin{aligned}\kappa \cdot (\lambda \cdot \mu) &=_c (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu,\\ \kappa \cdot \lambda &=_c \lambda \cdot \kappa,\\ \kappa \cdot (\lambda + \mu) &=_c \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu.\end{aligned}$$

**x4.13.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa$, $|\mathcal{P}(\kappa)| =_c 2^\kappa$.

**x4.14.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$,

$$\kappa^0 =_c 1, \quad \kappa^1 =_c \kappa, \quad \kappa^2 =_c \kappa \cdot \kappa.$$

**x4.15.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$,

$$\begin{aligned}(\kappa \cdot \lambda)^\mu &=_c \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu,\\ \kappa^{(\lambda+\mu)} &=_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu,\\ (\kappa^\lambda)^\mu &=_c \kappa^{\lambda\cdot\mu}.\end{aligned}$$

**x4.16.** Για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa, \lambda, \mu$

$$\begin{aligned}&\kappa \leq_c \mu \implies \kappa + \lambda \leq_c \mu + \lambda,\\ &\kappa \leq_c \mu \implies \kappa \cdot \lambda \leq_c \mu \cdot \lambda,\\ &\lambda \leq_c \mu \implies \kappa^\lambda \leq_c \kappa^\mu \qquad (\kappa \neq 0),\\ &\kappa \leq_c \lambda \implies \kappa^\mu \leq_c \lambda^\mu.\end{aligned}$$

Για ποιές τιμές των $\lambda, \mu$ δεν ισχύει η τρίτη συνεπαγωγή όταν $\kappa = 0$;

**Προσοχή!** Όπως θα δούμε αργότερα, οι αλγεβρικές πράξεις δε σέβονται πάντα τις αυστηρές ανισότητες ανάμεσα σε άπειρους πληθικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, μπορούμε να έχουμε

$$\kappa <_c \mu, \text{ αλλά } \kappa + \lambda =_c \mu + \lambda.$$

**x4.17.** Για όλα τα σύνολα $A$, $B$ και όλους τους πληθαρίθμους $\kappa$, $\lambda$,

$$\textstyle\prod_{i\in A} B = (A \to B), \quad \prod_{i\in\lambda} \kappa = \kappa^\lambda.$$

**x4.18.** Αν $a \neq b$ είναι διαφορετικά αντικείμενα και $\kappa_a$, $\kappa_b$ είναι πληθάριθμοι, δείξε ότι

$$\begin{aligned}\kappa_a + \kappa_b &=_c \textstyle\sum_{i\in\{a,b\}} \kappa_i,\\ \kappa_a \cdot \kappa_b &=_c \textstyle\prod_{i\in\{a,b\}} \kappa_i.\end{aligned}$$

**x4.19.** Για κάθε οικογένεια πληθαρίθμων με δείκτες

$$\kappa \cdot \textstyle\sum_{i\in I} \lambda_i =_c \sum_{i\in I} \kappa \cdot \lambda_i.$$

**x4.20.** Δείξε ότι $\kappa \cdot \lambda = 0 \iff \kappa = 0 \vee \lambda = 0$. Επίσης δείξε μια από τις κατευθύνσεις της ισοδυναμίας

$$\textstyle\prod_{i\in I} \kappa_i = 0 \iff (\exists i \in I)[\kappa_i = 0]. \tag{4-27}$$

(Αν έδειξες και τις δύο κατευθύνσεις της (4-27), ψάξε να βρεις το λάθος σου, επειδή η μία από τις δύο κατευθύνσεις χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής.)

**x4.21.** Ο ορισμός της ισοδυναμίας κατά τον Zermelo **3.28** συμπίπτει με την ισοπληθικότητα όπως την ορίσαμε, δηλαδή:

$$A =_c B \iff A \sim_Z B.$$

Ο ορισμός **2.6** των απείρων και πεπερασμένων συνόλων χρησιμοποιεί το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών και δεν μπορούμε να μελετήσουμε αυτές τις έννοιες αξιωματικά πριν δώσουμε έναν αξιωματικό ορισμό του $\mathbb{N}$. Υπάρχει όμως και ένας άλλος απλούστερος ορισμός αυτών των εννοιών που μπορούμε να τον δώσουμε τώρα, και τον οποίο θα αποδείξουμε αργότερα ισοδύναμο του **2.6**.

**4.31. Ορισμός.** Το σύνολο $A$ είναι **άπειρο κατά τον Dedekind** αν υπάρχει μονομορφισμός

$$f : A \rightarrowtail B \subsetneq A$$

από το $A$ σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο του εαυτού του. Αν το $A$ δεν είναι Dedekind-άπειρο, τότε είναι **Dedekind-πεπερασμένο**.

**x4.22.** Αν το $A$ είναι άπειρο κατά τον Dedekind και $A =_c B$, τότε και το $B$ είναι άπειρο κατά τον Dedekind.

**x4.23.** Αν το $A$ είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind, τότε και κάθε υποσύνολο του $A$ είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind.

**x4.24.** Κάθε σύνολο $I$ που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\emptyset \in I,\ (\forall x)[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I]$$

είναι άπειρο κατά τον Dedekind.

Οι περισσότερες ιδιότητες των Dedekind-πεπερασμένων συνόλων χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής για την απόδειξή τους. Η επόμενη μπορεί να αποδειχθεί τώρα, αλλά χρειάζεται αρκετή σκέψη.

***x4.25.** Αν το $A$ είναι Dedekind-πεπερασμένο και $t \notin A$, τότε το $A \cup \{t\}$ είναι επίσης Dedekind-πεπερασμένο. Υποδειξη. Υπέθεσε ότι η $\pi : A \cup \{t\} \rightarrowtail A \cup \{t\}$ αφήνει κάποιο σημείο του $A \cup \{t\}$, και θεώρησε περιπτώσεις ανάλογα με το αν αυτό είναι το $t$· ή $\pi(t) = t$· ή «αλλιώς», κι εδώ είναι που χρειάζεται σκέψη.

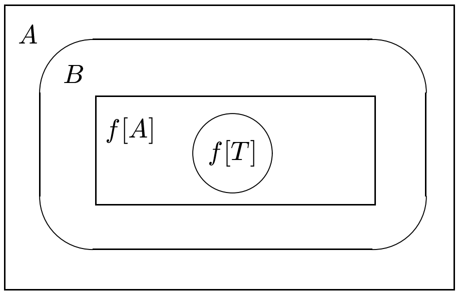
Η κλασική απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein **2.26** χρησιμοποιεί επαγωγή στους φυσικούς αριθμούς και δεν μπορούμε να τη δικαιολογήσουμε αξιωματικά τώρα. Στις επόμενες δύο ασκήσεις σκιαγραφούμε μια τελείως διαφορετική απόδειξη (του Zermelo) γι' αυτό το βασικό θεώρημα, κάπως δυσνόητη, αλλά επίσης κομψή, σύντομη και χωρίς μνεία των φυσικών.

***x4.26.** Αν $A' \subseteq B \subseteq A$ και $A =_c A'$, τότε επίσης $A =_c B$. Υποδειξη. Έστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A'$ αντιστοιχία που φανερώνει ότι $A =_c A'$ και

$$Q = B \setminus f[A]$$

η «έλλειψη» του $B$ από την εικόνα $f[A]$. Ορίζουμε την οικογένεια υποσυνόλων του $A$

$$\mathcal{T} = \{X \mid Q \cup f[X] \subseteq X\}$$




Διαγραμμα **4.5**. Θεώρημα Schröder-Bernstein κατά τον Zermelo.

και επαληθεύουμε πρώτα ότι η τομή

$$T =_{\text{ορ}} \bigcap \mathcal{T} \in \mathcal{T},$$

ώστε $Q \cup f[T] \subseteq T$. Κάπως πιο δύσκολη είναι η απόδειξη ότι πράγματι $T = Q \cup f[T]$· αυτή η ισότητα όμως συνεπάγεται ότι

$$B = T \cup (f[A] \setminus f[T]),$$

που τελειώνει την απόδειξη, αφού τα $T$ και $(f[A] \setminus f[T])$ είναι ξένα σύνολα και η ένωσή τους είναι (εύκολα πια) ισοπληθική με το $A$.

$^*$**x4.27.** Δείξε το θεώρημα Schröder-Bernstein από τα αξιώματα, χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα **x4.26**. Υποδειξη. Αν $f : A \rightarrowtail C$ και $g : C \rightarrowtail A$, τότε

$$A =_c gf[A] \subseteq g[C] \subseteq A, \quad g[C] =_c C.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# ΟΙ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η βασική διαισθητική κατανόηση που έχουμε για τους φυσικούς αριθμούς είναι ότι υπάρχει ένας (ελάχιστος) αριθμός 0, ότι κάθε αριθμός $n$ έχει έναν (αμέσως) επόμενο $Sn$, και ότι αν ξεκινήσουμε με το 0 και κατασκευάσουμε διαδοχικά τον επόμενο του κάθε αριθμού

$$0,\ S0 = 1,\ S1 = 2,\ S2 = 3,\ \ldots$$

επ' άπειρον, τότε θα απαριθμήσουμε όλους τους φυσικούς αριθμούς. Στο πλαίσιο της συνολοθεωρίας, αυτή η διαίσθηση εκφράζεται από τον εξής αξιωματικό ορισμό:

**5.1. Ορισμός. Σύστημα Peano** ή **σύστημα φυσικών αριθμών** είναι ένα δομημένο σύνολο

$$(\mathbb{N}, 0, S) = (\mathbb{N}, (0, S))$$

που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες.

1. Το $\mathbb{N}$ είναι σύνολο που περιέχει το στοιχείο 0, $0 \in \mathbb{N}$.
2. Η $S$ είναι συνάρτηση στο $\mathbb{N}$, $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. Η $S$ είναι μονομορφισμός, $Sn = Sm \Longrightarrow n = m$.
4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $Sn \neq 0$.
5. **Αρχή Επαγωγής** (Induction Principle). Για κάθε $X \subseteq \mathbb{N}$,

$$[0 \in X \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Longrightarrow Sn \in X]] \Longrightarrow X = \mathbb{N}.$$

Οι προφανείς αυτές ιδιότητες των αριθμών καλούνται **αξιώματα του Peano**, προς τιμήν του Ιταλού λογικού και μαθηματικού που πρώτος τα πρότεινε σαν αξιωματική βάση για τη θεωρία αριθμών. Το πιο σημαντικό από αυτά είναι η Αρχή Επαγωγής, που χρησιμοποιείται χαρακτηριστικά στο επόμενο λήμμα.

**5.2. Λήμμα.** *Σε ένα σύστημα φυσικών αριθμών* $(\mathbb{N}, 0, S)$, *κάθε στοιχείο* $n \neq 0$ *είναι επόμενος,*

$$\text{αν} \quad n \neq 0, \ \text{τότε} \ \ (\exists m \in \mathbb{N})[n = Sm],$$

*και για κάθε* $n$, $Sn \neq n$.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την πρώτη πρόταση με την Αρχή Επαγωγής, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \vee (\exists m \in \mathbb{N})[n = Sm]\}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες

$$0 \in X, \quad (\forall n \in \mathbb{N})[n \in X \Longrightarrow Sn \in X],$$

που είναι και οι δύο προφανείς από τον ορισμό του $X$. Με τον ίδιο τρόπο, για τη δεύτερη πρόταση αρκεί να επαληθεύσουμε ότι $S0 \neq 0$ (που ισχύει επειδή γενικά, $Sn \neq 0$) και ότι $Sn \neq n \Longrightarrow SSn \neq Sn$: αυτό ισχύει επειδή η $S$ είναι ένα-προς-ένα, έτσι που $SSn = Sn \Longrightarrow Sn = n$. ⊣

Δεν είναι βέβαια προφανές ότι η αριθμοθεωρία, ένας από τους πιο πλούσιους και αναπτυγμένους κλάδους των μαθηματικών, μπορεί να οικοδομηθεί με βάση αυτά τα πέντε απλά αξιώματα, και πράγματι δεν φτάνουν, χρειάζεται και η θεωρία συνόλων που (στη διαισθητική της μορφή) ο Peano τη θεωρούσε δεδομένη, σαν μέρος της «λογικής». Θα δείξουμε εδώ ότι τα αξιώματα πράγματι συνεπάγονται τουλάχιστον τις πρώτες βασικές ιδιότητες (αυτές που χρειαζόμαστε) της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης των αριθμών. Επιπλέον, οι αποδείξεις που θα δώσουμε είναι χαρακτηριστικά δείγματα της χρήσης των αξιωμάτων στα πιο προχωρημένα μέρη της θεωρίας αριθμών.

Αν η αριθμοθεωρία μπορεί να θεμελιωθεί με βάση τα αξιώματα του Peano, τότε για να την απεικονίσουμε πιστά στη θεωρία συνόλων αρκεί να αποδείξουμε τα επόμενα δύο θεωρήματα.

**5.3. Θεώρημα (Ύπαρξη των φυσικών αριθμών).** *Υπάρχει τουλάχιστον ένα σύστημα Peano* $(\mathbb{N}, 0, S)$.

**5.4. Θεώρημα (Μοναδικότητα των φυσικών αριθμών).** *Αν τα* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ *και* $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ *είναι συστήματα Peano, τότε υπάρχει ακριβώς μία αντιστοιχία*

$$\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{N}_2$$

*που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2, \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n), \quad (n \in \mathbb{N}_1). \end{aligned}$$

Μια αντιστοιχία $\pi$ που ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις λέγεται **ισομορφισμός** του $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ με το $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, δηλαδή συνοπτικά το θεώρημα βεβαιώνει ότι *όλα τα συστήματα Peano είναι (με μοναδικό τρόπο) ισομορφικά ανά δύο.*

Το Θεώρημα Ύπαρξης είναι πολύ απλό και θα το αποδείξουμε αμέσως.

**5.5. Απόδειξη της ύπαρξης των φυσικών αριθμών, 5.3**. Από το Αξίωμα Απείρου (**VI**) ξέρουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $I$ τέτοιο ώστε

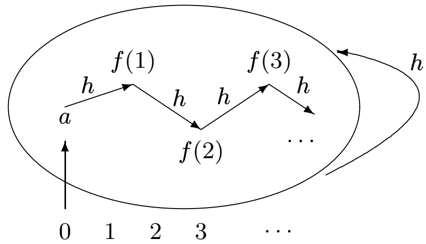
$$\begin{gathered} \emptyset \in I, \\ (\forall n)[n \in I \Longrightarrow \{n\} \in I]. \end{gathered}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το $I$, ορίζουμε πρώτα την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{I} = \{X \subseteq I \mid \emptyset \in X \,\&\, (\forall n)[n \in X \Longrightarrow \{n\} \in X]\}$$

έτσι ώστε προφανώς $I \in \mathcal{I}$, και θέτουμε

$$\mathbb{N} = \bigcap \mathcal{I}, \quad 0 = \emptyset, \quad S = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m = \{n\}\}.$$




Διαγραμμα **5.1**. Το Θεώρημα Αναδρομής.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η τριάδα $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι σύστημα Peano. Καταρχήν $\mathbb{N} \in \mathcal{I}$, επειδή $X \in \mathcal{I} \Longrightarrow \emptyset \in X$ και επομένως $\emptyset \in \bigcap \mathcal{I} = \mathbb{N}$ και με τον ίδιο συλλογισμό,

$$n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{I})[n \in X] \Longrightarrow (\forall X \in \mathcal{I})[\{n\} \in X] \Longrightarrow \{n\} \in \mathbb{N}.$$

Αυτό συνεπάγεται αμέσως τα πρώτα δύο αξιώματα του Peano, τα επόμενα δύο αληθεύουν επειδή (γενικά, για όλα τα $n$, $m$) $\{n\} = \{m\} \Longrightarrow n = m$ και $\{n\} \neq \emptyset$, και η Αρχή Επαγωγής έπεται αμέσως από τον ορισμό του $\mathbb{N}$ σαν τομή. $\dashv$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Μοναδικότητας **5.4** στηρίζεται στο εξής θεμελιακό θεώρημα της αξιωματικής αριθμοθεωρίας.

**5.6. Θεώρημα Αναδρομής**. *Ας υποθέσουμε ότι το $(\mathbb{N}, 0, S)$ είναι σύστημα Peano, το $E$ είναι σύνολο, $a \in E$, και η $h : E \to E$ είναι συνάρτηση: υπάρχει τότε μία και μόνο μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες*

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(Sn) &= h(f(n)) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Το Θεώρημα Αναδρομής δικαιολογεί τον συνηθισμένο τρόπο με τον οποίο ορίζουμε συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς **αναδρομικά**[11] (ή επαγωγικά): δηλαδή για να ορίσουμε την $f : \mathbb{N} \to E$, προσδιορίζουμε απαρχής την τιμή $f(0) = a$ και δίνουμε μια συνάρτηση $h : E \to E$ που προσδιορίζει την τιμή $f(Sn)$ της $f$ σε κάθε επόμενο αριθμό $Sn$ από την τιμή $f(n)$ της $f$ στον προηγούμενό του $n$: $f(Sn) = h(f(n))$. Η διαισθητική κατανόηση των φυσικών αριθμών που περιγράψαμε πιο πάνω προφανώς δικαιολογεί τέτοιους ορισμούς, και επομένως πρέπει να τους δικαιολογήσουμε και στην αξιωματική αριθμοθεωρία.

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα Αναδρομής θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη απόδειξη που είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα της χρήσης του.

[11] Οι λέξεις «αναδρομή» και «επαγωγή» πολλές φορές χρησιμοποιούνται συνώνυμα στα μαθηματικά. Εδώ θα ακολουθήσουμε την πιο σύγχρονη χρήση των όρων που διαχωρίζει **αναδρομικούς ορισμούς** από **επαγωγικές αποδείξεις**.

**5.7. Απόδειξη της μοναδικότητας των φυσικών αριθμών, 5.4**. Υποθέτουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano. *Από το Θεώρημα Αναδρομής στο* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ με $E = \mathbb{N}_2$, $a = 0_2$, $h = S_2$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\pi : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi(0_1) &= 0_2, \\ \pi(S_1 n) &= S_2 \pi(n) \quad (n \in \mathbb{N}_1), \end{aligned}$$

και υπολείπεται μόνο να αποδείξουμε ότι αυτή η $\pi$ είναι (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία.

(1) **Η $\pi$ είναι επιμορφισμός**, $\pi : \mathbb{N}_1 \twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$. Προφανώς $0_2 \in \pi[\mathbb{N}_1]$ αφού $0_2 = \pi(0_1)$, και

$$\begin{aligned} m \in \pi[\mathbb{N}_1] &\implies (\exists n \in \mathbb{N}_1)[m = \pi(n)] \\ &\implies (\exists n \in \mathbb{N}_1)[S_2 m = S_2\pi(n) = \pi(S_1 n)] \\ &\implies S_2 m \in \pi[\mathbb{N}_1], \end{aligned}$$

συνεπώς, από *την Αρχή Επαγωγής στο* $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$, $\pi[\mathbb{N}_1] = \mathbb{N}_2$.

(2) **Η $\pi$ είναι μονομορφισμός**, $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail \mathbb{N}_2$. Αρκεί να ελέγξουμε ότι αν θέσουμε

$$X = \{n \in \mathbb{N}_1 \mid (\forall m \in \mathbb{N}_1)[\pi(m) = \pi(n) \Longrightarrow m = n]\},$$

τότε

$$0_1 \in X, \quad n \in X \Longrightarrow S_1 n \in X,$$

γιατί μαζί με *την Αρχή Επαγωγής στο* $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$, οι προτάσεις αυτές συνεπάγονται ότι $X = \mathbb{N}_1$, δηλαδή ότι η $\pi$ είναι μονομορφισμός. Για την πρώτη συνθήκη,

$$\begin{aligned} m \neq 0_1 &\implies m = S_1 m' \text{ για κάποιο } m' \text{ από το Λήμμα } \mathbf{5.2} \\ &\implies \pi(m) = \pi(S_1 m') = S_2\pi(m') \neq 0_2, \end{aligned}$$

άρα αν $\pi(m) = \pi(0_1) = 0_2$, τότε $m = 0_1$ και $0_1 \in X$. Για τη δεύτερη συνθήκη, αρκεί να δείξουμε ότι

$$n \in X \,\&\, \pi(m) = \pi(S_1 n) \Longrightarrow m = S_1 n.$$

Η υπόθεση μας δίνει

$$\pi(m) = \pi(S_1 n) = S_2\pi(n) \neq 0_2,$$

που συνεπάγεται ότι $m \neq 0_1$, αφού $\pi(0_1) = 0_2$ και $0_1 \in X$. Από το Λήμμα **5.2** και πάλι, $m = S_1 m'$ για κάποιο $m' \in \mathbb{N}_1$,

$$\pi(m) = \pi(S_1 m') = S_2\pi(m')$$

και η υπόθεση $\pi(m) = \pi(S_1 n)$ μας δίνει

$$S_2\pi(m') = S_2\pi(n),$$

που συνεπάγεται $\pi(m') = \pi(n)$. Αυτό πάλι συνεπάγεται $m' = n$ επειδή $n \in X$, οπότε $m = S_1 m' = S_1 n$, αυτό που θέλαμε. ⊣

**5.8. Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής, 5.6.** Με τις υποθέσεις του θεωρήματος, ορίζουμε πρώτα το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των *προσεγγίσεων* της συνάρτησης που θέλουμε να κατασκευάσουμε:

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{A} \iff_{\text{ορ}} \ & \text{Function}(p) \\ & \& \, \text{Domain}(p) \subseteq \mathbb{N} \,\&\, \text{Image}(p) \subseteq E \\ & \& \, 0 \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(0) = a \\ & \& \, (\forall n \in \mathbb{N})[Sn \in \text{Domain}(p) \\ & \qquad \Longrightarrow n \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(Sn) = h(p(n))]. \end{aligned} \tag{5-1}$$

Με λόγια, κάθε $p \in \mathcal{A}$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και τιμές στο $E$· από την τρίτη πρόταση το Domain$(p)$ περιέχει το 0· και η τελευταία συνεπάγεται ότι το Domain$(p)$ «είναι κλειστό προς τα κάτω», δηλαδή αν $Sn \in \text{Domain}(p)$, τότε $n \in \text{Domain}(p)$, και η τιμή $p(Sn)$ καθορίζεται από το $p(n)$. Μερικά παραδείγματα προσεγγίσεων είναι τα

$$\{(0,a)\}, \{(0,a),(S0,f(a))\}, \{(0,a),(S0,f(a)),(SS0,f(f(a)))\}, \ldots$$

τα οποία υποδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο «χτίζεται» η ζητούμενη συνάρτηση βήμα-προς-βήμα από τον αναδρομικό ορισμό. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, πρέπει να δείξουμε (αυστηρά από τα αξιώματα, χωρίς « . . . » ή «κ.λπ.») ότι υπάρχει ακριβώς μία προσέγγιση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{N}$.

**Λήμμα.** *Για όλα τα $p, q \in \mathcal{A}$ και $n \in \mathbb{N}$,*

$$n \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q) \Longrightarrow p(n) = q(n).$$

*Απόδειξη.* Το σύνολο

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall p, q \in \mathcal{A})\Big[n \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q) \Longrightarrow p(n) = q(n)\Big]\}$$

προφανώς περιέχει το 0, αφού για κάθε $p \in \mathcal{A}$, $p(0) = a$. Αν

$$n \in X \,\&\, p \in \mathcal{A} \,\&\, q \in \mathcal{A} \,\&\, Sn \in \text{Domain}(p) \cap \text{Domain}(q),$$

τότε

$$\begin{aligned} p(Sn) &= h(p(n)) && \text{επειδή } p \in \mathcal{A}, \\ &= h(q(n)) && \text{επειδή } p(n) = q(n), \\ &= q(Sn) && \text{επειδή } q \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

ώστε αν $n \in X$, τότε $Sn \in X$. Από την Αρχή Επαγωγής έπεται ότι $X = \mathbb{N}$ και το Λήμμα αληθεύει. ⊣ (Λήμμα)

Το Λήμμα συνεπάγεται αμέσως ότι *το πολύ μία* συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ ανήκει στο $\mathcal{A}$, οπότε παραμένει μόνο να δείξουμε ότι *τουλάχιστον μία* τέτοια $f$ υπάρχει. Αυτή είναι η ένωση

$$f = \bigcup \mathcal{A} = \{(n,w) \mid (\exists p \in \mathcal{A})[n \in \text{Domain}(p) \,\&\, p(n) = w]\},$$

η οποία καταρχήν είναι συνάρτηση, επειδή

$$\begin{aligned}(n, w) \in f \,\&\, (n, w') \in f &\implies (\exists p, q \in \mathcal{A})[(n, w) \in p \,\&\, (n, w') \in q] \\ &\implies w = w' \text{ από το Λήμμα },\end{aligned}$$

και από τον ορισμό του $\mathcal{A}$ και έναν παρόμοιο υπολογισμό έπεται ότι $f \in \mathcal{A}$. Υπολείπεται μόνο να επαληθεύσουμε ότι $\mathrm{Domain}(f) = \mathbb{N}$, και γι' αυτό χρησιμοποιούμε άλλη μια φορά την Αρχή Επαγωγής. Προφανώς $0 \in \mathrm{Domain}(f)$, αφού $0 \in \mathrm{Domain}(p)$ για κάθε $p \in \mathcal{A}$ και $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Αν $n \in \mathrm{Domain}(f)$, τότε υπάρχει κάποια συνάρτηση $p \in \mathcal{A}$ με $n \in \mathrm{Domain}(p)$, και επομένως (εύκολα)

$$q = p \cup \{(Sn, h(p(n)))\} \in \mathcal{A},$$

ώστε $Sn \in \mathrm{Domain}(q) \subseteq \mathrm{Domain}(f)$. ⊣

**5.9. Οι φυσικοί αριθμοί.** Καθορίζουμε τώρα ένα συγκεκριμένο σύστημα Peano $(\mathbb{N}, 0, S)$ τα μέλη του οποίου θα τα λέμε **φυσικούς αριθμούς**, ή απλά **αριθμούς**, όταν δεν υπάρχει σύγχυση. Ακολουθώντας τον Cantor, συμβολίζουμε τον πληθάριθμο του $\mathbb{N}$ με το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου,

$$\aleph_0 =_{\text{ορ}} |\mathbb{N}|. \tag{5-2}$$

Αργότερα θα συναντήσουμε τους αμέσως επόμενούς του, $\aleph_1$, $\aleph_2$ κ.λπ. Συναρτήσεις $a : \mathbb{N} \to A$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ καλούνται **ακολουθίες** και συνήθως η μεταβλητή τους τοποθετείται σαν δείκτης,

$$a_n = a(n) \quad (n \in \mathbb{N}, a : \mathbb{N} \to A).$$

Μια προφανής επιλογή για το $\mathbb{N}$ είναι το σύστημα που κατασκευάσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος Ύπαρξης **5.3**, όπου $0 = \emptyset$,

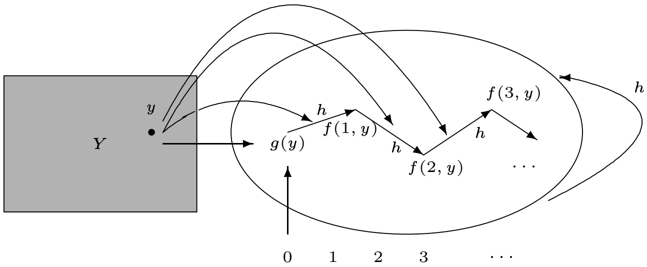
$$\mathbb{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

και $Sn = \{n\}$. Μια άλλη επιλογή, που μερικοί θα την προτιμήσουν για φιλοσοφικούς λόγους, είναι να δεχτούμε ότι υπάρχει πράγματι το σύνολο

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

των «αληθινών φυσικών αριθμών», οι οποίοι δεν είναι σύνολα αλλά «αριθμοί», και ο επόμενος $S$ δεν είναι η κάπως άσχετη συνάρτηση $(n \mapsto \{n\})$, αλλά η συνάρτηση που συσχετίζει με κάθε αριθμό $n$ τον «επόμενο αριθμό» $Sn$. Η θεωρία του Zermelo επιτρέπει τέτοια μη σύνολα (σαν τους «αληθινούς αριθμούς») ως άτομα, και επιμένει μόνο σε ένα πράγμα: το σύστημα των φυσικών αριθμών πρέπει να ικανοποιεί τα αξιώματα του Peano, κάτι που κάθε σοβαρός άνθρωπος αποδέχεται χωρίς δισταγμό. Όσον αφορά τη μαθηματική θεωρία των αριθμών και συνόλων που αναπτύσσουμε, αυτές οι δύο (και όλες οι άλλες) επιλογές του συνόλου των φυσικών αριθμών είναι ισοδύναμες, αφού θα στηρίξουμε όλες τις αποδείξεις μόνο στα αξιώματα του Peano.

**5.10. Το Θεώρημα Schröder-Bernstein 2.26.** Στο σημείο αυτό, πρέπει να επανεξετάσουμε την απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος και να βεβαιωθούμε πως *μπορούμε πλέον να τη στηρίξουμε μόνο στα αξιώματα*· αυτό ισχύει επειδή οι αναδρομικοί ορισμοί των ακολουθιών συνόλων $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και




Διαγραμμα **5.2**. Το Θεώρημα Αναδρομής με παραμέτρους.

$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δικαιολογούνται από το Θεώρημα Αναδρομής, και οι βασικές τους ιδιότητες εδραιώνονται με επαγωγή και απλές πράξεις συναρτήσεων, κι όλα αυτά μπορούν να βασιστούν στα αποτελέσματα στο Κεφάλαιο **4**.

Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές μορφές του Θεωρήματος Αναδρομής που χρησιμεύουν σε εφαρμογές. Αναφέρουμε εδώ μόνο δύο απ' αυτές, στις αποδείξεις των οποίων φαίνεται η χρήση του θεωρήματος. Δύο ακόμα παρόμοιες μορφές βρίσκονται στα προβλήματα, **x5.20** και **x5.21**.

**5.11. Πόρισμα (Αναδρομή με παραμέτρους).** *Για όλα τα σύνολα $Y$, $E$ και συναρτήσεις*

$$g : Y \to E, \quad h : E \times Y \to E,$$

*υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N}\times Y \to E$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες*

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) && (y \in Y), \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), y) && (y \in Y, n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για κάθε $y \in Y$ ορίζουμε τη συνάρτηση $h_y : E \to E$ με τον τύπο

$$h_y(w) = h(w, y),$$

και από το Θεώρημα Αναδρομής ξέρουμε ότι υπάρχει *ακριβώς μία* συνάρτηση

$$f_y : \mathbb{N} \to E$$

που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} f_y(0) &= g(y), \\ f_y(Sn) &= h_y(f_y(n)) = h(f_y(n), y). \end{aligned}$$

Προκύπτει αμέσως ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ ορισμένη με τον τύπο

$$f(n, y) =_{\text{ορ}} f_y(n) \quad (y \in Y, n \in \mathbb{N})$$

ικανοποιεί το συμπέρασμα του Πορίσματος. ⊣

**5.12. Πόρισμα (Αναδρομή με το όρισμα σαν παράμετρο).** *Για κάθε σύνολο $E$, καθε $a \in E$, και κάθε συνάρτηση $h : E \times \mathbb{N} \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις:*

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(Sn) &= h(f(n), n). \end{aligned}$$

*Όμοια, με παραμέτρους, για κάθε*

$$g : Y \to E, \quad h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E,$$

*υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} f(0, y) &= g(y) && (y \in Y), \\ f(Sn, y) &= h(f(n, y), n, y) && (y \in Y,\ n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Αποδειξη. Για τη μορφή με τις παραμέτρους, αρχικά ορίζουμε συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{N} \times Y \to \mathbb{N} \times E$$

χρησιμοποιώντας αναδρομή με παραμέτρους **5.11**, όπου οι συναρτήσεις First και Second είναι αυτές της Άσκησης **4.3**:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= (0, g(y)) \\ \phi(Sn, y) &= (S\mathrm{First}(\phi(n, y)), h(\mathrm{Second}(\phi(n, y)), \mathrm{First}(\phi(n, y)), y).) \end{aligned}$$

Με επαγωγή στο $h$, αμέσως,

$$\mathrm{First}(\phi(n, y)) = n,$$

κι έτσι η συνάρτηση $\phi$ ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\phi(0, y) = (0, g(y)), \quad \phi(Sn, y) = (Sn, h(\mathrm{Second}(\phi(n, y)), n, y)).$$

Απ' αυτό συνάγουμε ότι η συνάρτηση

$$f(n, y) = \mathrm{Second}(\phi(n, y))$$

ικανοποιεί τις εξισώσεις που θέλουμε.

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται εύκολα, με επαγωγή στο $n$. ⊣

Χρησιμοποιόντας τα παραπάνω, ορίζουμε και θεμελιώνουμε τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης στο $\mathbb{N}$.

**5.13. Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός.** Η συνάρτηση της πρόσθεσης στους αριθμούς ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} n + 0 &= n, \\ n + (Sm) &= S(n + m), \end{aligned} \tag{5-3}$$

κι έπειτα, χρησιμοποιώντας την πρόσθεση, ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό από την αναδρομή

$$\begin{aligned} n \cdot 0 &= 0, \\ n \cdot Sm &= (n \cdot m) + n. \end{aligned} \tag{5-4}$$

Αναλυτικότερα, ξέρουμε από το **5.11** ότι υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0, n) &= g(n), \\ f(Sm, n) &= h(f(m, n), n), \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $g$ και $h$ ορίζονται σαν σύνολα ζευγών,

$$\begin{aligned} g &= \{(n, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n \in \mathbb{N}\}, \\ h &= \{((z, n), w) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \mid w = Sz\}, \end{aligned}$$

και ορίζουμε την πρόσθεση με τον τύπο

$$n + m = f(m, n),$$

δηλαδή $+ = \{((n, m), w) \mid ((m, n), w) \in f\}$. Τέτοιες τερατώδεις σχολαστικότητες δεν βοηθούν την κατανόηση (μάλλον βλάπτουν) και θα τις αποφύγουμε.

**5.14. Θεώρημα.** *Η πρόσθεση είναι* **προσεταιριστική** *πράξη, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση*

$$(n + m) + k = n + (m + k) \tag{5-5}$$

Απόδειξη. Πρώτα για $k = 0$,

$$(n + m) + 0 = n + m = n + (m + 0),$$

χρησιμοποιώντας δύο φορές τη σχέση $w + 0 = w$ από τον ορισμό της πρόσθεσης. Επαγωγικά, δεχόμενοι ότι για κάποιο $k$

$$(n + m) + k = n + (m + k), \tag{5-6}$$

υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} (n + m) + Sk &= S((n + m) + k) \\ &= S(n + (m + k)) \text{ από την (5-6)} \\ &= n + S(m + k) \\ &= n + (m + Sk) \end{aligned}$$

όπου οι μη δικαιολογημένες εξισώσεις προκύπτουν από τον ορισμό της πρόσθεσης. ⊣

Η μεταθετικότητα της πρόσθεσης δεν είναι τόσο απλή και χρειάζεται δύο λήμματα:

**5.15. Λήμμα.** *Για κάθε αριθμό $n$, $0 + n = n$.*

Απόδειξη. Επαγωγικά, $0+0 = 0$ συνάγεται από τον ορισμό, και αν $0+n = n$, τότε $0 + Sn = S(0 + n) = Sn$. ⊣

**5.16. Λήμμα.** *Για όλους τους αριθμούς $n$, $m$, $n + Sm = Sn + m$.*

Αποδειξη. Με επαγωγή στο $m$, πρώτα για $m = 0$, αμέσως από τον ορισμό:

$$n + S0 = S(n+0) = Sn = Sn + 0.$$

Για το επαγωγικό βήμα, δεχόμαστε ότι για κάποιο $m$,

$$n + Sm = Sn + m \tag{5-7}$$

και πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$n + SSm = Sn + Sm.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} n + SSm &= S(n + Sm) && \text{από τον ορισμό} \\ &= S(Sn + m) && \text{από την (5-7)} \\ &= Sn + Sm && \text{από τον ορισμό.} \end{aligned}$$ ⊣

**5.17. Θεώρημα.** *Η πρόσθεση είναι* **μεταθετική** *πράξη, δηλαδή*

$$n + m = m + n.$$

Αποδειξη. Με επαγωγή στο $m$, η βάση έπεται αμέσως από το Λήμμα **5.15**. Για το επαγωγικό βήμα, δεχόμαστε ότι για κάποιο συγκεκριμένο $m$

$$n + m = m + n \tag{5-8}$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} n + Sm &= S(n + m) && \text{από τον ορισμό} \\ &= S(m + n) && \text{από την (5-8)} \\ &= m + Sn && \text{από τον ορισμό} \\ &= Sm + n && \text{από το Λήμμα } \mathbf{5.16}. \end{aligned}$$ ⊣

**5.18. Άσκηση.** *Για κάθε αριθμό $n$, η συνάρτηση $(s \mapsto n + s)$ είναι ένα-προς-ένα, άρα $n + s = n + t \Longrightarrow s = t$, και ειδικότερα,*

$$\text{αν } \; n + s = n, \; \text{ τότε } \; s = 0.$$

**5.19. Ορισμός.** Μια διμελής σχέση $\leq$ σε ένα σύνολο $P$ είναι **μερική διάταξη** (partial ordering) αν είναι αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική (antisymmetric), δηλαδή για όλα τα $x, y, z \in P$,

$$\begin{aligned} &x \leq x && \text{(αυτοπάθεια),} \\ &x \leq y \,\&\, y \leq z \Longrightarrow x \leq z && \text{(μεταβατικότητα),} \\ &x \leq y \,\&\, y \leq x \Longrightarrow x = y && \text{(αντισυμμετρικότητα).} \end{aligned}$$

Σχετικά με μερικές διατάξεις θα χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό

$$x < y \iff_{\text{ορ}} x \leq y \,\&\, x \neq y.$$

Η $\leq$ είναι **ολική** (total), ή **γραμμική** (linear) ή απλά **διάταξη** αν επιπλέον όλα τα στοιχεία του $P$ είναι **συγκρίσιμα** (comparable) ανά δύο ως προς την $\leq$, δηλαδή

$$(\forall x, y \in P)[x \leq y \vee y \leq x],$$

ή ισοδύναμα

$$(\forall x, y \in P)[x < y \vee x = y \vee y < x].$$

**5.20. Ορισμός.** Η διμελής σχέση $\leq$ στο $P$ είναι **καλή διάταξη** (wellordering) του συνόλου $P$, αν είναι ολική διάταξη του $P$ και επιπλέον κάθε μη κενό υποσύνολο του $P$ έχει ένα ελάχιστο στοιχείο, συμβολικά:

$$(\forall X \subseteq P)[X \neq \emptyset \Longrightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)[x \leq y]].$$

**5.21. Ορισμός.** Η σχέση διάταξης $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς ορίζεται με την ισοδυναμία

$$n \leq m \iff_{\text{ορ}} (\exists s)[n + s = m].$$

Βασική ιδιότητα της $\leq$ είναι η εξής:

**5.22. Λήμμα.** *Για όλους τους αριθμούς $n, m$,*

$$n \leq Sm \iff n \leq m \vee n = Sm.$$

Αποδειξη. Αν $n \leq Sm$, τότε εξ ορισμού υπάρχει $t$ τέτοιος ώστε $n + t = Sm$ και εξετάζουμε δύο περιπτώσεις. Περιπτωση (1), $t = 0$. Τώρα $n + 0 = Sm$, επομένως $n = Sm$. Περιπτωση (2), $n + t = Sm$ για κάποιο $t \neq 0$. Τώρα από το Λήμμα **5.2**, $t = Ss$ για κάποιο $s$, οπότε $n + Ss = Sm$, άρα $S(n + s) = Sm$, άρα $n + s = m$ αφού η $S$ είναι μονομορφισμός και επομένως $n \leq m$. Η άλλη κατεύθυνση του Λήμματος είναι ευκολότερη. $\dashv$

**5.23. Θεώρημα.** *Η σχέση $\leq$ στους φυσικούς αριθμούς είναι καλή διάταξη.*

Αποδειξη. Η αυτοπάθεια είναι προφανής από το $n + 0 = n$ και η μεταβατικότητα ισχύει επειδή $n + s = m \,\&\, m + t = k \Longrightarrow n + (s + t) = k$. Για την αντισυμμετρικότητα, παρατηρούμε ότι αν $n + s = m$ και $m + t = n$, τότε $n + (s + t) = n$ και η Άσκηση **5.18** συνεπάγεται $s + t = 0$· επομένως $t = 0$ (αλλιώς ο $s + t$ είναι επόμενος) και τελικά $m = n$.

*Απόδειξη γραμμικότητας.* Θα δείξουμε ότι $(\forall n)[n \leq m \vee m \leq n]$, με επαγωγή στο $m$. Παρατηρούμε αρχικά πως για κάθε $n$, $n \leq Sn$, διότι $n + S0 = Sn$.

Βαση. Για κάθε $n$, $0 + n = n$ και επομένως $0 \leq n$.

Επαγωγικο Βημα. Δεχόμαστε την επαγωγική υπόθεση

$$(\forall n)[n \leq m \vee m \leq n]$$

και δείχνουμε ότι για κάθε $n$, $n \leq Sm \vee Sm \leq n$. Η επαγωγική υπόθεση χωρίζει φυσικά την απόδειξη σε δύο περιπτώσεις: Αν $n \leq m$, τότε $n \leq Sm$ αφού $m \leq Sm$ και η $\leq$ είναι μεταβατική. Αν $m \leq n$, τότε για κάποιο $t$, $m + t = n$, και έχουμε πάλι δύο περιπτώσεις: αν $t = 0$, τότε $n = m \leq Sm$, και αν $t \neq 0$, τότε $t = Ss$ για κάποιο $s$, άρα $m + Ss = n$ και από το Λήμμα **5.16** $Sm + s = n$, κι άρα $Sm \leq n$.

**Απόδειξη ιδιότητας καλής διάταξης.** Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι το $X$ είναι μη κενό και χωρίς ελάχιστο μέλος και θέτουμε

$$Y = \{n \in \mathbb{N} \mid (\forall m \leq n)[m \notin X]\},$$

ώστε προφανώς

$$Y \cap X = \emptyset. \tag{5-9}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $0 \in Y$ και $n \in Y \Longrightarrow Sn \in Y$, γιατί τότε $Y = \mathbb{N}$ από την Αρχή Επαγωγής και άρα $X = \emptyset$ από την (5-9), που είναι άτοπο.

Βαση. $0 \in Y$. Το 0 είναι ο ελάχιστος αριθμός και επομένως $0 \notin X$ (αλλιώς το $X$ θα είχε ελάχιστο) και επίσης $m \leq 0 \Longrightarrow m = 0 \Longrightarrow m \notin X$, άρα $0 \in Y$.

Επαγωγικο Βημα. Η επαγωγική υπόθεση $n \in Y$ και ο ορισμός του $Y$ συνεπάγονται ότι $(\forall m \leq n)m \notin X$, και από το Λήμμα **5.22** γνωρίζουμε ότι $m \leq Sn \Longrightarrow m \leq n \vee m = Sn$. Άρα για να επαληθεύσουμε την $Sn \in Y$, αρκεί να δείξουμε ότι $Sn \notin X$. Αλλά αν το $Sn$ ανήκε στο $X$, τότε θα ήταν το ελάχιστό του μέλος αφού

$$\begin{aligned} m < Sn &\Longleftrightarrow m \leq n && \text{από το Λήμμα } \mathbf{5.22} \\ &\Longrightarrow m \notin X && \text{από την επαγωγική υποθεση.} \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η $\leq$ είναι καλή διάταξη και συμπληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. ⊣

Για καλές διατάξεις, γενικά, θα πούμε πολλά αργότερα, στο Κεφάλαιο **7**. Ειδικά για τους φυσικούς αριθμούς, το γεγονός ότι το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο από την $\leq$ είναι μια άλλη έκφραση της Αρχής Επαγωγής.

Περνάμε τώρα στις εφαρμογές των φυσικών αριθμών στη συνολοθεωρία και ιδιαίτερα τη θεωρία των πεπερασμένων και απαριθμητών συνόλων, αφού πρώτα επαναλάβουμε την προειδοποίηση του **3.24**: πολλές από αυτές χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής και θα πρέπει να περιμένουν μέχρι το Κεφάλαιο **8**. Οι περισσότερες όμως μπορούν να αποδειχτούν με την ίδια βασική αποδεικτική μέθοδο που συμβολίζεται από το ζευγάρωμα

αναδρομικός ορισμός – επαγωγική απόδειξη.

Επαναλαμβάνουμε μερικούς από τους ορισμούς του Κεφαλαίου **2** με τις αξιωματικές έννοιες που έχουμε αποκτήσει στο μεταξύ.

**5.24. Ορισμός.** Για κάθε φυσικό αριθμό $m$ και κάθε $n \leq m$, ορίζουμε το (ημιανοικτό) **διάστημα** από το $n$ στο $m$

$$[n, m) =_{\text{ορ}} \{k \in \mathbb{N} \mid n \leq k \,\&\, k < m\}.$$

**5.25. Άσκηση.** *Για κάθε $n$, $[n, n) = \emptyset$ και για κάθε $n \leq m$,*

$$[n, Sm) = [n, m) \cup \{m\}.$$

**5.26. Ορισμός.** Το σύνολο $A$ είναι **πεπερασμένο** αν υπάρχει φυσικός αριθμός $n$, τέτοιος ώστε $A =_c [0, n)$· **άπειρο** αν δεν είναι πεπερασμένο· και **αριθμήσιμο** ή

**απαριθμητό** αν είναι πεπερασμένο ή ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$. Από την Πρόταση **2.7** (η οποία συνάγεται εύκολα από τα αξιώματα),

$$A \text{ απαριθμητό} \iff A \leq_c \mathbb{N}.$$

Οι **πεπερασμένοι πληθάριθμοι** είναι οι πληθάριθμοι των πεπερασμένων συνόλων.

Η επόμενη θεμελιακή ιδιότητα των πεπερασμένων συνόλων είναι η βάση του κλάδου των μαθηματικών που λέγεται *συνδυαστική*.

**5.27. Αρχή του Περιστερεώνα**. *Κάθε μονομορφισμός $f : A \rightarrowtail A$ από ένα πεπερασμένο σύνολο στον εαυτό του είναι επιμορφισμός, δηλαδή $f[A] = A$.*

Αποδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό $m$ και κάθε $g$,

$$g : [0, m) \rightarrowtail [0, m) \Longrightarrow g[[0, m)] = [0, m), \tag{5-10}$$

για τον εξής λόγο: αν η $f : A \rightarrowtail A$ είναι μονομορφισμός και η $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow [0, m)$ βεβαιώνει ότι το $A$ είναι πεπερασμένο, ορίζουμε τη συνάρτηση $g : [0, m) \to [0, m)$ με τον τύπο

$$g(i) = \pi(f(\pi^{-1}(i))) \quad (i < m),$$

ώστε (εύκολα)

$$f(x) = \pi^{-1}(g(\pi(x))) \quad (x \in A). \tag{5-11}$$

Η $g$ είναι μονομορφισμός, σαν σύνθεση μονομορφισμών, και επομένως από την (5-10) είναι αντιστοιχία, αλλά τότε και η $f$ είναι αντιστοιχία σαν σύνθεση αντιστοιχιών, από την (5-11).

Η απόδειξη της (5-10) είναι (φυσικά) με επαγωγή στο $m$. Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι θα αποδείξουμε τη γενική πρόταση

$$(\forall g)\left[g : [0, m) \rightarrowtail [0, m) \Longrightarrow g[[0, m)] = [0, m)\right], \tag{5-12}$$

επειδή στην επαλήθευση του επαγωγικού βήματος για κάποια $g$ θα χρειαστούμε την επαγωγική υπόθεση για διάφορες άλλες συναρτήσεις $g$.

Βαση. Η (5-10) είναι τετριμμένη για $m = 0, 1$, επειδή μόνο μία συνάρτηση $g : [0, m) \to [0, m)$ υπάρχει σ' αυτές τις περιπτώσεις και αυτή είναι αντιστοιχία.

Επαγωγικο Βημα. Δεχόμαστε την (5-12) για κάποιο $m > 1$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι κάθε μονομορφισμός

$$g : [0, Sm) \rightarrowtail [0, Sm)$$

είναι επιμορφισμός. Από την Ἀσκηση **5.25** ξέρουμε ότι

$$[0, Sm) = [0, m) \cup \{m\},$$

και η απόδειξη διασπάται φυσικά σε τρεις περιπτώσεις:

Περιπτωση (1). $m \notin \mathrm{Image}(g)$. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε τον *περιορισμό* $h$ της $g$ στο διάστημα $[0, m)$ που ορίζεται με τον τύπο

$$h(i) = g(i) \quad (i < m),$$

$$
\begin{tikzcd}
0 & 1 & 2 & \cdots & u \arrow[d, Rightarrow] \arrow[drrr] & \cdots & m-1 & m \arrow[dlll] & {} \arrow[d, "g"] \\
0 & 1 & 2 & \cdots & v & \cdots & m-1 & m & {}
\end{tikzcd}
$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **5.3**. Αρχή του Περιστερεώνα, ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (3).

δηλαδή σαν σύνολο ζευγών $h = g \setminus \{(m, g(m))\}$. Αυτή η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές της στο διάστημα $[0, m)$ και είναι βέβαια μονομορφισμός. Έτσι, η επαγωγική υπόθεση αληθεύει για την $h$ και επομένως $h[[0, m)] = [0, m)$. Αυτό σημαίνει ότι $g[[0, m)] = [0, m)$ και οδηγεί σε άτοπο, επειδή η υπόθεση της περίπτωσης συνεπάγεται $g(m) < m$ και επομένως η συνάρτηση $g$ παίρνει δύο φορες την τιμή $g(m)$, δηλαδή δεν είναι μονομορφισμός.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (2). $g(m) = m$. Με τον ίδιο συλλογισμό, ο περιορισμός $h$ είναι αντιστοιχία $h : [0, m) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [0, m)$, και επομένως (εύκολα) και η $g$ είναι αντιστοιχία.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ (3). Υπάρχουν αριθμοί $u, v < m$ τέτοιοι ώστε

$$g(u) = m, \quad g(m) = v.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση που είναι η πιο ενδιαφέρουσα, ορίζουμε τη συνάρτηση $h' : [0, m) \to [0, m)$ με τον τύπο

$$h'(i) = \begin{cases} g(i), & \text{αν } i < m \,\&\, i \neq u, \\ v, & \text{αν } i = u. \end{cases}$$

Η $h'$ είναι μονομορφισμός επειδή συμφωνεί με την $g$ σε όλα τα στοιχεία εκτός από το $u$, όπου παίρνει την τιμή $v$ και $v \neq g(j)$, για κάθε $j < m$, επειδή $g(m) = v$ και η $g$ είναι μονομορφισμός. Επομένως, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στην $h'$ συμπεραίνουμε ότι $h'[[0, m)] = [0, m)$, και απ' αυτή την ισότητα (εύκολα πια) $g[[0, Sm)] = [0, Sm)$. ⊣

Σαν πρώτη εφαρμογή μπορούμε να αποδείξουμε αυστηρά το εξής «προφανές» θεώρημα:

**5.28. Πόρισμα.** *Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι άπειρο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση $(n \mapsto Sn)$ είναι μονομορφισμός από το $\mathbb{N}$ στο γνήσιο υποσύνολο $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. ⊣

Συνεπώς «άπειρο, απαριθμητό» σημαίνει ακριβώς «ισοπληθικό με το $\mathbb{N}$», σύμφωνα με τις διαισθήσεις μας: το σύνολο $A$ είναι άπειρο, απαριθμητό ακριβώς αν $|A| =_c \aleph_0$.

**5.29. Πόρισμα.** *Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $A$, υπάρχει ακριβώς ένας φυσικός αριθμός $n$ τέτοιος ώστε $A =_c [0, n)$.* Θέτουμε

$$\#(A) =_{\text{ορ}} \text{ο μοναδικός } n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιος ώστε } [A =_c |A| =_c [0, n)] \tag{5-13}$$

και φυσικά καλούμε τον $\#(A)$ τον *αριθμό των στοιχείων* του $A$.

Αποδειξη. Αν $A =_c [0, n)$ και $A =_c [0, m)$ με $n < m$, τότε $[0, n) =_c [0, m)$ και η αντιστοιχία $\pi : [0, m) \rightarrowtail [0, n)$ αντικρούει την Αρχή του Περιστερεώνα, αφού το $[0, n)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $[0, m)$. $\dashv$

Μπορούμε πλέον να αποδείξουμε πολλές ιδιότητες πεπερασμένων συνόλων με επαγωγή στον αριθμό των μελών τους, που προσδιορίζεται από τον πληθικό τους αριθμό. Πολλά από τα προβλήματα λύνονται με αυτό τον τρόπο.

**5.30. Λέξεις** (words ή strings). Στο Κεφάλαιο **2** χρησιμοποιήσαμε το Καρτεσιανό γινόμενο $n$ παραγόντων $A^n$ για να απεικονίσουμε ακολουθίες μήκους $n$ από το σύνολο $A$. Αυτό δεν είναι βολικό όταν θέλουμε να μελετήσουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών από το $A$, οι οποίες απεικονίζονται πιο εύκολα σαν συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$. Για κάθε $A$, το σύνολο **πεπερασμένων ακολουθιών** ή **λέξεων** από το $A$ ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} A^{(n)} &=_{\text{ορ}} \{u \subseteq \mathbb{N} \times A \mid \text{Function}(u) \,\&\, \text{Domain}(u) = [0, n)\}, \\ A^* &=_{\text{ορ}} \textstyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{(n)}. \end{aligned} \tag{5-14}$$

Το **μήκος** (length) μιας λέξης ορίζεται με τη συνάρτηση

$$\text{lh}(u) =_{\text{ορ}} \max\{i \mid i = 0 \vee i - 1 \in \text{Domain}(u)\} \quad (u \in A^*), \tag{5-15}$$

έτσι που $\text{lh}(u) = 0$ μόνο όταν το $u$ είναι η κενή λέξη $\emptyset$. Επίσης θέτουμε

$$u \sqsubseteq v \iff_{\text{ορ}} u \subseteq v \quad (u, v \in A^*), \tag{5-16}$$

και καλούμε το $u$ **αρχικό τμήμα** (initial segment) του $v$ αν $u \sqsubseteq v$. Αν $a_0, \ldots, a_{n-1}$ είναι στοιχεία του $A$, συμβολίζουμε με

$$\langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle =_{\text{ορ}} \{(0, a_0), \ldots, (n-1, a_{n-1})\} \tag{5-17}$$

την ακολουθία τους, ειδικότερα (με $n = 0, 1$),

$$\langle\ \rangle = \emptyset, \quad \langle a \rangle =_{\text{ορ}} \{(0, a)\}. \tag{5-18}$$

Για όλες τις λέξεις $u$, $v$, η λέξη

$$u \star v = \langle u(0), \ldots, u(\text{lh}(u) - 1), v(0), \ldots, v(\text{lh}(v) - 1) \rangle \tag{5-19}$$

είναι η **παράθεση** (concatenation) των λέξεων $u$ και $v$.

Για κάθε $f : \mathbb{N} \to A$ και κάθε φυσικό αριθμό $n$,

$$\overline{f}(n) =_{\text{ορ}} f \restriction [0, n) = \{(i, f(i)) \mid i < n\} \tag{5-20}$$

είναι ο **περιορισμός** (restriction) της $f$ στο αρχικό τμήμα $[0, n)$ του $\mathbb{N}$. Σαν παράδειγμα,

$$\overline{f}(0) = \emptyset, \quad \overline{f}(1) = \{(0, f(0))\}, \ldots,$$

και μπορούμε να ανακτήσουμε την $f$ από την $\overline{f}$, αφού

$$i < n \Longrightarrow f(i) = \overline{f}(n)(i).$$

**5.31. Ορισμός.** Για κάθε πληθάριθμο $\kappa$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$\kappa^n =_{\text{ορ}} |\kappa^{(n)}|.$$

**5.32. Πρόταση.** *Για κάθε άπειρο, απαριθμητό σύνολο $A$ και κάθε $n > 0$,*

$$A =_c A \times A =_c A^{(n)} =_c A^*.$$

*Εναλλακτικά, σαν εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής:*

$$\aleph_0 =_c \aleph_0 \cdot \aleph_0 =_c {\aleph_0}^n =_c |{\aleph_0}^*|. \tag{5-21}$$

Απόδειξη. Οι ανισότητες από τα αριστερά στα δεξιά είναι προφανείς, ώστε με το Θεώρημα Schröder-Bernstein αρκεί να αποδείξουμε $\mathbb{N}^* \leq_c \mathbb{N}$. Χρειαζόμαστε κάποιο μονομορφισμό

$$\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{N}, \tag{5-22}$$

κι ας υποθέσουμε ότι τον βρήκαμε. Ξεκινώντας με αυτόν, ορίζουμε αναδρομικά μονομορφισμούς $\pi_n : \mathbb{N}^{(n+1)} \rightarrowtail \mathbb{N}$, για κάθε $n$, τέτοιους ώστε

$$\begin{aligned} \pi_0(u) &= u(0), \\ \pi_{n+1}(u) &= \rho(\pi_n(u \restriction [0, n+1)), u(n+1)). \end{aligned}$$

Λεπτομερέστερα (για τελευταία φορά), αυτό έπεται από το Θεώρημα Αναδρομής, αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \{(u, w) \mid u \in \mathbb{N}^{(1)}, (0, w) \in u\}, \\ \pi_{n+1} &= \{(u, w) \mid u \in \mathbb{N}^{(n+2)}, w = \rho(\pi_n(u \restriction [0, n+1), u(n+1))\}. \end{aligned}$$

Τελικά, η συνάρτηση

$$\pi(u) = (\mathrm{lh}(u) - 1, \pi_{\mathrm{lh}(u)-1}(u))$$

φανερώνει ότι $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^{(n+1)} \leq_c \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, από το οποίο, το θεώρημα συνάγεται εύκολα χρησιμοποιώντας άλλη μια φορά το μονομορφισμό $\rho$. Όσον αφορά την αρχική επιλογή κάποιου $\rho$, καθένας που έχει σκεφτεί το πρόβλημα έχει τον αγαπημένο του τρόπο να ζευγαρώνει αριθμούς, και οπωσδήποτε αυτός του Cantor (εικονισμένος στο Διάγραμμα **2.2**) είναι από τους καλύτερους. Ο επόμενος, έχει εφευρεθεί από τον Gödel και εικονίζεται στο Διάγραμμα **5.4**,

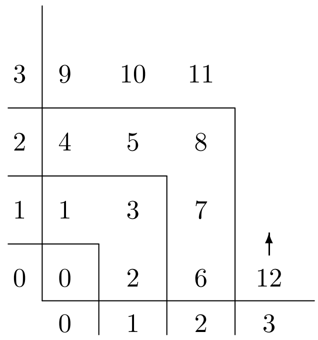
$$\rho(m, n) = \begin{cases} (m+1)^2 - 1, & \text{αν } m = n, \\ n^2 + m, & \text{αν } m < n, \\ m^2 + m + n, & \text{αν } n < m. \end{cases}$$

Η απόδειξη ότι όντως είναι μονομορφισμός είναι διασκεδαστική (Πρόβλημα **x5.24**). ⊣

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να θεωρούμε το $A^*$ σαν μια γενίκευση του $\mathbb{N}$, που παράγεται από την κενή λέξη $\langle\ \rangle$ (αντί για το 0) επαναλαμβάνοντας τους **τελεστές προσάρτησης**

$$S_a(u) = u \star \langle a \rangle \quad (a \in A),$$

έναν για κάθε $a \in A$. Έχοντας αυτό κατά νου, μπορούμε να κατασκευάσουμε ορισμούς με αναδρομή στο $A^*$, σύμφωνα με το ακόλουθο, χρήσιμο θεώρημα:




Διαγραμμα **5.4**. Αντιστοιχία του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με το $\mathbb{N}$.

**5.33. Θεώρημα Αναδρομής σε Λέξεις.** *Για οποιαδήποτε δύο σύνολα $A, E$, κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \times A \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : A^* \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις:*

$$f(\langle\ \rangle) = a,$$
$$f(u \star \langle x \rangle) = h(f(u), x) \quad (u \in A^*, x \in A).$$

*Όμοια, με παραμέτρους, για κάθε*

$$g : Y \to E, \quad h : E \times A \times Y \to E,$$

*υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : A^* \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$f(\langle\ \rangle, y) = g(y) \qquad (y \in Y),$$
$$f(u \star \langle x \rangle, y) = h(f(u, y), x, y) \qquad (u \in A^*, y \in Y, x \in A).$$

Αποδειξη. Για την εκδοχή με τις παραμέτρους, χρησιμοποιώντας την Άσκηση **5.12** παίρνουμε συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \times A^* \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\phi(0, u, y) = g(y),$$
$$\phi(n + 1, u, y) = h(\phi(n, u, y), u(n), y),$$

και θέτουμε

$$f(u, y) = \phi(\mathrm{lh}(u), u, y).$$

Προφανώς $f(\langle\ \rangle, y) = \phi(0, u, y) = g(y)$, άρα η $f(u, y)$ ικανοποιεί την πρώτη εξίσωση. Για τη δεύτερη, δείχνουμε εύκολα με επαγωγή στο $n$ πως για οποιεσδήποτε λέξεις $u, v$,

$$(\forall i < n)[u(i) = v(i)] \Longrightarrow \phi(n, u, y) = \phi(n, v, y). \qquad (*)$$

Η βάση της επαγωγής επαληθεύεται αμέσως, αφού η $\phi(0, u, y) = g(y)$ δεν εξαρτάται από την τιμή του $u$, και για το επαγωγικό βήμα, με την υπόθεση ότι

$(\forall i < n+1)[u(i) = v(i)]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\phi(n+1,u,y) &= h(\phi(n,u,y),u(n),y)\\ &= h(\phi(n,v,y),v(n),y) \quad \text{(επαγωγική υπόθεση και υπόθεση)}\\ &= \phi(n+1,v,y).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την $(*)$, υπολογίζουμε για κάθε $u$ με $\mathrm{lh}(u) = n$ και κάθε $x \in A$,

$$\begin{aligned}f(u\star\langle x\rangle,y) &= \phi(n+1,u\star\langle x\rangle,y)\\ &= h(\phi(n,u\star\langle x\rangle,y),x,y)\\ &= h(\phi(n,u,y),x,y) \qquad \text{(από την } (*)\text{)}\\ &= h(f(u,y),x,y) \qquad \text{(από τον ορισμό της } f\text{)}\end{aligned}$$

Με επαγωγή στο $\mathrm{lh}(u)$, δείχνουμε εύκολα τη μοναδικότητα της $f(u,y)$. $\dashv$

**5.34. Το συνεχές** (the continuum). Ο κλασικός συμβολισμός για τον πληθάριθμο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι ο

$$\mathfrak{c} =_{\text{ορ}} |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c 2^{\aleph_0}. \tag{5-23}$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα για τον $\mathfrak{c}$, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του $\aleph_0$ στην (5-21) και στοιχειώδη πληθική αριθμητική. Σαν παράδειγμα,

$$\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0+\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c}.$$

Το Θεώρημα Schröder-Bernstein είναι επίσης πολύ χρήσιμο, π.χ.

$$\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0} \leq_c {\aleph_0}^{\aleph_0} \leq_c \mathfrak{c}^{\aleph_0} =_c (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} =_c 2^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c},$$

ώστε από το Schröder-Bernstein,

$$\mathfrak{c} =_c {\aleph_0}^{\aleph_0} =_c \mathfrak{c}^{\aleph_0}.$$

Μερικά από τα προβλήματα χρειάζονται υπολογισμούς αυτού του τύπου. Από την άλλη μεριά, η ισοπληθικότητα $\mathbb{R} =_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$ θα προκύψει αμέσως από τα αξιώματα μόλις ορίσουμε τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$ στο Παράρτημα **A**, ώστε η Υπόθεση του Συνεχούς είναι ισοδύναμη με την πρόταση

**(CH)** $$(\forall\kappa \leq_c \mathfrak{c})[\kappa \leq_c \aleph_0 \vee \kappa =_c \mathfrak{c}].$$

Θα διερευνήσουμε την **CH** στο Κεφάλαιο **10**. Δεν είναι εύκολο πρόβλημα η λύση της.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 5

**x5.1.** Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι προσεταιριστική πράξη.

**x5.2.** Ο πολλαπλασιασμός στους φυσικούς αριθμούς είναι μεταθετική πράξη.

**x5.3.** Η πράξη της δύναμης ορίζεται με την αναδρομή στο $m$

$$n^0 = 1$$
$$n^{Sm} = n^m \cdot n,$$

και ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις (για $n \neq 0$):

$$n^{(m+k)} = n^m \cdot n^k,$$
$$n^{(m\cdot k)} = (n^m)^k.$$

**x5.4.** Ας υποθέσουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano, $+_1$, $\cdot_1$, $+_2$, $\cdot_2$ είναι οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού σ' αυτά τα συστήματα, και $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$ είναι ο «κανονικός» ισομορφισμός ανάμεσα στα δύο συστήματα, από το Θεώρημα **5.4**. Δείξε ότι ο $\pi$ είναι επίσης ισομορφισμός για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, δηλαδή αν $n, m \in \mathbb{N}_1$, τότε

$$\pi(n +_1 m) = \pi(n) +_2 \pi(m), \quad \pi(n \cdot_1 m) = \pi(n) \cdot_2 \pi(m).$$

**x5.5.** Ας υποθέσουμε ότι τα $(\mathbb{N}_1, 0_1, S_1)$ και $(\mathbb{N}_2, 0_2, S_2)$ είναι συστήματα Peano, $\leq_1$, $\leq_2$ είναι οι αντίστοιχες καλές διατάξεις και $\pi : \mathbb{N}_1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}_2$ είναι ο κανονικός ισομορφισμός. Δείξε ότι η $\pi$ σέβεται τη διάταξη, δηλαδή ότι για όλα τα $n, m \in \mathbb{N}_1$,

$$n \leq_1 m \iff \pi(n) \leq_2 \pi(m).$$

**x5.6.** Κάθε υποσύνολο $B$ ενός διαστήματος $[0, n)$ είναι ισοπληθικό με κάποιο $[0, m)$ όπου $m \leq n$, και επομένως αν το $A$ είναι πεπερασμένο και $B \subseteq A$, τότε και το $B$ είναι πεπερασμένο και $\#(B) \leq \#(A)$.

Κάθε πληθάριθμος είναι σύνολο και τον καλούμε **πεπερασμένο πληθάριθμο** αν είναι πεπερασμένο σύνολο.

**x5.7.** Δείξε ότι για κάθε πεπερασμένο πληθάριθμο $\kappa$,

$$\kappa =_c [0, \#(\kappa)).$$

**x5.8.** Για όλους τους αριθμούς $n$, $m$, $[0, m) =_c [n, n+m)$, και επομένως για όλα τα πεπερασμένα σύνολα $A$, $B$, η ένωσή τους είναι πεπερασμένη και

$$\text{αν} \;\; A \cap B = \emptyset, \;\text{τότε}\;\; \#(A \cup B) = \#(A) + \#(B).$$

Ειδικότερα, για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους $\kappa$, $\lambda$,

$$\#(\kappa + \lambda) = \#(\kappa) + \#(\lambda).$$

**x5.9.** Αν το $\mathcal{E}$ είναι πεπερασμένο σύνολο και κάθε μέλος του είναι επίσης πεπερασμένο σύνολο, τότε και η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ είναι πεπερασμένο σύνολο.

**x5.10.** Το γινόμενο δύο πεπερασμένων συνόλων $A$, $B$ είναι πεπερασμένο, και

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B).$$

Συνεπώς για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους $\kappa$, $\lambda$,

$$\#(\kappa \cdot \lambda) = \#(\kappa) \cdot \#(\lambda).$$

**x5.11.** Το δυναμοσύνολο κάθε πεπερασμένου συνόλου $A$ είναι πεπερασμένο, και
$$\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}.$$
Συνεπώς για κάθε πεπερασμένο πληθάριθμο $\kappa$,
$$\#(2^{\kappa}) = 2^{\#(\kappa)}.$$

**x5.12.** Για όλους τους πεπερασμένους πληθαρίθμους $\kappa$, $\lambda$,
$$\#(\kappa^{\lambda}) = \#(\kappa)^{\#(\lambda)}.$$

**x5.13.** Δείξε ότι αν το $A$ είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε κάθε επιμορφισμός $f : A \twoheadrightarrow A$ είναι μονομορφισμός. (Αυτή είναι μια εναλλακτική μορφή της Αρχής του Περιστερεώνα.)

**x5.14.** Για κάθε πληθάριθμο $\kappa$, $2^{\kappa} \neq_c \aleph_0$. (*Πρόσεξε*: δεν έχουμε αποδείξει την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων **3.1**, κι άρα δεν μπορείς να τη χρησιμοποιήσεις.

**x5.15.** $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} =_c \aleph_0 \cdot \mathfrak{c} =_c \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} =_c \mathfrak{c}$.

**x5.16.** $\mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} =_c 2^{\mathfrak{c}}$.

**x5.17.** Για κάθε πληθάριθμο $\kappa >_c 1$, αν $\kappa \cdot \kappa =_c \kappa$, τότε $2^{\kappa} =_c \kappa^{\kappa}$.

**x5.18.** Για κάθε πληθάριθμο $\kappa$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\kappa^n =_c \kappa^{|[0,n)|},$$
όπου η αριστερή πλευρά ορίζεται από την **5.31** και στη δεξιά έχουμε την εκθετική πράξη της πληθικής αριθμητικής.

**x5.19.** Για κάθε $n \neq 0$, $\mathfrak{c}^n =_c |\mathfrak{c}^*| =_c \mathfrak{c}$.

**x5.20. Θεώρημα Ταυτόχρονης Αναδρομής**. Ας είναι τα $E_1$, $E_2$ σύνολα, τα $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$ στοιχεία, και οι $h_1 : E_1 \times E_2 \to E_1$, $h_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$ συναρτήσεις· τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις
$$f_1 : \mathbb{N} \to E_1, \quad f_2 : \mathbb{N} \to E_2$$
που ικανοποιούν τις ταυτότητες
$$\begin{aligned} f_1(0) &= a_1, & f_2(0) &= a_2,\\ f_1(n+1) &= h_1(f_1(n), f_2(n)), & f_2(n+1) &= h_2(f_1(n), f_2(n)). \end{aligned}$$

$^*$**x5.21. Θεώρημα Φωλιασμένης Αναδρομής**. Για οποιεσδήποτε τρείς συναρτήσεις
$$g : Y \to E,\ h : E \times \mathbb{N} \times Y \to E,\ \text{και } \pi : \mathbb{N} \times Y \to Y,$$
υπάρχει ακριβώς μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times Y \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις
$$f(0, y) = g(y), \quad f(Sn, y) = h(f(n, \pi(n, y)), n, y).$$
ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Όρισε αναδρομικά συνάρτηση $\phi : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \to Y))$ έτσι ώστε η ζητούμενη συνάρτηση να είναι η $f(n, y) = \mathrm{Second}(\phi(n))(y)$.

**x5.22.** Όρισε αναδρομικά το *παραγοντικό*

$$f(n) = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n \quad (\text{με } f(0) = 1, \text{ συμβατικά}).$$

**x5.23.** Όρισε με «κλειστό» τύπο τη συνάρτηση $f : A^* \to A^*$ που ορίζεται με την ακόλουθη αναδρομή λέξεων:

$$f(\langle\ \rangle) = \langle\ \rangle, \quad f(u \star \{x\}) = \langle x \rangle \star f(u).$$

**x5.24.** Δείξε ότι η συνάρτηση $\rho$ στην απόδειξη του **5.32** είναι αντιστοιχία.

$^*$**x5.25.** Κάθε μερική διάταξη $\leq$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο $P$ επιδέχεται **γραμμικοποίηση** (linearization), δηλαδή υπάρχει κάποια γραμμική διάταξη $\leq'$ του $P$ τέτοια που $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$.

$^*$**x5.26. Το πρόβλημα της προξενήτρας** (the marriage problem). Έστω πεπερασμένο σύνολο $B$ και συνάρτηση $h : B \to \mathcal{P}(G)$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in B$, το $h(x)$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $G$, και

$$X \subseteq B \Longrightarrow \#(X) \leq \#(\bigcup \{h(x) \mid x \in X\}), \tag{5-24}$$

ειδικότερα $h(x) \neq \emptyset$ για κάθε $x \in B$. Δείξε ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $f : B \rightarrowtail G$ τέτοιος που

$$(\forall x \in B)[f(x) \in h(x)]. \tag{5-25}$$

Δείξε επίσης ότι η υπόθεση (5-24) είναι αναγκαία για την ύπαρξη κάποιας συνάρτησης $f$ που να ικανοποιεί την (5-25). Υπόδειξη. Ξεχώρισε περιπτώσεις, ανάλογα με το αν υπάρχει ή όχι κάποιο σύνολο $C$ με $\emptyset \neq C \subsetneq B$ και τέτοιο ώστε $\#(C) = \#(\bigcup \{h(x) \mid x \in C\})$.

Το πρόβλημα έχει πάρει το όνομά του από την παραδοσιακή ερμηνεία, όπου το $B$ είναι σύνολο αγοριών, το $G$ είναι σύνολο διαθέσιμων κοριτσιών και η $h$ αντιστοιχίζει σε κάθε αγόρι το (πεπερασμένο) σύνολο $h(x)$ των κοριτσιών που ο $x$ αποδέχεται για γάμο. Υπάρχουν πολλές άλλες, πιο χρήσιμες και λιγότερο αντιφεμινιστικές εφαρμογές αυτού του προβλήματος, π.χ. όπου το $B$ είναι σύνολο μαθημάτων, το $G$ είναι σύνολο καθηγητών και η $h$ αντιστοιχίζει σε κάθε μάθημα το σύνολο των καθηγητών που μπορούν να το διδάξουν («το πρόβλημα του προγράμματος»).

Το επόμενο πρόβλημα δικαιώνει μια ακόμη μορφή αναδρομικών ορισμών που είναι χρήσιμη σε εφαρμογές.

**x5.27. Πλήρης αναδρομή.** Για κάθε $h : E^* \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f(n) = h(\overline{f}(n)).$$

Όμοια, για κάθε $h : E^* \times \mathbb{N} \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$f(n) = h(\overline{f}(n), n).$$

Το επόμενο πρόβλημα δίνει ένα χαρακτηρισμό των άπειρων, απαριθμητών συνόλων κατευθείαν από τη σχέση του «ανήκειν», χωρίς αναφορά στις δευτερογενείς έννοιες των φυσικών αριθμών και των συναρτήσεων.

**x5.28.** Δείξε την ισοδυναμία:

$$\begin{aligned} A =_c \mathbb{N} \iff {} & (\exists \mathcal{E})[A = \bigcup \mathcal{E} \,\&\, \emptyset \in \mathcal{E} \,\&\, (\forall u \in \mathcal{E})(\exists ! y \notin u)[u \cup \{y\} \in \mathcal{E}] \\ & \quad \&\, (\forall Z)[[\emptyset \in Z \,\&\, (\forall u \in Z)(\exists ! y \notin u)[u \cup \{y\} \in Z \cap \mathcal{E}]] \Longrightarrow \mathcal{E} \subseteq Z]]. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# ΣΤΑΘΕΡΑ ΣΗΜΕΙΑ

Το Θεώρημα Αναδρομής **5.6** έχει κατά κύριο λόγο θεμελιακή σημασία, δικαιολογεί αξιωματικά έναν τρόπο ορισμού συναρτήσεων στους φυσικούς αριθμούς που είναι διαισθητικά προφανής. Από καθαρά μαθηματική άποψη όμως, μπορούμε να θεωρήσουμε το **5.6** ως θεώρημα *ύπαρξης και μοναδικότητας* λύσης για κάθε σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(Sx) &= h(f(x)) \quad (x \in \mathbb{N}), \end{aligned} \tag{6-1}$$

όπου τα $a \in E$ και $h : E \to E$ είναι δεδομένα και η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ είναι *ο άγνωστος*. Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε, στο πλαίσιο της θεωρίας μερικών διατάξεων, μια κομψή γενίκευση του Θεωρήματος Αναδρομής, που συνεπάγεται ύπαρξη λύσεων για συναρτησιακά συστήματα εξισώσεων πολύ γενικότερα του (6-1). Το Συνεχες Θεωρημα Ελαχιστου Σταθερου Σημειου **6.21** είναι θεμελιακό για τη *θεωρία υπολογισμού* (computation theory) και είναι το βασικό μαθηματικό στήριγμα της *ερμηνείας προγραμμάτων με σταθερά σημεία* (fixpoint theory of programs). Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι είναι ειδική περίπτωση του πολύ βαθύτερου Θεωρηματος Σταθερου Σημειου του Zermelo, που είναι στενά συνδεδεμένο με τη θεωρία καλών διατάξεων και έχει ποικίλα και σημαντικά συνολοθεωρητικά πορίσματα, π.χ. συνεπάγεται αμέσως την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων **3.1**. Έτσι εκτός από την καθαρά μαθηματική του σημασία, το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μας δίνει και ένα ενδιαφέρον σημείο επαφής της κλασικής συνολοθεωρίας με τη σύγχρονη πληροφορική.

Στην απλούστερή τους απόδοση, τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου είναι κάπως αφηρημένα και φαινομενικά άσχετα με τις εφαρμογές στη λύση συναρτησιακών συστημάτων για τις οποίες τα προορίζουμε. Για να τα καταλάβουμε, θα χρειαστούμε μερικές βασικές έννοιες και απλά αποτελέσματα από τη θεωρία μερικών διατάξεων.

**6.1. Μερικά διατεταγμένος χώρος** (partially ordered set ή απλούστερα poset) είναι ένα δομημένο σύνολο

$$P = (\mathrm{Field}(P), \leq_P),$$

Διάγραμμα **6.1**. Ένας διακριτός και ένας επίπεδος χώρος.

όπου το $\mathrm{Field}(P)$ είναι κάποιο σύνολο και η $\leq_P$ είναι μερική διάταξη στο $\mathrm{Field}(P)$, δηλαδή αυτοπαθής, μεταβατική και αντισυμμετρική σχέση. Η σχέση $\leq_P$ καθορίζει το $P$ επειδή είναι αυτοπαθής,

$$x \in \mathrm{Field}(P) \iff x \leq_P x,$$

συνεπώς για να ορίσουμε ένα μερικά διατεταγμένο χώρο $P$ αρκεί να ορίσουμε τη μερική διάταξή του $\leq_P$. Στην πράξη όμως, συχνά ισχύει το αντίθετο: η $\leq_P$ είναι προφανής από τα συμφραζόμενα και για να καθορίσουμε το $P$ αρκεί να δώσουμε το πεδίο $\mathrm{Field}(P)$. Τυπικά θα ταυτίζουμε το $P$ με το πεδίο του $\mathrm{Field}(P)$, ακολουθώντας τη γενική τακτική για δομημένα σύνολα που εξηγήσαμε στο **4.30**. Με τον *διατεταγμένο χώρο* $\mathbb{N}$, π.χ. ή και απλούστερα το *χώρο*[12] $\mathbb{N}$, προφανώς εννοούμε το ζεύγος $(\mathbb{N}, \leq)$, όπου η $\leq$ είναι η συνήθης διάταξη στους φυσικούς αριθμούς. *Τα σημεία του χώρου $P$* είναι τα μέλη του $\mathrm{Field}(P)$, με *υποσύνολο $I \subseteq P$* εννοούμε υποσύνολο $I \subseteq \mathrm{Field}(P)$ κ.λπ. Κάθε $I \subseteq P$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος, με τον περιορισμό της $\leq_P$ στο $I$,

$$x \leq_I y \iff_{\text{ορ}} x \leq_P y \,\&\, x \in I \,\&\, y \in I, \tag{6-2}$$

η οποία είναι (εύκολα) μερική διάταξη. Πιο συχνά θα εργαζόμαστε με χώρους που έχουν ελάχιστο στοιχείο, και είναι βολικό να ονομάζουμε όλα αυτά τα ελάχιστα με το ίδιο σύμβολο $\perp$ (που διαβάζεται «πάτος»), όπως ακριβώς χρησιμοποιούμε το 0 για το ουδέτερο της πρόσθεσης κάθε αριθμητικού συστήματος:

$$\perp = \perp_P =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο στοιχείο του } P \text{ (αν υπάρχει).} \tag{6-3}$$

Οποιοδήποτε σύνολο $A$ μπορεί να θεωρηθεί ως **διακριτός χώρος** (discrete poset), μερικά διατεταγμένος από τη σχέση ισότητας

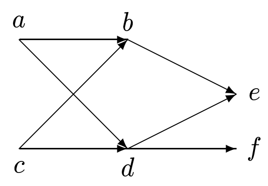
$$x \leq y \iff x = y \quad (x, y \in A).$$

Κάπως πιο περίπλοκοι από τους διακριτούς είναι οι **επίπεδοι χώροι** (flat posets) που έχουν ελάχιστο στοιχείο, το μόνο που είναι συγκρίσιμο με κάποιο άλλο· δηλαδή

$$x \leq_P y \iff x = \perp \vee x = y.$$

Ο απλούστατος χώρος είναι το μονοσύνολο $\{\perp\}$, που είναι διακριτός και επίπεδος. Εκτός από αυτούς τους απλούς χώρους και τον $\mathbb{N}$, υπάρχουν και οι χώροι $\mathbb{Q}$

[12] Στα αγγλικά αντικαθιστούν το άβολα μεγάλο *partially ordered set* με τη φτιαχτή, μαθηματική λέξη «poset». Επειδή μου λείπει το θράσος να κατασκευάζω (συνειδητά) καινούργιες ελληνικές λέξεις, αλλά και κουράζεται κανείς να επαναλαμβάνει συνεχώς «μερικά διατεταγμένος χώρος», «τοπολογικός χώρος» και τα τοιαύτα, συχνά θα λέμε απλώς «χώρος», και το τι χώρος είναι θα πρέπει να καθορίζεται από τα συμφραζόμενα.




Διάγραμμα **6.2**. Ένας πεπερασμένος μερικά διατεταγμένος χώρος.

και $\mathbb{R}$ των ρητών και των πραγματικών αριθμών, τους οποίους δεν έχουμε ακόμη ορίσει αυστηρά από τα αξιώματα. Αυτοί είναι γραμμικοί (ολικά διατεταγμένοι) χώροι. Επιπλέον υπάρχει και μια πλούσια ποικιλία πεπερασμένων χώρων, των οποίων η μελέτη αποτελεί διαφορετικό και ενδιαφέροντα κλάδο των μαθηματικών, αλλά δεν θα πούμε πολλά γι' αυτούς εδώ. Κυρίως θα τους επικαλεστούμε ως αντιπαραδείγματα. Σε διαγράμματα χώρων απεικονίζουμε συμβατικά τη σχέση $x < y$ *τοποθετώντας το* $y$ *στα δεξιά ή πάνω από το* $x$ *και ενώνοντας τα* $x$ *και* $y$ *με μία γραμμή* (ενδεχομένως με βέλος προς αποφυγή σύγχυσης), που μπορεί να περιέχει και άλλα σημεία, π.χ. $c < e$ στο Διάγραμμα **6.2**.[13]

**6.2. Ορισμός.** Έστω $P$ μερικά διατεταγμένος χώρος, $S \subseteq P$ και $M \in P$ στοιχείο του $P$.

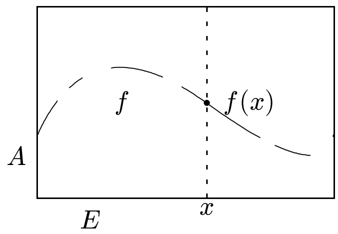
1. Το $M$ είναι ένα **άνω φράγμα** (upper bound) του $S$, αν είναι μεγαλύτερο-ίσο κάθε μέλους του $S$, $(\forall x \in S)[x \leq M]$
2. Το $M$ είναι **μέγιστο** (maximum) του $S$ αν είναι άνω φράγμα και μέλος του $S$, δηλαδή $M \in S \,\&\, (\forall x \in S)[x \leq M]$.
3. Το $M$ είναι **ελάχιστο άνω φράγμα** (supremum, least upper bound) του $S$ αν είναι άνω φράγμα και μικρότερο-ίσο κάθε άνω φράγματος του $S$,
$$(\forall x \in S)[x \leq M] \,\&\, (\forall M')[(\forall x \in S)[x \leq M'] \Longrightarrow M \leq M'].$$

Αν τα $M_1$, $M_2$ είναι και τα δύο ελάχιστα άνω φράγματα του $S$, τότε $M_1 \leq M_2$ (επειδή το $M_2$ είναι άνω φράγμα και το $M_1$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα) και συμμετρικά $M_2 \leq M_1$, άρα $M_1 = M_2$· δηλαδή το $S$ έχει το πολύ ένα ελάχιστο άνω φράγμα. Όταν υπάρχει, το ελάχιστο άνω φράγμα ενός συνόλου $S$ συμβολίζεται με

$$\sup S = \text{το ελάχιστο άνω φράγμα του } S. \tag{6-4}$$

Η ονομασία «sup» από το Λατινικό *supremum* (μέγιστο) δικαιολογείται από το εξής απλό αποτέλεσμα:

[13]Μερικοί απεικονίζουν χώρους να μεγαλώνουν *προς τα δεξιά*, άλλοι *προς τα πάνω* και ακόμη μερικοί τους απεικονίζουν να μεγαλώνουν *προς τα κάτω*· απ' όσο ξέρω κανείς δεν απεικονίζει διαγράμματα όπου οι χώροι μεγαλώνουν προς τα αριστερά, και καμία μέθοδος δεν είναι γενικά αποδεκτή.




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **6.3**. Μια μερική συνάρτηση $f : A \rightharpoonup E$.

**6.3. Άσκηση.** *Αν το $M$ είναι μέγιστο του $S$ σε κάποιο χώρο $P$, τότε το $M$ είναι επίσης το ελάχιστο άνω φράγμα του $S$.*

**6.4. Άσκηση.** *Στο παράδειγμα του Διαγράμματος* **6.2** *βρείτε υποσύνολα $S$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:* (1) *Το $S$ δεν έχει άνω φράγμα.* (2) *Το $S$ έχει άνω φράγματα, αλλά δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.* (3) *Το $S$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο.*

**6.5. Άσκηση.** *Για κάθε χώρο $P$ και $M \in P$, το $M$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του κενού $\emptyset$ αν και μόνον αν είναι το ελάχιστο του $P$, δηλαδή*

$$\perp = \sup \emptyset \tag{6-5}$$

*αν υπάρχει το $\perp$ ή το* $\sup \emptyset$.

**6.6. Άσκηση.** *Το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ κάθε συνόλου $A$ είναι μερικά διατεταγμένο από τη σχέση*

$$X \subseteq_A Y \iff_{\text{ορ}} X \subseteq Y \subseteq A,$$

*έτσι που $\perp = \emptyset$ και για κάθε $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, η ένωση $\bigcup S$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S$.*[14]

Λιγότερο τετριμμένο και πιο χρήσιμο για τους σκοπούς μας εδώ είναι το επόμενο παράδειγμα μερικά διατεταγμένου χώρου.

**6.7. Ορισμός. Μερική συνάρτηση** (partial function) από το σύνολο $A$ στο σύνολο $E$ καλείται κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $A$ και τιμές στο $E$, συμβολικά

$$f : A \rightharpoonup E \iff_{\text{ορ}} \text{Function}(f)\,\&\,\text{Domain}(f) \subseteq A\,\&\,\text{Image}(f) \subseteq E. \tag{6-6}$$

Για παράδειγμα, η $(n \mapsto (n-1))$ είναι μερική συνάρτηση στους φυσικούς αριθμούς ορισμένη μόνον όταν $n \neq 0$, η $(x \mapsto \sqrt{x})$ είναι μερική συνάρτηση στους πραγματικούς αριθμούς με πεδίο ορισμού $\{x \mid x \geq 0\}$ κ.λπ. Με τον ορισμό που δώσαμε στο **5.30**, μια πεπερασμένη ακολουθία $u \in A^*$ είναι μερική συνάρτηση $u : \mathbb{N} \rightharpoonup A$. Επίσης, το κενό σύνολο $\emptyset$ είναι (τετριμμένα) μερική

[14] Σχολαστικά, η μερική διάταξη του $\mathcal{P}(A)$ είναι ο περιορισμός $\subseteq_A$ της οριστικής συνθήκης $X \subseteq Y$ στο $\mathcal{P}(A)$, και συχνά παραλείπουμε τον δείκτη όταν αναφερόμαστε σε αυτό, βλ. **4.8**.

συνάρτηση (με κενό πεδίο ορισμού!) και κάθε (ολική) συνάρτηση από το $A$ στο $E$ είναι και μερική συνάρτηση, αφού η (6-6) δεν αποκλείει το $\mathrm{Domain}(f) = A$,

$$\emptyset : A \rightharpoonup E, \quad f : A \to E \Longrightarrow f : A \rightharpoonup E.$$

Θα χρησιμοποιούμε συστηματικά τον βολικό συμβολισμό με το μισό βελάκι (πρόσφατα καθιερωμένο στην πληροφορική), ως επίσης και τους εξής κοινούς συμβολισμούς

$$f(x)\downarrow \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \in \mathrm{Domain}(f), \quad f(x)\uparrow \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \notin \mathrm{Domain}(f) \tag{6-7}$$

για να υποδείξουμε ότι μια μερική συνάρτηση είναι ή δεν είναι ορισμένη σε κάποιο σημείο· διαβάζουμε το $f(x)\downarrow$ σαν *η* $f(x)$ *συγκλίνει* ή σαν *η* $f$ *συγκλίνει στο* $x$, και το $f(x)\uparrow$ σαν *η* $f(x)$ *αποκλίνει* ή σαν *η* $f$ *αποκλίνει στο* $x$.

**6.8. Ορισμός.** Για κάθε $A$ και κάθε $E$, το

$$(A \rightharpoonup E) =_{\text{ορ}} \{f \subseteq A \times E \mid f : A \rightharpoonup E\} \tag{6-8}$$

είναι το σύνολο όλων των μερικών συναρτήσεων από το $A$ στο $E$, κατ' αναλογία με το συμβολισμό $(A \to E)$ για το σύνολο των (ολικών) συναρτήσεων από το $A$ στο $E$, βλ. **4.14**. Ο χώρος $(A \rightharpoonup E)$ είναι μερικά διατεταγμένοs από τη σχέση $\subseteq$,

$$f \subseteq g \iff (\forall x \in A)[f(x)\downarrow \Longrightarrow [g(x)\downarrow \,\&\, f(x) = g(x)]],$$

με ελάχιστο στοιχείο $\perp = \emptyset$.

**6.9. Άσκηση.** *Για όλα τα σύνολα* $A, E$,

$$(A \rightharpoonup E) = \{f \restriction X \mid f : A \to E \,\&\, X \subseteq A\}.$$

Οι περιορισμοί συναρτήσεων ορίστηκαν στην (4-13).

Είναι δυσκολότερο να εντοπίσουμε ελάχιστα άνω φράγματα συνόλων σε αυτούς τους χώρους μερικών συναρτήσεων παρά στα δυναμοσύνολα: αν το υποσύνολο $S \subseteq (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ περιέχει τις δύο (ολικές) συναρτήσεις $x \mapsto 0$ και $x \mapsto 1$, τότε κάθε άνω φράγμα $f : \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ του $S$ θα πρέπει να ικανοποιεί τις αντιφατικές εξισώσεις $f(0) = 0$ και $f(0) = 1$. Από την άλλη μεριά, γραμμικά διατεταγμένα υποσύνολα των χώρων $(A \rightharpoonup E)$ πάντα έχουν ελάχιστο άνω φράγμα, και αυτή τους η ιδιότητα είναι χρήσιμη και άξια ονομασίας.

**6.10. Ορισμός.** Ένα υποσύνολο $S \subseteq P$ διατεταγμένου χώρου $P$ είναι **αλυσίδα** (chain) αν τα μέλη του $S$ είναι συγκρίσιμα ανά δύο, δηλαδή

$$(\forall x, y \in S)[x \leq y \vee y \leq x].$$

Ο χώρος $P$ είναι **επαγωγικός** (inductive ή chain-complete), αν κάθε αλυσίδα στο $P$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

**6.11. Άσκηση.** *Το κενό σύνολο είναι* (τετριμμένα) *αλυσίδα, επομένως κάθε επαγωγικός χώρος έχει ελάχιστο σημείο* $\perp = \sup \emptyset$.

**6.12. Άσκηση.** *Κάθε επίπεδος χώρος είναι επαγωγικός· ένας διακριτός χώρος είναι επαγωγικός αν και μόνον αν έχει μόνο ένα στοιχείο, οπότε είναι και επίπεδος.*

**6.13. Άσκηση.** *Η εικόνα $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ μιας μη φθίνουσας ακολουθίας*

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \; \cdots$$

*είναι αλυσίδα· άρα κάθε μη φθίνουσα ακολουθία έχει* **όριο** (limit) *σε επαγωγικό χώρο,*

$$\lim_n x_n =_{\text{ορ}} \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{6-9}$$

**6.14. Πρόταση.** (1) *Κάθε δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$ είναι επαγωγικός χώρος.*

(2) *Για όλα τα σύνολα $A$, $E$, ο χώρος $(A \rightharpoonup E)$ των μερικών συναρτήσεων από το $A$ στο $E$ είναι επαγωγικός.*

(3) *Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο $P$, το σύνολο*

$$\text{Chains}(P) = \{S \subseteq P \mid S \text{ είναι αλυσίδα}\}$$

*των αλυσίδων στο $P$* (μερικά διατεταγμένος από την $\subseteq$) *είναι επαγωγικός.*

Απόδειξη. Το (1) έπεται άμεσα από την Άσκηση **6.6**. (2) Αν το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι αλυσίδα, τότε η ένωση $\bigcup S$ είναι μερική συνάρτηση και προφανώς, $\bigcup S = \sup S$. (3) Με τον ίδιο τρόπο, η ένωση μιας αλυσίδας αλυσίδων είναι (εύκολα) αλυσίδα. ⊣

**6.15. Άσκηση.** *Ούτε ο* $\mathbb{N}$ (με τη συνήθη διάταξη) *ούτε ο πεπερασμένος χώρος του Διαγράμματος* **6.2** *είναι επαγωγικοί.*

**6.16. Άσκηση.** *Για κάθε $E$, το σύνολο $P = E^* \cup (\mathbb{N} \to E)$ των πεπερασμένων και άπειρων ακολουθιών από το $E$ είναι επαγωγικός χώρος, με τη μερική διάταξη $\subseteq$.*

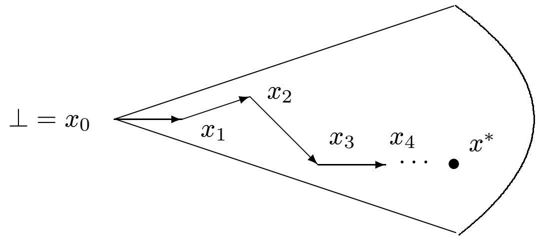
**6.17. Άσκηση.** *Για όλα τα σύνολα $A$, $E$ ο χώρος*

$$(A \rightarrowtail E) =_{\text{ορ}} \{f \in (A \rightharpoonup E) \mid \text{η } f \text{ είναι ένα-προς-ένα}\}$$

*των* **μερικών μονομορφισμών** *από το $A$ στο $E$* (μερικά διατεταγμένος από τη $\subseteq$) *είναι επαγωγικός.*

Σ' αυτούς τους χώρους —και στους υποχώρους τους— βρίσκουν τις σημαντικότερές τους εφαρμογές τα θεωρήματα σταθερού σημείου· όμως στις αποδείξεις θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το ότι είναι επαγωγικοί, καθώς υπάρχουν κι άλλα πολλά ενδιαφέροντα παραδείγματα. Μερικά από αυτά περιγράφονται στα προβλήματα, στο τέλος του κεφαλαίου.

Ήρθε η ώρα να ορίσουμε τις συναρτήσεις στους επαγωγικούς χώρους που έχουν πάντα σταθερά σημεία.




Διαγραμμα **6.4**. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου.

**6.18. Ορισμός.** Μια απεικόνιση[15] $\pi : P \to Q$ από ένα χώρο $P$ σε κάποιον άλλο είναι **μονοτονική** (monotone) αν για για όλα τα $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \Longrightarrow \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

Μονοτονικές απεικονίσεις δεν είναι απαραίτητα (αυστηρά) αύξουσες με την έννοια του

$$x <_P y \Longrightarrow \pi(x) <_Q \pi(y),$$

π.χ. κάθε σταθερή απεικόνιση είναι μονοτονική.

Παρατηρούμε ότι αν η $\pi : P \to Q$ είναι μονοτονική και το $S \subseteq P$ είναι αλυσίδα, τότε η εικόνα $\pi[S]$ είναι επίσης αλυσίδα· επειδή για όλα τα $x = \pi(u)$, $y = \pi(v)$ με $u, v \in S$, είτε $u \leq v$, που συνεπάγεται $x = \pi(u) \leq \pi(v) = y$, είτε $v \leq u$, που συνεπάγεται $y \leq x$. Συνεπώς ο όρος $\sup \pi[S]$ έχει νόημα στον επόμενο ορισμό.

**6.19. Ορισμός.** Μια μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **αριθμήσιμα συνεχής** (countably continuous) αν για κάθε μη κενή, απαριθμητή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

**6.20. Άσκηση.** *Μια μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι αριθμήσιμα συνεχής τότε και μόνον αν για κάθε μη φθίνουσα ακολουθία $x_0 \leq_P x_1 \leq_P \ldots$ του $P$,*

$$\pi(\lim_n x_n) = \lim_n \pi(x_n).$$

Εδώ το όριο στα αριστερά υπολογίζεται στον $P$ και αυτό στα δεξιά στον $Q$.

[15]Συχνά καλούμε την $\pi : P \to Q$ «απεικόνιση» αντί για «συνάρτηση» (που σημαίνει ακριβώς το ίδιο πράγμα), επειδή στις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν, το $P$ είναι κάποιος συναρτησιακός χώρος $(A \rightharpoonup E)$, και το $Q$ επίσης, επομένως όλα τα αντικείμενα στην εξίσωση $\pi(x) = y$ είναι συναρτήσεις και ζαλίζεται κανείς. Παρατηρήστε επίσης ότι (σχολαστικά) η $\pi : \mathrm{Field}(P) \to \mathrm{Field}(Q)$ είναι απεικόνιση από το πεδίο του $P$ σε αυτό του $Q$.

**6.21. Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου** (Continuous Least Fixed Point Theorem). *Κάθε αριθμήσιμα συνεχής, μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to P$ από έναν επαγωγικό χώρο στον εαυτό του έχει ακριβώς ένα* **ισχυρά ελάχιστο σταθερό σημείο** (strongly least fixed point) $x^*$, *που χαρακτηρίζεται από τις δύο ιδιότητες:*

$$\pi(x^*) = x^*, \tag{6-10}$$

$$(\forall y \in P)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x^* \leq y]. \tag{6-11}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η **τροχιά** (orbit) του ελάχιστου $\perp$ από την $\pi$ ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} x_0 &= \perp, \\ x_{n+1} &= \pi(x_n). \end{aligned}$$

Προφανώς $x_0 = \perp \leq x_1$, και με τετριμμένη επαγωγή (χρησιμοποιώντας τη μονοτονικότητα της $\pi$), για κάθε $n$, $x_n \leq x_{n+1}$. Έτσι το όριο

$$x^* =_{\text{ορ}} \lim_n x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \tag{6-12}$$

υπάρχει από την **6.13**, και από την αριθμήσιμη συνέχεια της $\pi$,

$$\pi(x^*) = \pi(\lim_n x_n) = \lim_n \pi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*.$$

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη χαρακτηριστική ιδιότητα του $x^*$, δεχόμαστε ότι $\pi(y) \leq y$ και δείχνουμε επαγωγικά ότι για κάθε $n$, $x_n \leq y$. ΒΑΣΗ. $x_0 = \perp \leq y$, τετριμμένα. ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Η Επαγωγική Υπόθεση μας δίνει $x_n \leq y$, και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x_n \leq y &\Longrightarrow \pi(x_n) \leq \pi(y), && \text{(επειδή η } \pi \text{ είναι μονοτονική)}, \\ &\Longrightarrow x_{n+1} \leq \pi(y) \leq y, && \text{(από την υπόθεση για το } y). \end{aligned}$$

Άρα το $y$ είναι άνω φράγμα της αλυσίδας $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, και συμπεραίνουμε ότι $x^* = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \leq y$. ⊣

Για να εφαρμόσουμε το Συνεχές Θεώρημα Σταθερού Σημείου, πρέπει πρώτα να διατυπώσουμε το πρόβλημά μας ως ερώτηση για την ύπαρξη και (μερικές φορές) τη μοναδικότητα λύσεων εξίσωσης της μορφής $\pi(x) = x$, όπου η $\pi : P \to P$ είναι μονοτονική και αριθμήσιμα συνεχής σε κάποιον επαγωγικό χώρο $P$. Τυπικά αυτό είναι και το πιο δύσκολο μέρος της λύσης: να φέρουμε το πρόβλημα σε μορφή στην οποία εφαρμόζεται το **6.21**. *Δεν είναι αναγκαίο να επαληθεύσουμε ότι η $\pi$ είναι αριθμήσιμα συνεχής*: στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι το **6.21** *παραμένει αληθές αν απλώς αφαιρέσουμε την υπόθεση αριθμήσιμης συνέχειας της $\pi$*. Οπωσδήποτε, οι περισσότερες εφαρμογές αφορούν απλές μονοτονικές απεικονίσεις σε χώρους μερικών συναρτήσεων για τις οποίες μπορούμε συχνά να αναγνωρίσουμε αμέσως μια πολύ ισχυρότερη φυσική ιδιότητα συνέχειας.

**6.22. Ορισμός.** Η μερική συνάρτηση $g : A \rightharpoonup E$ είναι **πεπερασμένη** αν έχει πεπερασμένο πεδίο ορισμού, δηλαδή αν είναι πεπερασμένο σύνολο ζευγών.

Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ από ένα χώρο μερικών συναρτήσεων σε κάποιον άλλο είναι **συνεχής**, αν είναι **μονοτονική** και **συμπαγής**, δηλαδή για κάθε $f : A \rightharpoonup E$, και όλα τα $y \in B$ και $v \in M$,

$$\pi(f)(y) = v \Longrightarrow (\exists f_0 \subseteq f)[\text{η } f_0 \text{ είναι πεπερασμένη} \,\&\, \pi(f_0)(y) = v]. \tag{6-13}$$

Ο συμβολισμός δεν βοηθάει, αλλά η έννοια είναι αρκετά απλή: για να υπολογίσουμε την τιμή $\pi(f)(y)$, πρώτα υπολογίζουμε τη μερική συνάρτηση $f' = \pi(f)$ και μετά υπολογίζουμε την τιμή της στο $y$, $\pi(f)(y) = f'(y)$. Η μονοτονική $\pi$ είναι συνεχής, αν κάθε (συγκλίνουσα) τιμή $\pi(f)(y)$ της $\pi(f)$ εξαρτάται μόνο από πεπερασμένο πλήθος τιμών της $f$. Μπορούμε να συνδυάσουμε τις έννοιες της μονοτονικότητας και της συμπάγειας στον ακόλουθο χαρακτηρισμό της συνέχειας απεικονίσεων χώρων μερικών συναρτήσεων, ο οποίος μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε άμεσα τη συνέχειά τους.

**6.23. Πρόταση.** *Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι συνεχής αν και μόνον αν ικανοποιεί την (6-13) και την αντίστροφή της, δηλαδή αν για κάθε $f : A \rightharpoonup E$, και για όλα τα $y \in B$ και $v \in M$:*

$$\pi(f)(y) = v \iff (\exists f_0 \subseteq f)[\eta\ f_0 \text{ είναι πεπερασμένη} \,\&\, \pi(f_0)(y) = v]. \tag{6-13*}$$

Για παράδειγμα, η απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ που ορίζεται με τον τύπο

$$\pi(f) = (n \mapsto f(n) + f(n^2))$$

είναι συνεχής, επειδή (προφανώς) για κάθε $f$ και $n$, ισχύει

$$\pi(f)(n) = \pi(f_0)(n),$$

όπου $f_0$ είναι ο περιορισμός της $f$ στο δισύνολο $\{n, n^2\}$.

Αποδειξη της **6.23**. Αρχικά δεχόμαστε ότι: η $\pi$ είναι συνεχής, $f : A \rightharpoonup E$, $y \in B$, και $v \in M$. Αν $\pi(f)(y) = b$, τότε από τη συμπάγεια της $\pi$, υπάρχει πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$ με $\pi(f_0)(y) = v$· κι έτσι, από τη μονοτονικότητα της $\pi$, έπεται ότι $\pi(f)(y) = v$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η (6-13*) ισχύει για κάθε $f : A \rightharpoonup E$ και όλα τα $y \in B$, $v \in M$. Έτσι έπεται άμεσα η συμπάγεια της $\pi$. Για να επαληθεύσουμε ότι η $\pi$ είναι μονοτονική, δεχόμαστε ότι $f \subseteq g$ και $\pi(f)(y) = v$· από την κατεύθυνση $\Longrightarrow$ της (6-13*), υπάρχει κάποια πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$ με $\pi(f_0)(y) = v$. Όμως $f_0 \subseteq g$, κι άρα από την κατεύθυνση $\Longleftarrow$ της (6-13*), $\pi(g)(y) = v$. ⊣

**6.24. Άσκηση.** *Δείξε ότι η απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ ορισμένη με τον τύπο*

$$\pi(f) = (n \mapsto \Sigma_{i=0}^{n} f(i))$$

*είναι συνεχής. Υπολογίστε την τιμή $\pi(n \mapsto 2n)(2)$.*

**6.25. Ορισμός.** Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι (τοπολογικά) **συνεχής** (continuous), αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου στον $Y$ είναι ανοικτό σύνολο στον $X$. **Τοπολογικοί χώροι** ορίστηκαν στο **4.30**, σαν πρώτο παράδειγμα δομημένων συνόλων.

**6.26. Άσκηση.** *Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι συνεχής τότε και μόνον αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[F]$ κάθε κλειστού συνόλου στον $Y$ είναι κλειστό σύνολο στον $X$.*

Θα μπορούσε κανείς να υποθέσει ότι οι συνεχείς απεικονίσεις του Ορισμού **6.22** έχουν κάτι κοινό με τις συνεχείς συναρτήσεις της τοπολογίας, και βέβαια δεν θα είχε άδικο: οι έννοιες είναι ισοδύναμες με τον σωστό ορισμό τοπολογίας στους χώρους μερικών διατάξεων, αλλά αυτό το αποτέλεσμα δεν μας χρειάζεται και το αφήνουμε για το Πρόβλημα **x6.21**.

**6.27. Περί τοπολογίας γενικά.** Η λεγόμενη Γενική Τοπολογία (Τοπολογία Σημειοσυνόλων) είναι για τη συνολοθεωρία σαν το μαϊντανό, μπαίνει λίγο παντού, αλλά δεν υπάρχουν περιώνυμες συνταγές «πιάτων μαϊντανού» που ο επίδοξος Έλληνας μάγειρας πρέπει να μάθει. Πολλές τοπολογικές ιδέες σχετίζονται με τη θεωρία συνόλων, αλλά πολύ σπάνια μπορείς να αποδείξεις ένα ενδιαφέρον θεώρημα για τα σύνολα με χρήση κάποιου σημαντικού αποτελέσματος από την τοπολογία. Για να μη χαθούμε σε παραδρόμια, θα ακολουθήσουμε την πάγια τακτική να δίνουμε τους πιο άμεσους, συνολοθεωρητικά φυσικούς ορισμούς και αποδείξεις για τις έννοιες και τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν, και θα αφήσουμε τις σχέσεις με την τοπολογία για τα προβλήματα. Σε μερικές περιπτώσεις, βεβαίως, η πιο φυσική προσπέλαση είναι πράγματι η τοπολογική.

**6.28. Λήμμα.** *Αν το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι μη κενή αλυσίδα σε χώρο μερικών συναρτήσεων και η $f_0 \subseteq \sup S$ είναι πεπερασμένη συνάρτηση, τότε υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $f_0 \subseteq g$.*

ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ χρησιμοποιούμε επαγωγή στον αριθμό των στοιχείων του πεδίου της $f_0$:

ΒΑΣΗ. Η κενή $f_0 = \emptyset$ είναι η μερική συνάρτηση που δεν ορίζεται πουθενά. Υπάρχει κάποια $g \in S$ αφού το $S$ δεν είναι κενό, και $\emptyset \subseteq g$.

ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Το πεδίο της $f_0$ έχει $n+1$ μέλη, άρα

$$f_0 = f_1 \cup \{(x, w)\} \subseteq \sup S,$$

όπου η $f_1$ είναι πεπερασμένη, μερική συνάρτηση με μόνο $n$ στοιχεία στο πεδίο της, και από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει κάποια $g_1 \in S$ τέτοια ώστε $f_1 \subseteq g_1$. Εφόσον $(x, w) \in \sup S$, πρέπει να υπάρχει κάποια $h' \in S$ τέτοια ώστε $(x, w) \in h'$, και αφού το $S$ είναι αλυσίδα, είτε $g_1 \subseteq h'$ είτε $h' \subseteq g_1$· η $g$ που χρειαζόμαστε είναι η μεγαλύτερη από αυτές τις δύο μερικές συναρτήσεις. $\dashv$

**6.29. Λήμμα.** *Κάθε συνεχής απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι αριθμήσιμα συνεχής, μάλιστα για κάθε μη κενή* (όχι απαραίτητα απαριθμητή) *αλυσίδα $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$,*

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι το $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι μη κενή αλυσίδα με ένωση $f = \sup S$. Αν $g \in S$, τότε $g \leq f$, κι αφού η $\pi$ είναι μονοτονική έχουμε $\pi(g) \leq \pi(f)$, έτσι που

$$\sup \pi[S] = \sup \{\pi(g) \mid g \in S\} \leq \pi(f).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, πρέπει να δείξουμε ότι αν $\pi(f)(y) = v$, τότε υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $\pi(g)(y) = v$. Από την ισχυρή συνέχεια της $\pi$, υπάρχει κάποια πεπερασμένη $f_0 \subseteq f$, τέτοια ώστε $\pi(f_0)(y) = v$· από το προηγούμενο Λήμμα, υπάρχει κάποια $g \in S$ τέτοια ώστε $f_0 \subseteq g$· και με τη μονοτονικότητα της $\pi$, αυτό συνεπάγεται ότι $\pi(f_0) \subseteq \pi(g)$. Ειδικότερα, $\pi(f_0)(y) = v$, άρα $\pi(g)(y) = v$ και αυτή είναι η $g$ που χρειαζόμαστε. ⊣

Προφανώς το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σημείου είναι απλό πόρισμα του Θεωρήματος Αναδρομής στους φυσικούς αριθμούς **5.6**. Επίσης όμως συνεπάγεται το **5.6**, με έναν ευθύ συλλογισμό που αξίζει διερεύνηση, επειδή επεξηγεί τον βασικό τρόπο με τον οποίο εφαρμόζουμε το **6.21**.

**6.30. Απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής από το 6.21**. Για κάθε $a \in E$ και κάθε συνάρτηση $h : E \to E$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup E) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup E)$$

με τον τύπο

$$\pi(f) = f', \text{ όπου } f'(x) = \begin{cases} a, \text{ αν } x = 0, \\ h(f(x-1)), \text{ αν } x > 0, \end{cases}$$

Εδώ η $f$ είναι μερική συνάρτηση από το $\mathbb{N}$ στο $E$ και ερμηνεύουμε τον ορισμό με τον φυσικό τρόπο, έτσι που

$$x > 0 \Longrightarrow [f'(x)\downarrow \iff h(f(x-1))\downarrow \iff f(x-1)\downarrow].$$

Σχολαστικά, η απεικόνιση $\pi$ αντιστοιχίζει ένα σύνολο ζευγών $f' \subseteq (\mathbb{N} \times E)$ σε κάθε $f \in (\mathbb{N} \rightharpoonup E)$ και ορίζεται με την εξίσωση

$$\pi(f) = \{(0,a)\} \bigcup \{(x, h(w)) \mid x > 0 \,\&\, (x-1, w) \in f\} \quad (f : \mathbb{N} \rightharpoonup E). \tag{6-14}$$

Από αυτό έπεται ότι για κάθε $f$ και κάθε $x$,

$$\pi(f)(x) = \pi(f_0)(x),$$

όπου $f_0 = \{(0,a)\}$ αν $x = 0$ και $f_0 = \{(x-1, f(x-1))\}$ αν $x > 0$, κι έτσι η $\pi$ είναι συνεχής από την Πρόταση **6.23**, κι άρα αριθμήσιμα συνεχής. Έτσι, από την **6.21**, έχει ένα σταθερό σημείο: με άλλα λόγια, υπάρχει μερική συνάρτηση $f^* : \mathbb{N} \rightharpoonup E$ που ικανοποιεί την $f^* = \pi(f^*)$, και αμέσως

$$f^*(0) = a, \tag{6-15}$$

$$f^*(x+1) = h(f^*(x)) \quad (f^*(x)\downarrow). \tag{6-16}$$

Το Θεώρημα **6.21** δεν εγγυάται ότι αυτή η $f^*$ είναι *ολική συνάρτηση*, με πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{N}$, αλλά αυτό επαληθεύεται εύκολα με επαγωγή στο $x$, χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (6-15), (6-16). ⊣

Θεωρούμε τώρα μια πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή, όπου δεν είναι τόσο προφανές πώς να ορίσουμε τη συνάρτηση που χρειαζόμαστε κατευθείαν από το Θεώρημα Αναδρομής.

**6.31. Πρόταση.** *Για κάθε συνάρτηση* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *και κάθε άπειρο σύνολο* $A \subseteq \mathbb{N}$ *φυσικών αριθμών, υπάρχει* (ολική) *συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *που ικανοποιεί τις ταυτότητες:*

$$f(n) = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \in A, \\ h(f(n+1)), & \text{αν } n \notin A. \end{cases} \tag{6-17}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$$

στον επαγωγικό χώρο όλων των μερικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής στο $\mathbb{N}$, με τον τύπο

$$\pi(f) = f', \text{ όπου } f'(n) = \begin{cases} 0, \text{ αν } n \in A, \\ h(f(n+1)), \text{ αν } n \notin A. \end{cases} \tag{6-18}$$

Λεπτομερέστερα, αυτό σημαίνει ότι θέτουμε

$$\pi(f) = \{(n, 0) \mid n \in A\} \cup \{(n, h(w)) \mid n \notin A \,\&\, (n+1, w) \in f\},$$

που συνεπάγεται από τη μορφή της ότι η $\pi$ είναι συνεχής, άρα αριθμήσιμα συνεχής. Επομένως έχει ένα σταθερό σημείο $f$ που ικανοποιεί την (6-17), και αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτή η $f$ είναι ολική. Ας δεχτούμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι $f(n)\uparrow$ για κάποιο $n$. Παρατηρούμε ότι από την (6-17) αυτό συνεπάγεται ότι $n \notin A$, αλλιώς $f(n)\downarrow$, και μάλιστα $f(n) = 0$. Θα δείξουμε με επαγωγή στο $i$ ότι $f(n+i)\uparrow$, που συνεπάγεται με τη σειρά του ότι για κάθε $i$, $n + i \notin A$, άρα το $A \subseteq [0, n)$ είναι πεπερασμένο, που είναι άτοπο. ΒΑΣΗ. Αν $i = 0$, τότε $f(n+0) = f(n)\uparrow$, από την υπόθεση. ΕΠΑΓΩΓΙΚΟ ΒΗΜΑ. Αν $f(n+i)\uparrow$, τότε από την (6-17), πάλι, $n+i \notin A$. Αυτό όμως συνεπάγεται $f(n+i) = h(f(n+i+1))$, άρα $f(n+i+1)\downarrow \Longrightarrow f(n+i)\downarrow$ (αφού η $h$ είναι ολική), που είναι ενάντιο στην επαγωγική υπόθεση. ⊣

**6.32. Άσκηση.** *Δείξε λεπτομερειακά τη συνέχεια της* $\pi$ *σ' αυτήν την απόδειξη.*

Για μια τρίτη τυπική εφαρμογή του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού Σημείου, θεωρούμε τον *αλγόριθμο του Ευκλείδη*.

**6.33. Πρόταση.** (1) *Υπάρχει ακριβώς μία μερική συνάρτηση* $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ *με πεδίο ορισμού* $\{(n, m) \mid n, m \neq 0\}$ *που ικανοποιεί τις εξής ταυτότητες, για όλους τους αριθμούς* $0 < n < m$:

$$\begin{aligned} f(m, n) &= f(n, m), \\ f(n, n) &= n, \\ f(n, m) &= f(n, m - n). \end{aligned} \tag{6-19}$$

(2) *Η μοναδική $f^*$ που ικανοποιεί το σύστημα (6-19) υπολογίζει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δύο αριθμών μεγαλύτερων του 0,*

$$\begin{aligned} f^*(n,m) &= \mathsf{μκδ}(n,m) \qquad (6\text{-}20)\\ &= \text{ο μέγιστος } k \text{ που διαιρεί ακριβώς}\\ &\quad \text{και τους δύο αριθμούς } n,\ m. \end{aligned}$$

Αποδειξη. Σε κάθε μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ αντιστοιχίζουμε τη μερική συνάρτηση $f' : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ που ορίζεται με τον τύπο

$$f'(n,m) = \begin{cases} f(m,n), & \text{αν } n > m > 0,\\ n, & \text{αν } n = m > 0,\\ f(n,m-n) & \text{αν } 0 < n < m, \end{cases}$$

και θέτουμε

$$\pi(f) = f'.$$

Η απεικόνιση $\pi : ((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N}) \to ((\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N})$ είναι προφανώς συνεχής. Συνεπώς υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f^* : (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \rightharpoonup \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\pi(f^*) = f^*,$$

και αυτό είναι (εύκολα) ισοδύναμο με το σύστημα (6-19). Η απόδειξη ότι για όλα τα $n, m \neq 0$

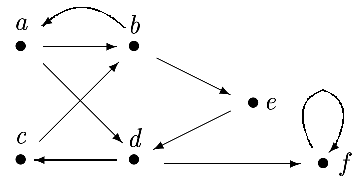
$$f^*(n,m)\downarrow \ \& \ f^*(n,m) = \mathsf{μκδ}(n,m)$$

είναι με επαγωγή στο άθροισμα $n+m$. (Διαχώρισε περιπτώσεις αν $0 < m < n$, $0 < m = n$ ή $0 < n < m$, και χρησιμοποίησε την απλή ιδιότητα των φυσικών αριθμών, ότι *για $0 < n < m$, οι κοινοί διαιρέτες των $n, m$ είναι ακριβώς οι ίδιοι με τους κοινούς διαιρέτες των $n, m-n$.*) ⊣

Σ' αυτό το παράδειγμα δεν χρειαζόμαστε το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του συστήματος (6-19), αφού μπορούμε να επαληθεύσουμε κατευθείαν ότι η συνάρτηση μκδ είναι λύση. Παρ' όλα αυτά, η Πρόταση είναι σημαντική, επειδή μας δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της συνάρτησης μκδ που υποδείχνει ένα συγκεκριμένο —και εύκολο— τρόπο υπολογισμού της. Π.χ. χρησιμοποιώντας μόνο τις εξισώσεις του συστήματος, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \mathsf{μκδ}(231,165) &= \mathsf{μκδ}(165,231) = \mathsf{μκδ}(165,66) = \mathsf{μκδ}(66,165)\\ &= \mathsf{μκδ}(66,99) \quad\ = \mathsf{μκδ}(66,33) \quad = \mathsf{μκδ}(33,66)\\ &= \mathsf{μκδ}(33,33) \quad\ = 33. \end{aligned}$$

Αυτός ο υπολογισμός της τιμής $\mathsf{μκδ}(231,165)$ είναι πολύ απλούστερος του τετριμμένου, όπου ψάχνουμε για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη δοκιμάζοντας με τη σειρά όλους τους αριθμούς από τον 165 προχωρώντας προς τα κάτω, μέχρις ότου βρούμε κάποιον κοινό διαιρέτη των 165 και 231. Το φαινόμενο είναι γενικό: ο χαρακτηρισμός μιας συνάρτησης $f$ ως την ελάχιστη λύση συστήματος απλών εξισώσεων συχνά μας δίνει έναν **αλγόριθμο**, μια «συνταγή» για τον «μηχανικό» υπολογισμό των τιμών της $f$, και αυτός είναι ένας από τους λόγους




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **6.5**

που το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου είναι θεμελιακό για την πληροφορική.

Τελειώνουμε μ' ένα απλό αποτέλεσμα για γραφήματα που σχετίζεται με τις ιδέες αυτού του κεφαλαίου, βλ. Προβλήματα **x6.16** και **x6.17**.

**6.34. Ορισμός. Γράφημα** (graph) είναι ένα δομημένο σύνολο $(G, \to_G)$, όπου το σύνολο των **ακμών** (edges) $\to_G \subseteq G \times G$ είναι διμελής σχέση στο σύνολο των **κόμβων** (nodes) $G$. Η **μεταβατική κλειστότητα** (transitive closure) του $G$ είναι το γράφημα $\overline{G} = (G, \Rightarrow_G)$, όπου

$$\begin{aligned} x \Rightarrow_G y &\iff_{\text{ορ}} \text{υπάρχει μονοπάτι από το } x \text{ στο } y \text{ στο } G \\ &\iff (\exists z_0, \dots, z_n)[x = z_0 \to_G z_1 \,\&\, \cdots \,\&\, z_{n-1} \to_G z_n = y]. \end{aligned}$$

Απεικονίζουμε γραφήματα περίπου όπως και μερικά διατεταγμένους χώρους, αλλά η κατεύθυνση «προς τα δεξιά ή επάνω» δεν έχει καμιά ιδιαίτερη σημασία και χρησιμοποιούμε συστηματικά βέλη αντί για απλές γραμμές: η σχέση $x \to_G y$ ισχύει αν υπάρχει βέλος από το $x$ στο $y$, και η $x \Rightarrow_G y$ ισχύει αν μπορούμε να κινηθούμε από το $x$ στο $y$ ακολουθώντας τα βέλη του διαγράμματος. Στο Διάγραμμα **6.5**, $f \to f$, $a \Rightarrow a$ και $a \Rightarrow c$, αλλά $f \not\Rightarrow d$.

**6.35. Πρόταση.** *Για κάθε γράφημα $G$, η σχέση μεταβατικής κλειστότητας $\Rightarrow_G$ ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$x \Rightarrow_G y \iff x \to_G y \vee (\exists z \in G)[x \to_G z \,\&\, z \Rightarrow_G y]. \tag{6-21}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι

$$x = z_0 \to_G z_1 \to_G z_2 \to_G \cdots \to_G z_n = y\cdot$$

αν $n = 1$, τότε αμέσως $x \to_G y$, και αν $n > 1$, τότε $x \to_G z_1$ και $z_1 \Rightarrow_G y$ (από τον ορισμό της $\Rightarrow_G$), και το δεξί μέλος της (6-21) συνάγεται θέτοντας $z = z_1$. Η απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής διασπάται φυσικά σε δύο περιπτώσεις και είναι εξίσου απλή. ⊣

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 6

**x6.1.** Για κάθε μερική διάταξη $\leq$ στο σύνολο $A$, η **αντίστροφη σχέση**

$$x \leq' y \iff_{\text{ορ}} y \leq x$$

είναι επίσης μερική διάταξη. Από τους επαγωγικούς χώρους $(A \rightharpoonup E)$ και $\mathcal{P}(A)$, ποιος έχει επαγωγικό, αντίστροφο χώρο;

**x6.2.** Για κάθε επαγωγική, μερική διάταξη $\leq_E$ στο σύνολο $E$ και για κάθε σύνολο $A$, ορίζουμε στον συναρτησιακό χώρο $(A \to E)$ τη μερική διάταξη

$$f \leq g \iff_{\text{ορ}} (\forall x \in A)[f(x) \leq_E g(x)] \quad (f, g : A \to E).$$

που συγκρίνει τις συναρτήσεις «κατά σημείο» (pointwise). Δείξε ότι η $\leq$ είναι επαγωγική, μερική διάταξη του $(A \to E)$.

**x6.3.** Αν οι μερικές διατάξεις $\leq_1$, $\leq_2$ στα αντίστοιχα σύνολα $P_1$, $P_2$ είναι επαγωγικές, τότε επαγωγική είναι και η εξής σχέση $\leq$ στο Καρτεσιανό γινόμενο $P_1 \times P_2$:

$$(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2) \iff_{\text{ορ}} x_1 \leq_1 y_1 \,\&\, x_2 \leq_2 y_2.$$

Μ' αυτή τη μερική διάταξη ο χώρος $P_1 \times P_2$ καλείται το **γινόμενο** των δύο χώρων $P_1$ και $P_2$.

**x6.4.** Θεωρούμε τρεις επαγωγικούς χώρους $P_1$, $P_2$ και $Q$. Μια απεικόνιση $\pi : P_1 \times P_2 \to Q$ είναι **χωριστά μονοτονική** (separately monotone) αν για κάθε $x_1 \in P_1$, η απεικόνιση $(x_2 \mapsto \pi(x_1, x_2))$ στον $P_2$ είναι μονοτονική, και συμμετρικά, για κάθε $x_2 \in P_2$. Δείξε ότι η $\pi$ είναι μονοτονική (στο γινόμενο) τότε και μόνον αν είναι χωριστά μονοτονική.

**x6.5.** Θεωρούμε τρεις επαγωγικούς χώρους $P_1$, $P_2$ και $Q$. Μια απεικόνιση $\pi : P_1 \times P_2 \to Q$ είναι **χωριστά αριθμήσιμα συνεχής** (separately, countably continuous) αν για κάθε $x_1 \in P_1$, η απεικόνιση $(x_2 \mapsto \pi(x_1, x_2))$ στον $P_2$ είναι αριθμήσιμα συνεχής, και συμμετρικά για κάθε $x_2 \in P_2$. Δείξε ότι η $\pi$ είναι αριθμήσιμα συνεχής τότε και μόνον αν είναι χωριστά αριθμήσιμα συνεχής.

**6.36. Ορισμός.** Το στοιχείο $M$ είναι **μεγιστικό** (maximal) του συνόλου $S$ στον μερικά διατεταγμένο χώρο $P$, αν το $M$ είναι μέλος του $S$ και κανένα μέλος του $S$ δεν είναι μεγαλύτερο,

$$M \in S \,\&\, (\forall x \in S)[M \leq x \Longrightarrow M = x].$$

Το στοιχείο $m$ είναι **ελαχιστικό** (minimal) του $S$ αν είναι μέλος του $S$ και κανένα μέλος του $S$ δεν είναι μικρότερο,

$$m \in S \,\&\, (\forall x \in S)[x \leq m \Longrightarrow x = m].$$

**x6.6.** Να βρεις στο χώρο του Διαγράμματος **6.2** κάποιο υποσύνολο $S$ που να έχει μεγιστικά στοιχεία αλλά να μην έχει μέγιστο, και κάποιο άλλο με ελαχιστικά στοιχεία, χωρίς ελάχιστο.

$^*$**x6.7.** Κάθε πεπερασμένο, μη κενό υποσύνολο μερικά διατεταγμένου χώρου $P$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό και ένα ελαχιστικό στοιχείο.

$^*$**x6.8.** Ένας πεπερασμένος, μερικά διατεταγμένος χώρος $P$ είναι επαγωγικός αν και μόνον αν έχει ελάχιστο στοιχείο.

Μια σημαντική έννοια της πληροφορικής είναι αυτή του *ρεύματος*, π.χ. το ρεύμα των ψηφίων σε ένα αρχείο που μεταδίδεται από τον CYBER του Πανεπιστημίου Αθηνών στον υπολογιστή του σπιτιού μου, στο Φάληρο, μέσα από τις τηλεφωνικές γραμμές. Το ρεύμα είναι βασικά ακολουθία, αλλά μπορεί να είναι *άπειρη*, στην ιδανικοποιημένη περίπτωση· *τερματισμένη*, αν έπειτα από ένα συγκεκριμένο στάδιο το ψηφίο EOF (τέλος του αρχείου) φτάνει στο Φάληρο και ο υπολογιστής μου ξέρει ότι έληξε η μετάδοση· ή *ημιτελής*, αν έπειτα από κάποιο στάδιο τα ψηφία πάψουν να έρχονται, χωρίς προειδοποίηση, ίσως επειδή ο CYBER πέθανε ή επειδή η τηλεφωνική σύνδεση διακόπηκε.[16]

**6.37. Ορισμός.** Για κάθε σύνολο $A$, διαλέγουμε κάποιο $t \notin A$ (ίσως το αντικείμενο $\mathbf{r}(A)$ της (3-4)) και ορίζουμε τα **ρεύματα** (streams) από το $A$ ως εξής:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Streams}(A)\\ &\qquad =_{\text{ορ}} \{\sigma : \mathbb{N} \rightharpoonup A \cup \{t\} \mid (\forall i < j)[\sigma(j)\downarrow \implies [\sigma(i)\downarrow \;\&\; \sigma(i) \neq t]]\}.\end{aligned}$$

Το ρεύμα $\sigma$ είναι **τελειωμένο** (terminated) ή **συγκλίνον** (convergent) αν για κάποιο $n$, $\sigma(n) = t$, οπότε από τον ορισμό $\mathrm{Domain}(\sigma) = [0, n+1)$· **άπειρο** αν $\mathrm{Domain}(\sigma) = \mathbb{N}$· και **ημιτελές** (stalled ή unterminated) αν το $\mathrm{Domain}(\sigma)$ είναι πεπερασμένο, αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ αλλά το $\sigma$ δεν παίρνει την *τερματική τιμή* $t$. Τα άπειρα και τα ημιτελή ρεύματα μαζί καλούνται **αποκλίνοντα** (divergent).

**x6.9.** Για κάθε σύνολο $A$, το σύνολο των ρευμάτων $\mathrm{Streams}(A)$ είναι επαγωγικός χώρος με τη φυσική, μερική διάταξη $\sqsubseteq$, που ορίζεται, όπως και στις λέξεις,

$$\sigma \sqsubseteq \tau \iff_{\text{ορ}} \sigma \subseteq \tau. \tag{6-22}$$

Ποια είναι τα μεγιστικά στοιχεία αυτού του χώρου;

**x6.10.** Η **παράθεση** (concatenation) $\sigma \star \tau$ δύο ρευμάτων ορίζεται έτσι ώστε αν το $\sigma$ είναι αποκλίνον, τότε $\sigma \star \tau = \sigma$ και αν το $\sigma$ είναι συγκλίνον με πεδίο ορισμού $[0, n+1)$, τότε

$$i < n \implies (\sigma \star \tau)(i) = \sigma(i), \quad (\sigma \star \tau)(n+i) = \tau(i).$$

Δείξε ότι η $\star$ είναι συνεχής συνάρτηση (δύο μεταβλητών) στο χώρο $\mathrm{Streams}(A)$.

Το πλήρες Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μπορεί να αποδειχτεί εύκολα για τα δυναμοσύνολα:

***x6.11.** Έστω μονοτονική απεικόνιση $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ στο δυναμοσύνολο του $A$. Δείξε ότι το σύνολο

$$A^\star = \bigcap\{X \mid \pi(X) \subseteq X\}$$

είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της $\pi$, και το

$$A_\star = \bigcup\{X \mid X \subseteq \pi(X)\}$$

[16] Για να πούμε την αλήθεια, ο CYBER έχει πεθάνει παντελώς από την πρώτη έκδοση αυτών των Σημειώσεων, αλλά ακόμη και σήμερα, οι σύγχρονοι υπολογιστές και οι σταθερότερες τηλεφωνικές γραμμές μας εγκαταλείπουν μερικές φορές.

είναι το μέγιστο σταθερό σημείο της $\pi$.

Τα επόμενα μερικά προβλήματα αφορούν «αλγοριθμικές» εφαρμογές του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού Σημείου.

**x6.12.** Για κάθε διμελή σχέση $R \subseteq \mathbb{N} \times A$, υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times A \rightharpoonup \mathbb{N}$ που έχει τις ιδιότητες

$$\begin{cases} R(n,x) \implies f(n,x) = n, \\ \neg R(n,x) \implies f(n,x) = f(n+1,x), \end{cases}$$

και επομένως

$$f(n,x)\downarrow \iff (\exists m \geq n)[R(m,x),$$
$$f(n,x)\downarrow] \implies f(n,x) = \text{ο ελάχιστος } m \geq n \text{ τέτοιος ώστε } R(m,x).$$

**x6.13.** Για κάθε τριάδα μερικών συναρτήσεων $f_0$, $g$, $h$ με πεδία ορισμού και τιμών τέτοια ώστε οι επόμενες ταυτότητες να έχουν νόημα, υπάρχει ελάχιστη μερική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times A \rightharpoonup E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0,x) = f_0(x),$$
$$f(n+1,x) = h(f(n,g(n,x)),n,x).$$

**x6.14.** Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία (ολική) συνάρτηση $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$f(0,n) = f(n,0) = 0,$$
$$f(n+1,m+1) = f(n,m) + 1.$$

Υπολόγισε την τιμή $f(5,23)$ χρησιμοποιώντας αυτές τις ταυτότητες και «εξήγησε» ποια είναι η τιμή $f(n,m)$, για τυχόντα $n, m$.

**6.38. Ορισμός.** Στο σύνολο $E^*$ των λέξεων (πεπερασμένων ακολουθιών) από ένα σύνολο $E$ που ορίσαμε στο **5.30**, ορίζουμε τις μερικές συναρτήσεις

$$\mathrm{head}(u) = u(0), \tag{6-23}$$
$$\mathrm{tail}(u) = \langle u(1), \ldots, u(\mathrm{lh}(u)-1)\rangle. \tag{6-24}$$

Παρατηρήστε ότι $\mathrm{head}(u)\downarrow$ αν $\mathrm{lh}(u) > 0$, και $\mathrm{tail}(u)$ είναι πάντα ορισμένη, αλλά μας δίνει την κενή λέξη αν $\mathrm{lh}(u) \leq 1$.

**x6.15.** Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς μία ολική συνάρτηση $r : E^* \to E^*$ τέτοια ώστε

$$r(u) = \begin{cases} u, & \text{αν } \mathrm{lh}(u) \leq 1, \\ r(\mathrm{tail}(u)) \star \langle \mathrm{head}(u)\rangle, & \text{αν } \mathrm{lh}(u) > 1. \end{cases}$$

Υπολόγισε την τιμή $r(\langle a,b,c\rangle)$ και δώσε γενική «περιγραφή» της μορφής της τιμής $r(u)$, για τυχόν $u$.

**x6.16.** Για κάθε γράφημα $G$, η μεταβατική κλειστότητα $\Rightarrow_G$ είναι η ελάχιστη (ως προς την $\subseteq$) μεταβατική σχέση στο σύνολο $G$ που περιέχει το σύνολο ακμών $\to_G$.

**x6.17.** Για κάθε γράφημα $G$ με σχέση ακμών $\to_G$, η μεταβατική κλειστότητα $\Rightarrow_G$ είναι το κοινό ελάχιστο σταθερό σημείο των εξής μονοτονικών τελεστών στο χώρο $\mathcal{P}(G \times G)$ όλων των διμελών σχέσεων του $G$:

$$\begin{aligned}
\pi_1(R) &= \{(x, y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[x \to_G z \,\&\, (z, y) \in R]\},\\
\pi_2(R) &= \{(x, y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[(x, z) \in R \,\&\, z \to_G y]\},\\
\pi_3(R) &= \{(x, y) \mid x \to_G y \vee (\exists z)[x \to_G z \to_G y]\\
&\qquad \vee (\exists z, w)[x \to_G z \,\&\, (z, w) \in R \,\&\, w \to_G y]\}.
\end{aligned}$$

**x6.18.** Υποθέτουμε ότι οι $P_1$, $P_2$ είναι επαγωγικοί χώροι, και οι

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: P_1 \times P_2 \to P_1,\\
\pi_2 &: P_1 \times P_2 \to P_2
\end{aligned}$$

είναι μονοτονικές, αριθμήσιμα συνεχείς απεικονίσεις στο γινόμενο $P_1 \times P_2$. Δείξε ότι υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος **ελάχιστων αμοιβαίων σταθερών σημείων** (least, mutual ή simultaneous fixed points) $x_1^*$, $x_2^*$, που χαρακτηρίζεται από τις εξής ιδιότητες:

$$\pi_1(x_1^*, x_2^*) = x_1^*, \quad \pi_2(x_1^*, x_2^*) = x_2^*,$$

$$\pi_1(y_1, y_2) \le_1 y_1 \,\&\, \pi_2(y_1, y_2) \le_2 y_2 \Longrightarrow x_1^* \le_1 y_1 \,\&\, x_2^* \le_2 y_2.$$

Το επόμενο πρόβλημα είναι αλγοριθμική εκδοχή του γνωστού αποτελέσματος της αριθμοθεωρίας, ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $n, m \neq 0$, υπάρχουν (θετικοί ή αρνητικοί) ακέραιοι $\alpha$, $\beta$ τέτοιοι ώστε

$$\mathsf{\mu\kappa\delta}(n, m) = \alpha n + \beta m.$$

Η απόδειξη χρειάζεται μερικές απλές ιδιότητες του συνόλου

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

των ακέραιων αριθμών.

$^*$**x6.19.** Υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος μερικών συναρτήσεων

$$\alpha : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{Z}, \quad \beta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{Z},$$

με κοινό πεδίο ορισμού $\{(n, m) \mid n, m \neq 0\}$, και οι οποίες ικανοποιούν για όλα τα $n, m, k > 0$ τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{gathered}
\text{αν} \;\; n \neq m, \text{ τότε } \;\alpha(n, m) = \beta(m, n),\\
\alpha(n, n) = 1, \quad \beta(n, n) = 0,\\
\alpha(n, n + k) = \alpha(n, k) - \beta(n, k), \quad \beta(n, n + k) = \beta(n, k).
\end{gathered}$$

Προκύπτει ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n, m \neq 0$,

$$\mathsf{\mu\kappa\delta}(n, m) = \alpha(n, m)n + \beta(n, m)m.$$

**x6.20.** Βρες ακεραίους $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$33 = 231\alpha + 165\beta.$$

Επίσης βρες ακεραίους $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$1 = 137\alpha' + 997\beta'.$$

**6.39. Ορισμός.** Για κάθε πεπερασμένη μερική συνάρτηση $g : A \rightharpoonup E$, η **γειτονιά** (neighborhood) που καθορίζεται από την $g$ στο χώρο $(A \rightharpoonup E)$ είναι το σύνολο

$$N(g) =_{\text{ορ}} \{f : A \rightharpoonup E \mid g \subseteq f\}$$

όλων των επεκτάσεων της $g$. *Το σύνολο $G \subseteq (A \rightharpoonup E)$ είναι* **ανοικτό στην τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης** (pointwise convergence) *αν*

$$f \in G \Longrightarrow (\exists g, \text{πεπερασμένη})[f \in N(g) \subseteq G].$$

**x6.21.** Δείξε ότι η οικογένεια των ανοικτών συνόλων στο χώρο $(A \rightharpoonup E)$ κατά τον Ορισμό **6.39** είναι τοπολογία κατά το **4.30**, και μια απεικόνιση

$$\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$$

είναι συνεχής σ' αυτή την τοπολογία κατά τον Ορισμό **6.25** τότε και μόνον αν είναι συνεχής κατά τον **6.22**.

**6.40. Ορισμός.** Ένα υποσύνολο $G \subseteq P$ επαγωγικού χώρου είναι **Scott ανοικτό** αν (1) το $G$ είναι κλειστό προς τα πάνω, δηλαδή

$$x \in G \,\&\, x \leq y \Longrightarrow y \in G,$$

και (2) για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\sup S \in G \Longrightarrow (\exists x \in S)[x \in G].$$

$^*$**x6.22.** Δείξε ότι η οικογένεια των Scott ανοικτών υποσυνόλων επαγωγικού χώρου $P$ είναι τοπολογία.

$^*$**x6.23.** Έστω απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο $P$ σε κάποιον άλλο $Q$. Δείξε ότι η $\pi$ είναι συνεχής στις σχετικές τοπολογίες Scott, τότε και μόνον αν είναι μονοτονική και για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

Υποδειξη. Ίσως να σου φανεί χρήσιμο να αποδείξεις και να χρησιμοποιήσεις το γεγονός ότι για κάθε $c \in P$, το σύνολο $\{x \in P \mid x \leq c\}$ είναι Scott κλειστό.

$^*$**x6.24.** Έστω απαριθμητό σύνολο $A$ και απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$. Δείξε ότι η $\pi$ είναι συνεχής (κατά τον ορισμό **6.22**) τότε και μόνον αν είναι συνεχής σχετικά με τις τοπολογίες Scott στους χώρους $(A \rightharpoonup E)$, $(B \rightharpoonup M)$.

Το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου συχνά διατυπώνεται για την κλάση των *πλήρων κατά κατεύθυνση* χώρων, ιδιαίτερα σε βιβλία της Πληροφορικής.

**6.41. Ορισμός.** Ένα υποσύνολο $S \subseteq P$ μερικά διατεταγμένου χώρου $P$ είναι **κατευθυνόμενο** (directed) αν κάθε ζεύγος στοιχείων του $S$ έχει άνω φράγμα στο $S$, δηλαδή

$$x, y \in S \Longrightarrow (\exists z \in S)[x \leq z \,\&\, y \leq z].$$

Ο χώρος $P$ είναι **πλήρης κατά κατεύθυνση** ή **κατευθυνόμενα πλήρης** αν κάθε κατευθυνόμενο $S \subseteq P$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Ο αγγλικός όρος *directed complete poset* γι' αυτούς τους χώρους συνήθως συντομεύεται με τα αρχικά του, *dcpo*.

**x6.25.** Κάθε αλυσίδα σε μερικά διατεταγμένο χώρο είναι κατευθυνόμενο σύνολο, επομένως κάθε κατευθυνόμενα πλήρης χώρος είναι επαγωγικός και τα Θεωρήματα Σταθερού Σημείου ισχύουν για κατευθυνόμενα πλήρεις χώρους.

**x6.26.** Για όλα τα σύνολα $A$ και $E$, οι χώροι $(A \rightharpoonup E)$ και $(A \rightarrowtail E)$ είναι κατευθυνόμενα πλήρεις.

**x6.27.** Η απεικόνιση $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ είναι συνεχής τότε και μόνον αν για κάθε κατευθυνόμενο $S \subseteq (A \rightharpoonup E)$,

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S].$$

**x6.28.** Το γινόμενο (**x6.3**) $P_1 \times P_2$ δύο χώρων που είναι πλήρεις κατά κατεύθυνση είναι επίσης πλήρες κατά κατεύθυνση.

* **x6.29.** Κάθε απαριθμητός, επαγωγικός χώρος είναι κατευθυνόμενα πλήρης.

Στην πραγματικότητα οι έννοιες *επαγωγικός* και *κατευθυνόμενα πλήρης* είναι ισοδύναμες· για κάθε απεικόνιση $\pi : P \to Q$ από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο, η εξίσωση

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S] \tag{6-25}$$

ισχύει για όλες τις μη κενές αλυσίδες $S \subseteq P$ αν και μόνον αν ισχύει για όλα τα μη κενά κατευθυνόμενα σύνολα $S \subseteq P$· και ο χαρακτηρισμός της Scott συνέχειας στο **x6.24** ισχύει και στην περίπτωση που το $A$ είναι αναπαρίθμητο. Οι αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων δεν είναι απλές και χρειάζονται το Αξίωμα Επιλογής, βλ. τα Προβλήματα **x9.22** – **x9.25**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

# ΚΑΛΑ ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟΙ ΧΩΡΟΙ

**7.1. Καλά διατεταγμένος χώρος** (well ordered set) είναι ένας μερικά διατεταγμένος χώρος
$$U = (\text{Field}(U), \leq_U),$$
όπου η $\leq_U$ είναι καλή διάταξη του Field($U$), δηλαδή διάταξη γραμμική (ολική) και τέτοια ώστε κάθε μη κενό $X \subseteq \text{Field}(U)$ να έχει ελάχιστο μέλος. Με το $U$ συνδέεται επίσης η **αυστηρή διάταξη** $<_U$,
$$x <_U y \iff_{\text{ορ}} x \leq_U y \,\&\, x \neq y.$$
Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένο με τη συνηθισμένη διάταξη, όπως επίσης και κάθε πεπερασμένο αρχικό του τμήμα
$$[0, n) = \{i \in \mathbb{N} \mid i < n\}.$$
Ένας «μακρύτερος» καλά διατεταγμένος χώρος, είναι ο $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq')$, όπου το $\infty$ είναι κάποιο αντικείμενο που δεν ανήκει στο $\mathbb{N}$ που τοποθετούμε έπειτα από όλους τους φυσικούς αριθμούς,
$$x \leq' y \iff y = \infty \vee [x, y \in \mathbb{N} \,\&\, x \leq y].$$
Όπως πάντα με δομημένα σύνολα, γενικά ταυτίζουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$ με το πεδίο του, αναφερόμαστε στα *σημεία* ή *υποσύνολα* του $U$ εννοώντας αυτά του Field($U$), ο δείκτης από τα $\leq_U$ και $<_U$ παραλείπεται όταν εννοείται, κ.λπ. Συχνά επίσης καλούμε αυτά τα αντικείμενα απλώς **χώρους**, όταν το «καλά διατεταγμένοι» είναι προφανές από τα συμφραζόμενα.

Τα σημαντικότερα αποτελέσματα στα προηγούμενα δύο κεφάλαια αποδείχτηκαν με κάποιο συνδυασμό των δύο ιδεών
$$\text{αναδρομικός ορισμός – επαγωγική απόδειξη.} \tag{7-1}$$
Στην απλούστερη περίπτωση, κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ ορίζεται αναδρομικά, κάποιες ιδιότητες της $f$ αποδείχνονται επαγωγικά, και απ' αυτές προκύπτει το θεώρημα που μας ενδιαφέρει. Τυπικά παραδείγματα είναι το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου και το Θεώρημα Schröder-Bernstein, που δεν αναφέρονται (ρητά) σε αναδρομή, επαγωγή ή καν συναρτήσεις στο $\mathbb{N}$, αλλά των οποίων οι αποδείξεις οπωσδήποτε χρησιμοποιούν αυτές τις έννοιες. Στηρίξαμε την απόδειξη του Θεωρήματος Αναδρομής **5.6** κατευθείαν στο Αξίωμα Επαγωγής των φυσικών αριθμών, αλλά το θεμελιακό γεγονός —που επιδέχεται γενίκευση—

$$\square \quad \circ \quad \circ \quad \cdots \qquad \blacksquare \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \qquad \blacksquare \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \qquad \cdots$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.1**. Η αρχή ενός καλά διατεταγμένου χώρου.

είναι ότι το $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο με τη συνηθισμένη του διάταξη. Εδώ θα γενικεύσουμε το **5.6** στο πολύ ισχυρότερο ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΕΡΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΑΝΑΔΡΟΜΗΣ **7.24**, που δικαιολογεί *αναδρομικούς ορισμούς* συναρτήσεων $f : U \to E$ με πεδίο ορισμού έναν οποιονδήποτε καλά διατεταγμένο χώρο $U$. Μαζί με το ΘΕΩΡΗΜΑ HARTOGS **7.34** που εγγυάται την ύπαρξη χώρων «οσονδήποτε μεγάλου μήκους», το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής επιτρέπει την αναφορά στη βασική ιδέα (7-1) σε περιστάσεις πολύ μακριά από τους φυσικούς αριθμούς. Τυπική εφαρμογή είναι το ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ **7.35** και το πόρισμά του, το ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ **7.36**, που είναι απλώς το **6.21** χωρίς την υπόθεση της αριθμήσιμης συνέχειας.

**7.2.** Το σύνολο $A$ είναι **καλά διατάξιμο** (well orderable) αν υπάρχει καλή διάταξη $\leq$ του $A$, δηλαδή αν το $A$ είναι το πεδίο κάποιου καλά διατεταγμένου χώρου $(A, \leq)$. Ένα από τα κύρια συμπεράσματα αυτού του κεφαλαίου είναι ότι τα καλά διατάξιμα σύνολα συμπεριφέρονται καλύτερα από τυχαία σύνολα: για παράδειγμα είναι συγκρίσιμα ανά δύο ως προς το πλήθος, είτε $A \leq_c B$ ή $B \leq_c A$. Η αλήθεια είναι ότι *όλα τα σύνολα είναι καλά διατάξιμα*. Αυτό το απέδειξε ο Zermelo το 1904, λύνοντας με μία μεγαλοφυή κίνηση το πρόβλημα Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και μια σειρά συγγενών προβλημάτων ομαλότητας για όλα τα σύνολα. Θα αποδείξουμε το Θεώρημα Καλής Διάταξης του Zermelo στο επόμενο κεφάλαιο, αφού εισαγάγουμε πρώτα το Αξίωμα Επιλογής στο οποίο στηρίζεται. Πάντως το μαθηματικό περιεχόμενο του διάσημου αυτού θεωρήματος είναι το άθροισμα των Θεωρημάτων της Υπερπεπερασμένης Αναδρομής και του Hartogs: το Αξίωμα Επιλογής απλώς μας επιτρέπει την ένωση αυτών των δύο.

**7.3. Άσκηση.** *Αν το $C$ είναι καλά διατάξιμο και $A \leq_c C$, τότε και το $A$ είναι καλά διατάξιμο.*

**7.4. Άσκηση.** *Αν το $C$ είναι καλά διατάξιμο και υπάρχει κάποιος επιμορφισμός $f : C \twoheadrightarrow A$, τότε $A \leq_c C$ και επομένως το $A$ είναι επίσης καλά διατάξιμο.*

**7.5. Επόμενα και οριακά σημεία.** Κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $U$ μοιάζει με αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ στην αρχή του. Αν δεν είναι κενός, πρέπει να έχει ελάχιστο σημείο που τυπικά το συμβολίζουμε 0 αντί για $\perp$,

$$0 = 0_U =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο στοιχείο του } U. \tag{7-2}$$

Στο Διάγραμμα **7.1** εικονίζεται μ' ένα άσπρο τετράγωνο. Εκτός από το μέγιστο (που ίσως υπάρχει, συνήθως όχι), κάθε $x \in U$ έχει ένα αμέσως επόμενο σημείο,

$$S(x) = S_U(x) =_{\text{ορ}} \min\{y \in U \mid x < y\}. \tag{7-3}$$

Οι τιμές της μερικής συνάρτησης $S : U \rightharpoonup U$ είναι τα **επόμενα σημεία** (successor points) του $U$. Επιπλέον, ο $U$ μπορεί να έχει **οριακά σημεία** (limit points) που είναι μεγαλύτερα του 0 αλλά όχι επόμενα,

$$\mathrm{Limit}_U(x) \iff_{\text{ορ}} 0 < x \,\&\, (\forall u < x)(\exists v)[u < v < x]. \tag{7-4}$$

Αυτά εικονίζονται με μαύρα τετράγωνα στο Διάγραμμα **7.1**. Το πρώτο οριακό σημείο του $U$ συνήθως συμβολίζεται

$$\omega = \omega_U =_{\text{ορ}} \min\{x \in U \mid \mathrm{Limit}(x)\}, \tag{7-5}$$

αν υπάρχει, τα σημεία πριν από το $\omega$ είναι τα **πεπερασμένα σημεία** του $U$ και τα σημεία που έπονται του $\omega$ (μαζί με το $\omega$) είναι τα **άπειρα σημεία** του $U$. Αν ο χώρος $U$ είναι άπειρος, τότε η συνάρτηση $\pi : \mathbb{N} \rightarrowtail U$ που ορίζεται με την αναδρομή

$$\begin{aligned} \pi(0) &= 0_U = \text{ το ελάχιστο μέλος του } U, \\ \pi(n+1) &= S_U(\pi(n)), \end{aligned} \tag{7-6}$$

μας δίνει μια αντιστοιχία των φυσικών αριθμών με τα πεπερασμένα σημεία του $U$ που σέβεται τις διατάξεις.

**7.6. Άσκηση.** *Για κάθε υποσύνολο $I \subseteq U$ καλά διατεταγμένου χώρου $U$, ο περιορισμός*

$$x \le_I y \iff_{\text{ορ}} x \le_U y \,\&\, x, y \in I$$

*της $\le_U$ στο $I$ είναι καλή διάταξη, έτσι που το $I$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος ως «υποχώρος» του $U$.*

**7.7. Ορισμός.** Ο καλά διατεταγμένος χώρος $U$ είναι **αρχικό τμήμα** (initial segment) του $V$, αν το πεδίο του $\mathrm{Field}(U)$ είναι κλειστό προς τα κάτω υποσύνολο του $\mathrm{Field}(V)$ και η $\le_U$ είναι ο περιορισμός της $\le_V$ στο $\mathrm{Field}(U)$:

$$\begin{aligned} U \sqsubseteq V \iff_{\text{ορ}} \;& \mathrm{Field}(U) \subseteq \mathrm{Field}(V) \\ & \&\, (\forall x, y \in \mathrm{Field}(U))[x \le_U y \iff x \le_V y] \\ & \&\, (\forall y \in \mathrm{Field}(U))(\forall x \le_V y)[x \in \mathrm{Field}(U)]. \end{aligned} \tag{7-7}$$

Προφανώς ο $V$ είναι αρχικό τμήμα του εαυτού του, το **τετριμμένο** αρχικό τμήμα. Σε κάθε $y \in V$ αντιστοιχίζουμε το **γνήσιο αρχικό τμήμα** των σημείων αυστηρά κάτω του $y$,

$$\mathbf{seg}(y) = \mathbf{seg}_V(y) =_{\text{ορ}} \{x \in V \mid x <_V y\} \subsetneq V. \tag{7-8}$$

Σχολαστικά, αυτό είναι το πεδίο του $\mathbf{seg}(y)$, αλλά η διάταξή του καθορίζεται απ' αυτήν του $V$ και θα αναφερόμαστε στα αρχικά τμήματα, ως συνήθως, σαν να ήταν απλά σύνολα.

**7.8. Άσκηση.** *Αν το 0 είναι το ελάχιστο του χώρου $U$, τότε $\mathbf{seg}(0) = \emptyset$, και αν το $x \in U$ έχει επόμενο, τότε*

$$\mathbf{seg}(S(x)) = \mathbf{seg}(x) \cup \{x\}.$$

**7.9. Πρόταση.** *Το σύνολο $I$ είναι αρχικό τμήμα του χώρου $U$ τότε και μόνον αν $I = U$, ή για κάποιο $x \in U$, $I = \mathbf{seg}(x)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $I \subsetneqq U$, έστω $x = \min(U \setminus I)$, έτσι ώστε αμέσως

$$y \in \mathbf{seg}(x) \Longrightarrow y < x \Longrightarrow y \in I,$$

και αρκεί να δείξουμε

$$y \in I \Longrightarrow y < x$$

για να συμπεράνουμε ότι $I = \mathbf{seg}(x)$. Προς απαγωγή σε άτοπο, αν υπάρχει $y \in I$ τέτοιο που $y \not< x$, τότε $x \leq y$, άρα $x \in I$ αφού το $I$ είναι κλειστό προς τα κάτω, που αντιτίθεται στην επιλογή του $x$. Το αντίστροφο είναι τετριμμένο. ⊣

**7.10. Άσκηση.** *Η οικογένεια των αρχικών τμημάτων ενός καλά διατεταγμένου χώρου είναι καλά διατεταγμένη από τη σχέση* $\sqsubseteq$.

Η γενική ιδέα είναι να θεωρήσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$ ως γενίκευση της αριθμοσειράς $0, 1, 2, \dots$, πιθανόν μικρότερη ή ίση σε μήκος με το $\mathbb{N}$, τυπικά πολύ μακρύτερη. Τα συγκεκριμένα στοιχεία του $U$ είναι άνευ σημασίας: το *μήκος* της ακολουθίας είναι αυτό που μας ενδιαφέρει. Εισάγουμε εδώ τη γενική έννοια ισομορφισμού που συσχετίζει μερικά διατεταγμένους χώρους με το ίδιο *σχήμα*, όπου το σχήμα ενός καλά διατεταγμένου χώρου είναι απλώς το «μήκος» του.

**7.11. Ορισμός.** Μια συνάρτηση $\pi : P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο σε έναν άλλο **σέβεται τις διατάξεις** (is order preserving) αν για όλα τα $x, y \in P$,

$$x \leq_P y \iff \pi(x) \leq_Q \pi(y).$$

**Ομοιότητα** (similarity) από το $P$ στο $Q$ είναι μια αντιστοιχία $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q$ που σέβεται τις διατάξεις, και αν υπάρχει τέτοια ομοιότητα καλούμε τους $P$ και $Q$ **όμοιους** (similar), **ισομορφικούς** ή **αμοιβαία αντίγραφα** και γράφουμε

$$P =_o Q \iff_{\text{ορ}} (\exists \pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q)[\text{η } \pi \text{ είναι ομοιότητα}].$$

Παρατηρήστε ότι όπως πάντα για δομημένα σύνολα, γράφουμε $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q$ για ομοιότητες αντί για το σχολαστικότερο $\pi : \mathrm{Field}(P) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{Field}(Q)$.

**7.12. Άσκηση.** *Κάθε συνάρτηση $\pi : P \to Q$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο σε κάποιον άλλο που σέβεται τις διατάξεις είναι μονοτονική· αλλά υπάρχουν μονοτονικές συναρτήσεις που δεν σέβονται τις διατάξεις.*

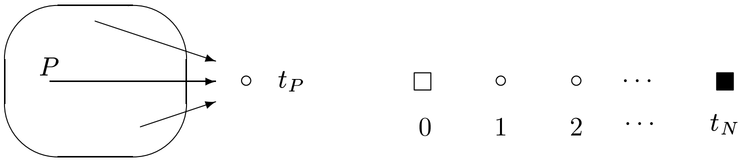
**7.13. Άσκηση.** *Η συνάρτηση $f : P \to Q$ σε γραμμικά διατεταγμένους χώρους $P$ και $Q$ σέβεται τις διατάξεις τότε και μόνον αν είναι* **αυστηρά μονοτονική**, *δηλαδή αν*

$$x <_P y \Longrightarrow f(x) <_Q f(y)\cdot$$

*έπεται ότι κάθε συνάρτηση σε καλά διατεταγμένους χώρους που σέβεται τις διατάξεις είναι αυστηρά μονοτονική, και επομένως μονομορφισμός.*

**7.14. Άσκηση.** *Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους $P$, $Q$, $R$,*

$$P =_o P,$$
$$P =_o Q \Longrightarrow Q =_o P,$$
$$P =_o Q \,\&\, Q =_o R \Longrightarrow P =_o R.$$




Διάγραμμα **7.2**. Ο επόμενος χώρος του $P$ και ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$.

**7.15. Λήμμα.** *Κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $P$ που είναι όμοιος με έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$, είναι και ο ίδιος καλά διατεταγμένος.*

Απόδειξη. Αν $\emptyset \neq X \subseteq P$ και το $p \in U$ είναι το $\leq_U$-ελάχιστο μέλος της εικόνας $\pi[X]$, τότε (εύκολα) το $x = \pi^{-1}(p)$ είναι το $\leq_P$-ελάχιστο του $X$, επειδή η $\pi$ σέβεται τις διατάξεις. ⊣

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε καλά διατεταγμένους χώρους αρκετά μεγάλου μήκους, αρχίζοντας με τον $\mathbb{N}$ και τα πεπερασμένα του αρχικά τμήματα και εφαρμόζοντας μερικούς φυσικούς τελεστές πάνω στους μερικά διατεταγμένους χώρους, που δίνουν καλά διατεταγμένα αποτελέσματα σε καλά διατεταγμένες τιμές των μεταβλητών τους. Θεωρούμε εδώ μόνο έναν απλό και χαρακτηριστικό τέτοιο τελεστή, και αφήνουμε τους άλλους για τα προβλήματα.

**7.16.** Ο **επόμενος** $\mathrm{Succ}(P)$ μερικά διατεταγμένου χώρου $P$ κατασκευάζεται προσθέτοντας ένα καινούριο σημείο πάνω απ' όλα τα σημεία του $P$. Συγκεκριμένα, μπορούμε να προσθέσουμε στο πεδίο του $P$ το αντικείμενο

$$t_P =_{\text{ορ}} \mathbf{r}(\mathrm{Field}(P)) \tag{7-9}$$

που δεν ανήκει στο $\mathrm{Field}(P)$ σύμφωνα με το **3.11**, και ορίζουμε

$$x \leq_{\mathrm{Succ}(P)} y \iff_{\text{ορ}} x \leq_P y \vee [x \in P \,\&\, y = t_P] \vee x = y = t_P. \tag{7-10}$$

Αν το $P$ είναι πεπερασμένο με $n$ σημεία, τότε το $\mathrm{Succ}(P)$ έχει $n+1$ σημεία, και μάλιστα (εύκολα) $\mathrm{Succ}([0,n)) =_o [0,(n+1))$. Από την άλλη μεριά, ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$ είναι άπειρος, απαριθμητός αλλά «μακρύτερος» του $\mathbb{N}$, έχει μέγιστο σημείο αμέσως επάνω απ' όλους τους φυσικούς αριθμούς.

**7.17. Άσκηση.** *Αν $P =_o Q$, τότε $\mathrm{Succ}(P) =_o \mathrm{Succ}(Q)$.*

**7.18. Άσκηση.** *Ο επόμενος $\mathrm{Succ}(U)$ κάθε καλά διατεταγμένου χώρου $U$ είναι καλά διατεταγμένος.*

Μ' αυτό τον τελεστή του επόμενου, μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε καλά διατεταγμένο χώρο ως αρχικό τμήμα κάποιου άλλου,

$$U = \mathbf{seg}_{\mathrm{Succ}(U)}(t_U) \subsetneq \mathrm{Succ}(U). \tag{7-11}$$

**7.19. Ορισμός.** Μια απεικόνιση $\pi : P \to P$ από ένα μερικά διατεταγμένο χώρο στον εαυτό του άλλο είναι **επεκτατική** (expansive), αν για κάθε $x \in P$, $x \leq \pi(x)$.

**7.20. Θεώρημα.** *Κάθε μονομορφισμός $\pi : U \rightarrowtail U$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο στον εαυτό του που σέβεται τη διάταξη είναι επεκτατικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $\pi : U \rightarrowtail U$ μονομορφισμός που σέβεται τη διάταξη, αλλά για κάποιο $x \in U$, $\pi(x) < x$, και έστω

$$x^* = \min\{x \in U \mid \pi(x) < x\}.$$

Συνάγουμε ότι $\pi(x^*) < x^*$, άρα $\pi(\pi(x^*)) < \pi(x^*)$ αφού ο μονομορφισμός $\pi$ σέβεται τη διάταξη, και αυτό αντικρούει την επιλογή του $x^*$. ⊣

**7.21. Πόρισμα.** *Κανείς καλά διατεταγμένος χώρος δεν είναι όμοιος με κάποιο από τα γνήσια αρχικά του τμήματα, και επομένως διαφορετικά αρχικά τμήματα του ίδιου χώρου δεν είναι ποτέ όμοια.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Κάθε ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathbf{seg}(x)$ είναι μονομορφισμός από το $U$ στο $U$ που σέβεται τη διάταξη, και επομένως δεν μπορεί να ισχύει η $\pi(x) < x$, από το Θεώρημα. ⊣

Επειδή καλά διατεταγμένοι χώροι μπορεί να έχουν οριακά σημεία εκτός του 0 και των επόμενων, είναι ευκολότερο να γενικεύσουμε σ' αυτούς τις αρχές απόδειξης με *πλήρη επαγωγή* και ορισμού με *πλήρη αναδρομή.*

**7.22. Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Επαγωγής**. *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$ και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη $P$,*

$$\textit{αν} \ \ (\forall y \in U)[(\forall x < y)P(x) \Longrightarrow P(y)] \ \ \textit{τότε} \ \ (\forall y \in U)P(y).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε την άρνηση του θεωρήματος και θέτουμε

$$y^* =_{\mathsf{op}} \min\{y \in U \mid (\forall x < y)P(x) \,\&\, \neg P(y)\};$$

η υπόθεση συνεπάγεται $P(y^*)$, που αντιτίθεται στην επιλογή του $y^*$. ⊣

Σε πολλές εφαρμογές είναι εξίσου εύκολο να αποδείξουμε $(\forall y \in U)P(y)$ με απαγωγή σε άτοπο, κατευθείαν, επαναλαμβάνοντας στην ουσία το επιχείρημα του **7.22**. Εξαρτάται από τη δομή της πρότασης που θέλουμε να αποδείξουμε και πόσο μας ενοχλούν οι λογικοί υπολογισμοί με αρνητικές προτάσεις. Θα δώσουμε παραδείγματα και των δύο μεθόδων. Παρατηρήστε ότι ο τερατώδης (αλλά καθιερωμένος) όρος «υπερπεπερασμένη» χρησιμοποιείται επειδή ο $U$ μπορεί να είναι μακρύτερος του $\mathbb{N}$, αλλά το Θεώρημα βεβαίως ισχύει επίσης όταν ο $U$ είναι πεπερασμένος ή όμοιος με τον $\mathbb{N}$.

Το επόμενο λήμμα είναι το κλειδί για την απόδειξη του θεμελιακού θεωρήματος που το ακολουθεί.

**7.23. Λήμμα.** *Έστω $U$ καλά διατεταγμένος χώρος και $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$ συνάρτηση που αντιστοιχίζει σε κάθε μερική συνάρτηση από το $U$ στο $E$ και σε κάθε στοιχείο του $U$ ένα στοιχείο του $E$. Για κάθε $t \in U$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση*

$$\sigma_t : \mathbf{seg}(t) \to E$$

*που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$\sigma_t(x) = h(\sigma_t \restriction \mathbf{seg}(x), x) \quad (x < t). \tag{7-12}$$

Αποδειξη. Με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή, δεχόμαστε ότι για κάθε $u < t$ υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\sigma_u : \mathbf{seg}(u) \to E$ τέτοια ώστε

$$\sigma_u(x) = h(\sigma_u \restriction \mathbf{seg}(x), x) \quad (x < u). \tag{7-13}$$

Η επαγωγική υπόθεση δεν προσφέρει τίποτε αν $t = 0_U$ είναι το ελάχιστο του $U$, αλλά σ' αυτή την περίπτωση το συμπέρασμα είναι τετριμμένο, θέτοντας $\sigma_0 = \emptyset$. Αν $t = Sv$ είναι επόμενο στοιχείο στον $U$, θέτουμε

$$\sigma_t = \sigma_v \cup \{(v, h(\sigma_v, v))\}.$$

Τώρα η (7-13) ισχύει για κάθε $x < v$ από την επαγωγική υπόθεση και επίσης ισχύει για το $x = v$ από τον ορισμό. Για την τελευταία περίπτωση όπου το $t$ είναι οριακό στοιχείο, χρειαζόμαστε ένα

**Υπολήμμα**. *Το σύνολο συναρτήσεων $\{\sigma_u \mid u < t\}$ είναι αλυσίδα στη σχέση $\subseteq$, δηλαδή*

$$x < u < v < t \Longrightarrow \sigma_u(x) = \sigma_v(x). \tag{7-14}$$

*Απόδειξη*. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $x$ ελάχιστο τέτοιο ώστε να μην ισχύει η (7-14) για κάποια $u < v < t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sigma_u \restriction \mathbf{seg}(x) = \sigma_v \restriction \mathbf{seg}(x),$$

και επομένως, από τη βασική ταυτότητα που ικανοποιούν οι $\sigma_u$, $\sigma_v$,

$$\begin{aligned} \sigma_u(x) &= h(\sigma_u \restriction \mathbf{seg}(x), x) \\ &= h(\sigma_v \restriction \mathbf{seg}(x), x) \\ &= \sigma_v(x), \end{aligned}$$

που αντικρούει την υπόθεση για το $x$. ⊣ (Υπολήμμα)

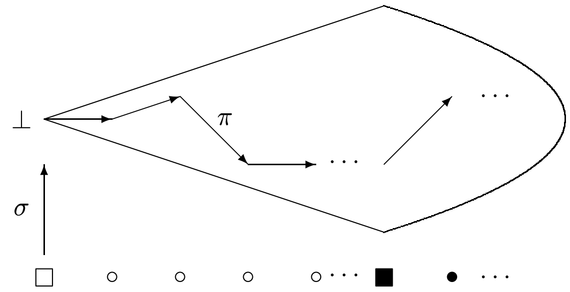
Θέτουμε τώρα

$$\sigma_t = \bigcup \{\sigma_u \mid u < t\}\cdot$$

η $\sigma_t$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}(t)$ από το Υπολήμμα, και ικανοποιεί την (7-12), αφού για κάθε $x < t$,

$$\begin{aligned} \sigma_t(x) &= \sigma_u(x) && \text{για κάποιο } u \text{ όπου } x < u < t, \\ &= h(\sigma_u \restriction \mathbf{seg}(x), x) && \text{από την επαγωγική υπόθεση, αφού } u < t, \\ &= h(\sigma_t \restriction \mathbf{seg}(x), x) && \text{επειδή } \sigma_u \restriction \mathbf{seg}(x) = \sigma_t \restriction \mathbf{seg}(x) \\ & && \text{από τον ορισμό του } \sigma_t. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει την ύπαρξη της $\sigma_t$, και η μοναδικότητά της είναι προφανής με Υπερπεπερασμένη Επαγωγή, από την (7-12). ⊣




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.3**. Υπερπεπερασμένη τροχιά επεκτατικής απεικόνισης.

**7.24. Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής.** *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$ και κάθε συνάρτηση $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : U \to E$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$f(x) = h(f \upharpoonright \mathbf{seg}(x), x) \quad (x \in U). \tag{7-15}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathrm{Succ}(U)$ ο επόμενος χώρος του $U$, με το σημείο $t = t_U$ στην κορυφή, ακριβώς πάνω απ' όλα τα σημεία του $U$. Ορίζουμε την επέκταση $h' : (\mathrm{Succ}(U) \rightharpoonup E) \times \mathrm{Succ}(U) \to E$ του $h$, με

$$h'(\sigma, x) = \begin{cases} h(\sigma \upharpoonright U, x), & \text{αν } x \in U, \\ e^*, & \text{διαφορετικά, δηλαδή αν } x = t, \end{cases}$$

όπου το $e^*$ είναι κάποιο στοιχείο του $E$, άνευ σημασίας. Η συνάρτηση $h'$ έχει το κατάλληλο πεδίο ορισμού για να εφαρμόσουμε το Λημμα στο χώρο $\mathrm{Succ}(U)$ και στην ίδια, διότι $\mathbf{seg}_{\mathrm{Succ}(U)}(t) = U$. Αυτό μας δίνει για το σημείο $t$ στην κορυφή, ακριβώς μία συνάρτηση $f = \sigma_t : U \to E$ που ικανοποιεί την (7-12) για κάθε $x \in U$. ⊣

Ίσως η απλούστερη, μη τετριμμένη εφαρμογή Υπερπεπερασμένης Αναδρομής να είναι η κατασκευή υπερπεπερασμένων τροχιών για απεικονίσεις ενός επαγωγικού μερικά διατεταγμένου χώρου στον εαυτό του. Θεωρούμε πρώτα τη βασική περίπτωση μιας *επεκτατικής* απεικόνισης, κατά τον ορισμό **7.19**. Οι επεκτατικές απεικονίσεις σχετίζονται με τις μονοτονικές που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά οι δύο έννοιες δεν συμπίπτουν. Η σταθερή απεικόνιση $(X \mapsto \emptyset)$ στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ π.χ. είναι προφανώς μονοτονική αλλά όχι επεκτατική, ενώ η

$$\pi(X) = \begin{cases} X \cup \{1\} & \text{αν } 0 \in X, \\ X \cup \{2\} & \text{αν } 0 \notin X \end{cases}$$

είναι επεκτατική αλλά (εύκολα) όχι μονοτονική. Παρ' όλα αυτά, αποτελέσματα για επεκτατικές απεικονίσεις συχνά μεταφράζονται σε συγγενή αποτελέσματα για μονοτονικές απεικονίσεις.

**7.25. Λήμμα Επανάληψης.** *Έστω $\pi : P \to P$ επεκτατική απεικόνιση κάποιου επαγωγικού χώρου, και έστω $U$ καλά διατεταγμένος χώρος. Υπάρχει ακριβώς* *μία συνάρτηση $\sigma : U \to P$ με τις εξής ιδιότητες:*

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= \bot, \\ \text{αν } x = S(y), \text{ τότε } \sigma(x) &= \pi(\sigma(y)), \\ \text{αν } \mathrm{Limit}(x), \text{ τότε } \sigma(x) &= \sup_P \{\sigma(y) \mid y < x\}. \end{aligned} \tag{7-16}$$

*Επιπλέον, αυτή η $\sigma$ είναι μονοτονική από τον $U$ στον $P$, δηλαδή*

$$x \leq y \Longrightarrow \sigma(x) \leq_P \sigma(y). \tag{7-17}$$

Αποδειξη. Οι ιδιότητες στην **7-16** σχεδόν αποτελούν ορισμό της $\sigma$ με υπερπεπερασμένη αναδρομή, μόνο που η οριακή περίπτωση δεν έχει νόημα αν το σύνολο $\{\sigma(y) \mid y < x\}$ δεν είναι αλυσίδα στο $P$. Για να καλύψουμε αυτό το ενδεχόμενο, ορίζουμε την $\sigma$ με την εξής εφαρμογή του Θεωρήματος **7.24**:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \bot, & \text{αν } x = 0, \\ \pi(\sigma(y)), & \text{αν } x = S(y) \text{ για κάποιο } y, \\ \sup_P \{\sigma(y) \mid y < x\}, & \text{if } \mathrm{Limit}(x) \\ & \quad \& \, (\forall x_1 < x_2 < x)[\sigma(x_1) \leq_P \sigma(x_2)], \\ \bot, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$$

όπου $\leq \, = \, \leq_U$ είναι η καλή διάταξη του $U$, όπως και στη διατύπωση του θεωρήματος.

**Υπολήμμα**. *Για κάθε $x \in U$,*

$$x_1 < x_2 \leq x \Longrightarrow \sigma(x_1) \leq_P \sigma(x_2). \tag{7-18}$$

*Απόδειξη*. Δεχόμενοι την άρνηση προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $x$ το ελάχιστο στον $U$ για το οποίο η (7-18) δεν ισχύει. Αφού η (7-18) αληθεύει τετριμμένα όταν $x = 0$ είναι το ελάχιστο του $U$, υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις που πρέπει να εξετάσουμε.

Περιπτωση 1. $x = S(y)$ είναι επόμενο σημείο. Έστω $x_1 < x_2 \leq x$. Αν $x_2 \leq y$, τότε $\sigma(x_1) \leq_P \sigma(x_2)$ από την επιλογή του $x$. Το μόνο άλλο ενδεχόμενο είναι ότι $x_2 = x$, αλλά τότε $\sigma(x_1) \leq_P \sigma(y)$ από την επιλογή του $x$ πάλι, και $\sigma(y) \leq \pi(\sigma(y)) = \sigma(x)$ από την επεκτατικότητα της $\pi$. Επομένως η (7-18) ισχύει για το $x$, που είναι άτοπο.

Περιπτωση 2. Το $x$ είναι οριακό. Από την επιλογή του $x$,

$$x_1 < x_2 < x \Longrightarrow \sigma(x_1) \leq \sigma(x_2), \tag{7-19}$$

έτσι ώστε για να φτάσουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$x_1 < x \Longrightarrow \sigma(x_1) \leq_P \sigma(x).$$

Αυτό ισχύει επειδή από τη συνεπαγωγή (7-19) και τον ορισμό της $\sigma$, έπεται αμέσως ότι $\sigma(x) = \sup_P \{\sigma(y) \mid y < x\}$. ⊣ (Υπολήμμα)

Το αποτέλεσμα συνάγεται από το Υπολήμμα, που ειδικότερα δείχνει ότι η περίπτωση «αλλιώς» δεν ανακύπτει στον υπολογισμό της $\sigma$ από τον ορισμό της. ⊣

Η υπερπεπερασμένη τροχιά $\sigma : U \to P$ της απεικόνισης $\pi : P \to P$ που εγγυάται το Λήμμα Επανάληψης είναι προφανώς επέκταση της τροχιάς $(n \mapsto x_n)$ που ορίσαμε στην απόδειξη του Συνεχούς Θεωρήματος Ελάχιστου Σταθερού

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\square_1 & \circ_1 & \circ_1 & \cdots & \blacksquare_1 & \bullet_1 & \bullet_1 & \cdots & \blacksquare_1 & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \\
\square_2 & \circ_2 & \circ_2 & \cdots & \blacksquare_2 & \bullet_2 & \bullet_2 & \cdots & \blacksquare_2 & \bullet_2 & \bullet_2 & \cdots
\end{array}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.4**. Πορτρέτο αρχικής ομοιότητας.

Σημείου **6.21**, τουλάχιστον αν ο χώρος $U$ είναι μακρύτερος του $\mathbb{N}$. Είναι ένα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε στην απόδειξη του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου, ως εξής:

**7.26. Προσχέδιο απόδειξης**. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον επαγωγικό χώρο $P$, μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$ τέτοιον ώστε *να μην υπάρχει μονομορφισμός* $\sigma : U \rightarrowtail P$. Ειδικότερα, η υπερπεπερασμένη τροχιά $\sigma : U \to P$ του Λήμματος **7.25** δεν μπορεί να είναι μονομορφισμός, και επομένως υπάρχουν $x < y$ τέτοια ώστε $\sigma(x) = \sigma(y)$. Η μονοτονικότητα της $\sigma$ συνεπάγεται ότι

$$x \leq u \leq y \Longrightarrow \sigma(x) = \sigma(u),$$

το $x$ έχει επόμενο αφού δεν είναι το μέγιστο του $U$, $x < S(x) \leq y$, και επομένως

$$\sigma(x) = \sigma(Sx) = \pi(\sigma(x)).$$

Με άλλα λόγια, το σημείο $\sigma(x)$ είναι σταθερό σημείο της $\pi$.

Έτσι, για ν' αποδείξουμε ότι κάθε επεκτατική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο έχει σταθερό σημείο, αρκεί να δείξουμε ότι *για κάθε σύνολο $P$, υπάρχει κάποιος καλά διατεταγμένος χώρος $U$ που δεν μπορεί να εμφυτευτεί ένα-προς-ένα στον $P$*. Αυτό είναι ακριβώς το Θεώρημα Hartogs που είναι ο επόμενός μας στόχος. Για να το αποδείξουμε, πρέπει να μελετήσουμε πρώτα το πρόβλημα συγκρισιμότητας καλά διατεταγμένων χώρων ως προς το μήκος.

Η εικόνα του τυπικού καλά διατεταγμένου χώρου στο Διάγραμμα **7.1** υποδείχνει ότι πρέπει να μπορούμε να συγκρίνουμε δύο χώρους, να τους «ξαπλώσουμε» τον ένα δίπλα στον άλλο, το ελάχιστο $0_U$ του πρώτου αντικριστά στο ελάχιστο $0_V$ του άλλου, το επόμενο $S_U(0_U)$ αντικριστά με το επόμενο $S_V(0_V)$, το πρώτο οριακό σημείο $\omega_U$ του πρώτου (αν υπάρχει) αντικριστά με το $\omega_V$ κ.λπ. μέχρις ότου εξαντλήσουμε όλα τα σημεία του $U$ ή του $V$. Η αυστηρή απόδοση αυτής της ιδέας είναι γενίκευση του Θεωρήματος Μοναδικότητας των φυσικών αριθμών **5.4**.

**7.27. Ορισμός. Αρχική ομοιότητα** (initial similarity)

$$\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$$

ενός καλά διατεταγμένου χώρου με κάποιον άλλο είναι μια οποιαδήποτε ομοιότητα του $U$ με κάποιο αρχικό τμήμα του $V$. Αν υπάρχει τέτοια αρχική ομοιότητα, καλούμε τον $U$ **μικρότερο-ίσο σε μήκος** του $V$, συμβολικά:

$$U \leq_o V \iff_{\text{ορ}} (\exists I \sqsubseteq V)[U =_o I]. \tag{7-20}$$

Επίσης γράφουμε,

$$U <_o V \iff_{\text{ορ}} U \leq_o V \,\&\, U \neq_o V. \tag{7-21}$$

Από το **7.9**, κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$ είναι ομοιότητα είτε με το $V$ είτε με ένα γνήσιο αρχικό τμήμα του $V$, άρα

$$U <_o V \iff (\exists x \in V)[U =_o \mathbf{seg}_V(x)]. \tag{7-22}$$

**7.28. Άσκηση.** *Αν οι $\pi : U \rightarrowtail V$ και $\rho : V \rightarrowtail W$ είναι αρχικές ομοιότητες, τότε και η σύνθεσή τους $\rho\pi : U \rightarrowtail W$ είναι αρχική ομοιότητα.*

**7.29. Πρόταση.** *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους $U, V, W$,*

$$U \leq_o U,$$
$$\text{αν } [U \leq_o V \,\&\, V \leq_o W], \text{ τότε } U \leq_o W,$$
$$\text{αν } [U \leq_o V \,\&\, V \leq_o U], \text{ τότε } U =_o V.$$

Αποδειξη. Μόνο η τρίτη συνεπαγωγή χρειάζεται απόδειξη, και αυτή συνάγεται εύκολα από το **7.21**, ως εξής: Η σύνθεση $\rho\pi$ των αρχικών ομοιοτήτων $\pi : U \rightarrowtail V$, $\rho : V \rightarrowtail U$ που φανερώνουν την υπόθεση, είναι αρχική ομοιότητα $\rho\pi : U \rightarrowtail U$, κι αν δεν ήταν επιμορφισμός, θα φανέρωνε ότι ο $U$ είναι όμοιος με ένα γνήσιο αρχικό του τμήμα, που είναι αδύνατο· άρα η $\rho\pi$ είναι αντιστοιχία, και επομένως η $\pi$ είναι επίσης αντιστοιχία. ⊣

**7.30. Θεώρημα.** *Η συνάρτηση $\pi : U \to V$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο σε κάποιον άλλο είναι αρχική ομοιότητα, τότε και μόνον αν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$\pi(x) = \min_V \{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\}. \tag{7-23}$$

Αποδειξη. Κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$ είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις, άρα

$$(\forall u <_U x)[\pi(u) <_V \pi(x)], \tag{7-24}$$

και επομένως

$$z = \min_V \{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\} \leq_V \pi(x).$$

Εφόσον η $\pi$ είναι αρχική και $z \leq_V \pi(x)$, υπάρχει κάποιο $u \in U$ τέτοιο ώστε $\pi(u) = z$. Αν δεχτούμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $z = \pi(u) <_V \pi(x)$, συμπεραίνουμε αμέσως ότι $u <_U x$ επειδή η $\pi$ είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις· επομένως $\pi(u) <_V z$ από τον ορισμό του $z$, που είναι άτοπο επειδή $z = \pi(u)$.

Αντιστρόφως, αν η $\pi : U \to V$ ικανοποιεί την (7-23), τότε σέβεται τις διατάξεις, αφού από την (7-23), $u <_U x \Longrightarrow \pi(u) <_V \pi(x)$. Δεχόμαστε προς απαγωγή σε άτοπο ότι η εικόνα $\pi[U]$ δεν είναι αρχικό τμήμα του $V$ και επιλέγουμε το $x$ ελάχιστο στο $U$ τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο $y <_V \pi(x)$, $y \notin \pi[U]$. Από την επιλογή του $x$, $\pi[\mathbf{seg}_U(x)] \sqsubseteq V$ και αυτό το αρχικό τμήμα είναι γνήσιο επειδή δεν περιέχει το $y$. Άρα για κάποιο $z \in V$, $\pi[\mathbf{seg}_U(x)] = \mathbf{seg}_V(z)$, και από την (7-23), $\pi(x) = z$. Συνάγεται ότι $y <_V z$ και $y \in \mathbf{seg}_V(z) = \pi[\mathbf{seg}_U(x)]$, που είναι άτοπο. ⊣

**7.31. Θεώρημα (Συγκρισιμότητα καλά διατεταγμένων χώρων).** *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους $U$, $V$, είτε $U \leq_o V$ ή $V \leq_o U$.*

Αποδειξη. Το θεώρημα είναι τετριμμένο αν $V = \emptyset$, συνεπώς δεχόμαστε ότι το ελάχιστο $0_V$ υπάρχει. Από το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής **7.24** υπάρχει συνάρτηση $\pi : U \to V$ που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\pi(x) = \begin{cases} \min_V\{y \in V \mid (\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y]\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{αν } (\exists y \in V)(\forall u <_U x)[\pi(u) <_V y], \\ 0_V, \text{ αλλιώς.} \end{cases} \tag{7-25}$$

Σχολαστικά, εδώ εφαρμόζουμε το Θεώρημα **7.24** στην απεικόνιση $h : (U \rightharpoonup E) \times U \to E$, ορισμένη με τον τύπο

$$h(p, x) = \begin{cases} \min_V\{y \in V \mid (\forall u <_U x)[p(u) <_V y]\}, \\ \qquad\qquad\qquad \text{αν } (\exists y \in V)(\forall u <_U x)[p(u) <_V y], \\ 0_V, \text{ αλλιώς.} \end{cases}$$

Ξεχωρίζουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Περιπτωση 1. *Για κάθε $x \neq 0_U$, $\pi(x) \neq 0_V$.* Αυτό σημαίνει ότι η δεύτερη περίπτωση στον ορισμό (7-25) δεν ανακύπτει, άρα η $\pi$ ικανοποιεί την ταυτότητα (7-23) και αναγκαστικά είναι αρχική ομοιότητα από το Θεώρημα **7.30**.

Περιπτωση 2. *Για κάποιο $a \in U, a \neq 0_U$ και $\pi(a) = 0_V$.* Έστω $a$ το ελάχιστο τέτοιο στοιχείο του $U$. Θεωρούμε τον περιορισμό

$$\rho = (\pi \restriction \mathbf{seg}_U(a)) : \mathbf{seg}_U(a) \to V,$$

ο οποίος ικανοποιεί την (7-23), άρα από το Θεώρημα **7.30**, είναι αρχική ομοιότητα από τον $\mathbf{seg}_U(a)$ στον $V$. Ειδικότερα, η εικόνα $\rho[\mathbf{seg}_U(a)] = \pi[\mathbf{seg}_U(a)]$ είναι αρχικό τμήμα του $V$· αν ήταν γνήσιο, τότε $\pi[\mathbf{seg}_U(a)] = \mathbf{seg}_V(z)$ για κάποιο $z \in V$ και από την (7-25), $\pi(a) = z \neq 0_V$, ενάντια στην επιλογή του $a$. Άρα $\pi[\mathbf{seg}_U(a)] = V$. Συνάγεται ότι $V =_o \mathbf{seg}_U(a)$, και επομένως υπάρχει αρχική ομοιότητα από το $V$ στο $U$. ⊣

Το θεμελιακό αυτό θεώρημα έχει πληθώρα πορισμάτων, μερικά από τα οποία αξίζει να διατυπώσουμε αμέσως. Το πρώτο μας δίνει έναν απλό τρόπο να συγκρίνουμε καλά διατεταγμένους χώρους.

**7.32. Πόρισμα.** *Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους $U$, $V$,*

$$U \leq_o V \iff (\exists \pi : U \rightarrowtail V)[\text{η } \pi \text{ σέβεται τις διατάξεις}].$$

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός $\pi : U \rightarrowtail V$ που σέβεται τις διατάξεις, αλλά (προς απαγωγή σε άτοπο), $U \not\leq_o V$, άρα $V <_o U$.

Έπεται ότι $V =_o \mathbf{seg}_U(x)$ για κάποιο $x$ από την (7-22), και επομένως υπάρχει αντιστοιχία $\sigma : V \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{seg}_U(x)$· τώρα η σύνθεση $\rho = \sigma \circ \pi : U \rightarrowtail \mathbf{seg}_U(x)$ είναι μονομορφισμός που σέβεται τις διατάξεις και αντιτίθεται στο **7.20**. $\dashv$

**7.33. Πόρισμα (Καλή θεμελίωση του $\leq_o$).** *Κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων έχει $\leq_o$-ελάχιστο μέλος, δηλαδή για κάποιο $U_0 \in \mathcal{E}$ και όλα τα $U \in \mathcal{E}$, $U_0 \leq_o U$.*

Αποδειξη. Η υπόθεση μας δίνει κάποιο $W \in \mathcal{E}$, και αν αυτός ο $W$ είναι $\leq_o$-ελάχιστος στο $\mathcal{E}$, τελειώσαμε. Αν όχι, τότε η **7.31** συνεπάγεται ότι υπάρχουν καλά διατεταγμένοι χώροι στην κλάση $\mathcal{E}$ που είναι όμοιοι με αρχικά τμήματα του $W$, έτσι που το σύνολο

$$J =_{\text{ορ}} \{x \in W \mid (\exists U \in \mathcal{E})[U =_o \mathbf{seg}_W(x)]\} \tag{7-26}$$

είναι μη κενό και άρα έχει $\leq_W$-ελάχιστο μέλος $x$. Από τον ορισμό του $J$, υπάρχει κάποιος χώρος $U_0 \in \mathcal{E}$ τέτοιος ώστε $U_0 =_o \mathbf{seg}_W(x)$, και ισχυριζόμαστε ότι αυτός ο $U_0$ είναι $\leq_o$-ελάχιστος στο $\mathcal{E}$. Για να το αποδείξουμε, με απαγωγή σε άτοπο, έστω κάποιος $U \in \mathcal{E}$, $U_0 \not\leq_o U$· άρα $U <_o U_0 =_o \mathbf{seg}_W(x)$· άρα $U =_o \mathbf{seg}_W(y)$ για κάποιο $y <_W x$, ενάντια στην επιλογή του $x$. $\dashv$

Στις περισσότερες εφαρμογές αυτού του θεωρήματος η κλάση $\mathcal{E}$ είναι σύνολο, οικογένεια καλά διατεταγμένων χώρων, αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η γενικότητα της διατύπωσης είναι χρήσιμη. Π.χ. υπάρχει $\leq_o$-ελάχιστος καλά διατεταγμένος χώρος που έχει οριακό σημείο—συγκεκριμένα, ο $\mathrm{Succ}(\mathbb{N})$.

Με όλη αυτή την προεργασία δεν έχουμε ακόμη κατασκευάσει αναπαρίθμητους καλά διατεταγμένους χώρους, και δημιουργείται η υποψία ότι όλ' αυτά τα θεωρήματα αφορούν μόνο περίεργα ανακατώματα του $\mathbb{N}$. Το επόμενο δεύτερο θεμελιακό αποτέλεσμα του κεφαλαίου ξεκαθαρίζει την εικόνα.

**7.34. Θεώρημα Hartogs.** *Υπάρχει οριστικός τελεστής $\chi(A)$ που αντιστοιχίζει σε κάθε σύνολο $A$, έναν καλά διατεταγμένο χώρο*

$$\chi(A) = (h(A), \leq_{\chi(A)}),$$

*τέτοιον ώστε $h(A) \not\leq_c A$, δηλαδή δεν υπάρχει μονομορφισμός $\pi : h(A) \rightarrowtail A$. Επιπλέον, ο χώρος $\chi(A)$ είναι ο $\leq_o$-ελάχιστος με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $W$,*

$$\text{αν } \ W \not\leq_c A, \ \text{ τότε } \ \chi(A) \leq_o W. \tag{7-27}$$

Αποδειξη. Θέτουμε πρώτα

$$\mathrm{WO}(A) =_{\text{ορ}} \{U \mid U = (\mathrm{Field}(U), \leq_U) \text{ είναι καλά διατεταγμένος χώρος με } \mathrm{Field}(U) \subseteq A\}, \tag{7-28}$$

Έστω $\sim_A$ ο περιορισμός της οριστικής συνθήκης $=_o$ στο $\mathrm{WO}(A)$,

$$U \sim_A V \iff_{\text{ορ}} U, V \in \mathrm{WO}(A) \,\&\, U =_o V.$$

Προφανώς η $\sim_A$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathrm{WO}(A)$. Θέτουμε

$$h(A) =_{\text{ορ}} [\![\mathrm{WO}(A)/{\sim_A}]\!] \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{WO}(A)), \tag{7-29}$$

και διατάσσουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας στο $h(A)$ από τους «αντιπροσώπους» τους,

$$[U/{\sim_A}] \leq_{\chi(A)} [V/{\sim_A}] \iff_{\text{ορ}} U \leq_o V. \tag{7-30}$$

Αυτό έχει νόημα, επειδή αν

$$[U/{\sim_A}] = [U'/{\sim_A}],\ [V/{\sim_A}] = [V'/{\sim_A}],\ \text{και } U \leq_o V,$$

τότε $U' =_o U \leq_o V =_o V'$. Το γεγονός ότι η $\leq_{\chi(A)}$ είναι καλή διάταξη του $h(A)$ έπεται εύκολα από τις γενικές ιδιότητες της $\leq_o$ και από τα **7.31** και **7.33**. Παίρνοντας την άρνηση των δύο πλευρών της (7-30) συνάγουμε την «αυστηρή» της μορφή,

$$V <_o U \iff [V/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [U/{\sim_A}] \quad (U, V \in \mathrm{WO}(A)). \tag{7-31}$$

Οι βασικές ιδιότητες του τελεστή Hartogs απορρέουν από το εξής

**Λήμμα**. *Για κάθε $\alpha = [U/{\sim_A}] \in h(A)$,*

$$\mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\} =_o U.$$

*Ειδικότερα, κάθε γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$ είναι όμοιο με κάποιο καλά διατεταγμένο $U \in \mathrm{WO}(A)$, και κάθε $U \in \mathrm{WO}(A)$ είναι όμοιο με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$.*

*Proof*. Δείχνουμε πρώτα την ισότητα

$$\mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\}.$$

Αν $\beta = [V/{\sim_A}] <_{\chi(A)} \alpha$, τότε $V <_o U$ από την (7-31), άρα $V =_o \mathbf{seg}_U(x)$ για κάποιο $x \in U$ και επομένως $\beta = [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}]$. Αντιστρόφως, για κάθε $x \in U$, $\mathbf{seg}_U(x) <_o U$, άρα $[\mathbf{seg}_V(x)/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [U/{\sim_A}] = \alpha$, πάλι από την (7-31).

Για να δείξουμε την ομοιότητα

$$U =_o \mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha) = \{[\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] \mid x \in U\},$$

θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : U \to h(A)$ με

$$\rho(x) = [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}], \quad (x \in U),$$

που είναι ομοιότητα του $U$ με την εικόνα της $\rho[U]$, επειδή

$$\begin{aligned} x <_U y &\iff \mathbf{seg}_U(x) \subsetneqq \mathbf{seg}_U(y) \\ &\iff \mathbf{seg}_U(x) <_o \mathbf{seg}_U(y) \\ &\iff [\mathbf{seg}_U(x)/{\sim_A}] <_{\chi(A)} [\mathbf{seg}_U(y)/{\sim_A}]. \qquad \dashv \text{(Λήμμα)} \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι υπάρχει κάποιος μονομορφισμός

$$\pi : h(A) \rightarrowtail A,$$

και έστω $B = \pi[h(A)] \subseteq A$ η εικόνα του. Ο μονομορφισμός $\pi$ «αντιγράφει» την καλή διάταξη του $h(A)$ σε μια επίσης καλή διάταξη του $B$,

$$x \leq_B y \iff_{\text{ορ}} \pi^{-1}(x) \leq_{\chi(A)} \pi^{-1}(y) \quad (x, y \in B),$$

έτσι ώστε το $U = (B, \leq_B)$ είναι καλά διατεταγμένο υποσύνολο του $A$, και από τον ορισμό του,

$$U =_o \chi(A). \tag{7-32}$$

Από το Λήμμα όμως, ο $U$ είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $\chi(A)$, και επομένως $U <_o \chi(A)$, που είναι άτοπο αφού $U =_o \chi(A)$.

Για να δείξουμε την ελαχιστότητα του $\chi(A)$, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε καλά διατεταγμένο $W$, αν $W <_o \chi(A)$, τότε $W =_o \mathbf{seg}_{\chi(A)}(\alpha)$ για κάποιο $\alpha = [U/{\sim_A}]$, τέτοιο ώστε $W =_o U$ από το Λήμμα. Άρα

$$\text{αν } \ W <_o \chi(A), \text{ τότε } \ W \leq_c A, \tag{7-33}$$

εφόσον το (πεδίο ορισμού του) $U$ είναι υποσύνολο του $A$ και οι ομοιότητες είναι μονομορφισμοί. Παίρνοντας την άρνηση και των δύο πλευρών,

$$\text{αν } \ W \not\leq_c A, \text{ τότε } \ \neg[W <_o \chi(A)], \text{ και άρα } \chi(A) \leq_o W. \qquad \dashv$$

Θα προτιμούσαμε βεβαίως να αποδείξουμε ότι $A <_c \chi(A)$ αντί του δειλού $\chi(A) \not\leq_c A$, και σίγουρα αυτό αληθεύει, αλλά η απόδειξή του χρειάζεται το Αξίωμα Επιλογής. Πρέπει να περιμένουμε λίγο ακόμη μέχρις ότου εμφανιστεί ο από μηχανής θεός στο προσκήνιο.

Οι ενοχλητικές λεπτομέρειες αυτής της απόδειξης πηγάζουν από το γεγονός ότι ο περιορισμός $\lesssim_A$ της οριστικής συνθήκης $\leq_o$ στο $\mathrm{WO}(A)$ δεν είναι καλή διάταξη, για τον τετριμμένο λόγο ότι δεν είναι αντισυμμετρική: πιθανόν να υπάρχουν διαφορετικοί, όμοιοι, $U, V \in \mathrm{WO}(A)$, και βεβαίως πάντα υπάρχουν αν το $A$ έχει τουλάχιστον δύο μέλη. Αυτό μας ανάγκασε να ορίσουμε το $h(A)$ ως σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας αντί του πολύ απλούστερου $h(A) = \mathrm{WO}(A)$. Τεχνικά, η σχέση $\lesssim_A$ είναι *καλή προδιάταξη* και αξίζει τον κόπο να διαμορφώσει κανείς αυτή την απόδειξη κάπως διαφορετικά, μετά την εισαγωγή αυτής της έννοιας, βλ. Προβλήματα **x7.17** – **x7.20**.

Ο τελεστής Hartogs μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή γενικών τελεστών του *infimum* και του *supremum* για οικογένειες καλά διατεταγμένων χώρων (Προβλήματα **x7.26** και **x7.27**) αλλά έχει και πολλές άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για πρώτη εφαρμογή του, γενικεύουμε το Συνεχές Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου **6.21** σε μη συνεχείς απεικονίσεις, αφού πρώτα διατυπώσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου, που έχουμε ήδη αποδείξει.

**7.35. Θεώρημα Σταθερού Σημείου**(Fixed Point Theorem, Zermelo).[17] *Κάθε επεκτατική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε έναν επαγωγικό χώρο έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο, δηλαδή κάποιο $x^* \in P$ ικανοποιεί την εξίσωση*

$$x^* = \pi(x^*).$$

[17] Ο Zermelo δεν διατύπωσε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου σε τέτοια γενικότητα, και γι' αυτό το λόγο το θεώρημα και διάφορα από τα πορίσματά του έχουν αποδοθεί κατά καιρούς σε μεταγενέστερους μαθηματικούς. Όμως η διάσημη «πρώτη απόδειξη» του *Θεωρήματος Καλής Διάταξης* που έδωσε ο Zermelo το 1904 δείχνει ακριβώς αυτό το θεώρημα, τετριμμένα περιορισμένο στην ειδική περίπτωση που τον ενδιέφερε.

Αποδειξη. Το επιχείρημα στο **7.26** χρειαζόταν μόνο κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο $U$ τέτοιον ώστε να μην υπάρχει μονομορφισμός $\sigma : U \rightarrowtail P$, και τώρα έχουμε τον $U = \chi(P)$ με αυτήν ακριβώς την ιδιότητα. $\dashv$

**7.36. Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου** (Least Fixed Point Theorem). *Κάθε μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο έχει* (ακριβώς) *ένα ισχυρά ελάχιστο σταθερό σημείο, δηλαδή υπάρχει $x^* \in P$ με*

$$\pi(x^*) = x^*,$$
$$(\forall y \in P)[\pi(y) = y \Longrightarrow x^* \leq y],$$

*που επιπλέον έχει την εξής, ισχυρότερη ιδιότητα:*

$$(\forall y \in P)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x^* \leq y]. \tag{7-34}$$

Αποδειξη. Μια προσεκτική ανάγνωση των αποδείξεων του Λήμματος Επανάληψης **7.25** και του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου **7.26** φανερώνει ότι ακριβώς η ίδια κατασκευή του σταθερού σημείου για μια επεκτατική απεικόνιση μας δίνει επίσης το ελάχιστο σταθερό σημείο μιας μονοτονικής απεικόνισης. Δεν υπάρχει όμως λόγος να το κάνουμε αυτό, αφού το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου είναι απλό πόρισμα του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου. Η βασική παρατήρηση είναι ότι κάθε μονοτονική απεικόνιση $\pi$ είναι επεκτατική σε κάποιο επαγωγικό *υποχώρο* του $P$.

Θέτουμε

$$Q = \{x \in P \mid x \leq \pi(x) \,\&\, (\forall y)[\pi(y) \leq y \Longrightarrow x \leq y]\}$$

και παρατηρούμε πρώτα ότι ο περιορισμός

$$\leq_Q = \{(x, y) \mid x, y \in Q \,\&\, x \leq_P y\}$$

της $\leq_P$ στο $Q$ είναι μερική διάταξη—αυτό ισχύει αυτόματα για τον περιορισμό της $\leq_P$ σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $P$. (Παραλείπουμε τους δείκτες $_P$ και $_Q$ στη συνέχεια.) Επίσης $\pi[Q] \subseteq Q$, επειδή

$$x \leq \pi(x) \Longrightarrow \pi(x) \leq \pi(\pi(x)),$$

και για κάθε $y$,

$$\pi(y) \leq y \,\&\, x \leq y \Longrightarrow \pi(x) \leq \pi(y) \leq y,$$

από τη μονοτονικότητα της $\pi$. Συνεπώς ο περιορισμός

$$\pi_Q = \{(x, \pi(x)) \mid x \in Q\}$$

της $\pi$ στο $Q$ είναι απεικόνιση στο $Q$, εξακολουθεί να είναι μονοτονική (προφανώς) αλλά είναι και επεκτατική, από τον ορισμό του $Q$. Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** στα $Q$ και $\pi_Q$ μας λείπει μόνο το εξής

**Λήμμα.** *Ο χώρος $Q$ είναι επαγωγικός.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε αλυσίδα $S \subseteq Q$, το ελάχιστο άνω φράγμα $M = \sup S$ (που υπάρχει στον $P$ επειδή ο $P$ είναι επαγωγικός) ανήκει

$$\begin{array}{cccccccc} \square & \circ & \circ & \cdots & \blacksquare & \bullet & \bullet & \cdots \\ (0,0) & (0,1) & (0,2) & \cdots & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \cdots \end{array}$$

Διαγραμμα **7.5**. Το άθροισμα $\mathbb{N} +_o \mathbb{N}$.

στον $Q$, δηλαδή (1) $M \leq \pi(M)$, και (2) για κάθε $y$, $\pi(y) \leq y \Longrightarrow M \leq y$. Για το (1) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in S &\Longrightarrow x \leq M, && \text{επειδή το } M \text{ είναι άνω φράγμα του } S,\\ &\Longrightarrow \pi(x) \leq \pi(M), && \text{επειδή η } \pi \text{ είναι μονοτονική,}\\ &\Longrightarrow x \leq \pi(x) \leq \pi(M), && \text{επειδή } x \in S \subseteq Q, \end{aligned}$$

και επομένως το $\pi(M)$ είναι άνω φράγμα του $S$ και $M = \sup S \leq \pi(M)$. Το (2) έπεται από την παρατήρηση ότι κάθε $y$ που ικανοποιεί την $\pi(y) \leq y$ είναι άνω φράγμα του $Q$ (από τον ορισμό του $Q$), και επομένως άνω φράγμα του υποσυνόλου $S \subseteq Q$, άρα $M = \sup S \leq y$. ⊣ (Λήμμα)

Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** τώρα, υπάρχει κάποιο $x^* \in Q$ τέτοιο ώστε $\pi(x^*) = x^*$ και η (7-34) ισχύει, πολύ απλά επειδή $x^* \in Q$.

Η μοναδικότητα του ελάχιστου σταθερού σημείου είναι προφανής: αν $y^*$ είναι επίσης ελάχιστο σταθερό σημείο, τότε $x^* \leq y^*$ και $y^* \leq x^*$, κι άρα $x^* = y^*$. ⊣

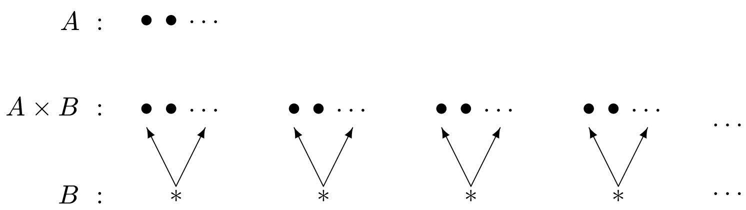
Το γενικό Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου μας απελευθερώνει από την ανάγκη να ελέγχουμε τη συνέχεια απεικονίσεων στις εφαρμογές ελάχιστων σταθερών σημείων στην Πληροφορική, και ιδιαίτερα στην ερμηνεία προγραμμάτων με ελάχιστα σταθερά σημεία. Αυτό είναι κομψό και ευχάριστο, αλλά όχι ιδιαίτερα σημαντικό, μιας και (όπως παρατηρήσαμε στο Κεφάλαιο **6**) οι απεικονίσεις που συναντά κανείς στις αλγοριθμικές εφαρμογές είναι κατά κανόνα προφανώς συνεχείς, από τον ορισμό τους. Το θεώρημα έχει όμως πολύ βαθύτερες εφαρμογές στη γενική θεωρία συνόλων, και ειδικότερα στη μελέτη της *ορισιμότητας* στη συνολοθεωρία, ως επίσης και στην κατασκευή παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων συνόλων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Θα βρούμε πολλά τέτοια παραδείγματα στα επόμενα κεφάλαια.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 7

**x7.1.** Κάθε γραμμική διάταξη πεπερασμένου συνόλου είναι καλή διάταξη. (Σχετικό είναι το Πρόβλημα **x6.7**.)

**7.37.** Το **άθροισμα** $P +_o Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων $P$ και $Q$ κατασκευάζεται τοποθετώντας ξένα αντίγραφα των $P$ και $Q$ το ένα μετά το άλλο, έτσι ώστε κάθε σημείο του $P$ να προηγείται κάθε σημείου του $Q$. Τυπικά, θέτουμε $P +_o Q = R$, όπου

$$\text{Field}(R) =_{\mathsf{op}} (\{0\} \times \text{Field}(P)) \cup (\{1\} \times \text{Field}(Q)), \tag{7-35}$$




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **7.6**. Το γινόμενο δύο καλά διατεταγμένων χώρων.

και για $(i, x), (j, y) \in \mathrm{Field}(R)$,

$$(i, x) \leq_R (j, y) \iff_{\text{ορ}} i < j \vee [i = j = 0 \,\&\, x \leq_U y] \vee [i = j = 1 \,\&\, x \leq_V y]. \tag{7-36}$$

Η ιδέα είναι ότι ο $P$ είναι όμοιος με το χώρο $\{0\} \times \mathrm{Field}(P)$ μερικά διατεταγμένο από τα δεύτερα των μελών του, με την προφανή ομοιότητα $(x \mapsto (0, x))$, και με τον ίδιο τρόπο, $Q =_o \{1\} \times \mathrm{Field}(Q)$.

**x7.2.** Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, τότε $P +_o Q =_o P' +_o Q'$.

**x7.3.** Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο $P$, $\mathrm{Succ}(P) =_o P +_o [0, 1)$.

**x7.4.** Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους $P$, $Q$, $R$,

$$P +_o (Q +_o R) =_o (P +_o Q) +_o R.$$

**x7.5.** Αν οι χώροι $U$ και $V$ είναι καλά διατεταγμένοι, τότε και το άθροισμά τους $U +_o V$ είναι καλά διατεταγμένο.

**x7.6.** Δείξε ότι $[0, 1) +_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} +_o [0, 1)$, και επομένως ο τελεστής άθροισης καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι αντιμεταθετικός.

**7.38.** Το **γινόμενο** $P \cdot_o Q$ δύο μερικά διατεταγμένων χώρων κατασκευάζεται με την αντικατάσταση κάθε σημείου του $Q$ από ένα αντίγραφο του $P$. Τυπικά, θέτουμε $P \cdot_o Q = R$, όπου

$$\mathrm{Field}(R) = \mathrm{Field}(P) \times \mathrm{Field}(Q), \tag{7-37}$$

και $\leq_R$ είναι η *αντίστροφη αλφαβητική* διάταξη ζευγών, δηλαδή συγκρίνουμε πρώτα τα δεύτερα μέλη: για $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Field}(R)$,

$$(x_1, y_1) \leq_R (x_2, y_2) \iff_{\text{ορ}} y_1 <_Q y_2 \vee [y_1 = y_2 \,\&\, x_1 \leq_P x_2]. \tag{7-38}$$

Δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος για την επιλογή της αντίστροφης αλφαβητικής διάταξης αντί της συνηθισμένης, απλά ο Cantor έδωσε τον ορισμό μ' αυτόν τον τρόπο και έμεινε.

**x7.7.** Αν $P =_o P'$ και $Q =_o Q'$, τότε $P \cdot_o Q =_o P' \cdot_o Q'$.

**x7.8.** Δείξε ότι $P \cdot_o [0, 2) =_o P +_o P$, αλλά $[0, 2) \cdot_o \mathbb{N} =_o \mathbb{N} \neq_o \mathbb{N} \cdot_o [0, 2)$, έτσι ώστε ο πολλαπλασιασμός καλά διατεταγμένων χώρων δεν είναι αντιμεταθετικός.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 & (0,0) & (1,0) & (2,0) & \cdots & (0,1) & (1,1) & (2,1) & \cdots \\
N \cdot_o [0,2): & \square & \circ & \circ & \cdots & \blacksquare & \bullet & \bullet & \cdots \\
[0,2) \cdot_o N: & \square & \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & & \\
 & (0,0) & (1,0) & (0,1) & (1,1) & (0,2) & \cdots & &
\end{array}$$

Διαγραμμα **7.7**. Αντιμετάθεσης αποτυχία.

**x7.9.** Για όλους τους μερικά διατεταγμένους χώρους $P$, $Q$, $R$,

$$P \cdot_o (Q \cdot_o R) =_o (P \cdot_o Q) \cdot_o R.$$

**x7.10.** Το γινόμενο καλά διατεταγμένων χώρων είναι καλά διατεταγμένο.

**x7.11.** Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\mathrm{Parity} : U \to \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\mathrm{Parity}(y) = 0$ αν $y = 0$ ή το $y$ είναι οριακό σημείο, και στα επόμενα

$$\mathrm{Parity}(S(x)) = 1 - \mathrm{Parity}(x).$$

**x7.12.** Κάθε σημείο $y$ καλά διατεταγμένου χώρου $U$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$y = S^n(x), \tag{7-39}$$

όπου (1) το $x$ είναι είτε το ελάχιστο 0 είτε κάποιο οριακό σημείο, (2) το $n$ είναι φυσικός αριθμός και (3) η συνάρτηση $(i, x) \mapsto S^i(x)$ ορίζεται με την αναδρομή

$$S^0(x) = x, \quad S^{i+1}(x) = S(S^i(x)).$$

**x7.13.** Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους $U$, $V$, υπάρχει το πολύ μία αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$.

**x7.14.** Για όλους τους καλά διατεταγμένους χώρους $U$, $V$, $W$,

$$U <_o V \,\&\, V \leq_o W \implies U <_o W,$$
$$U \leq_o V \,\&\, V <_o W \implies U <_o W.$$

**x7.15.** Αν $\kappa$ και $\lambda$ είναι καλά διατάξιμοι πληθικοί αριθμοί, τότε είτε $\kappa \leq_c \lambda$ είτε $\lambda \leq_c \kappa$.

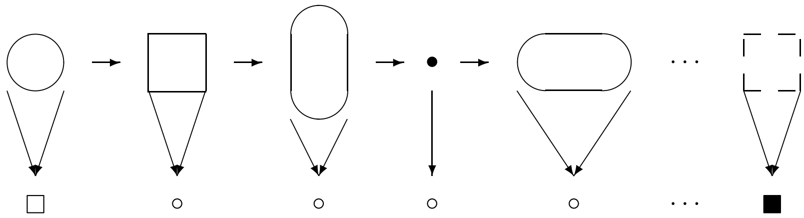
$^*$ **x7.16.** Αν ο $\kappa$ είναι καλά διατάξιμος, άπειρος πληθικός αριθμός, τότε $\kappa + 1 =_c \kappa$.

**7.39. Ορισμός. Καλή προδιάταξη** (prewellordering!) στο σύνολο $A$ είναι μια σχέση $\precsim \subseteq A \times A$ που είναι αυτοπαθής, μεταβατική, συνδεδεμένη (ολική) και εδραιωμένη. «Συνδεδεμένη» (connected) σημαίνει ότι τα μέλη του $A$ είναι συγκρίσιμα ανά δύο,

$$(\forall x, y \in A)[x \precsim y \vee y \precsim x],$$

και «εδραιωμένη» (grounded) σημαίνει ότι κάθε μη κενό $X \subseteq A$ έχει $\precsim$-ελάχιστο μέλος,

$$(\forall X \subseteq A, X \neq \emptyset)(\exists x \in X)(\forall y \in X)[x \precsim y].$$



Διαγραμμα **7.8**. Πορτρέτο καλής προδιάταξης.

Μια καλή προδιάταξη θα ήταν καλή διάταξη, αν είχε επιπλέον την ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας.

**x7.17.** Για κάθε σύνολο $A$, θεωρούμε το σύνολο

$$B = \{X \subseteq A \mid X \text{ είναι πεπερασμένο}\}$$

των πεπερασμένων υποσυνόλων του $A$ και ορίζουμε στο $B$

$$X \precsim_B Y \iff_{\text{ορ}} X \leq_c Y.$$

Δείξε ότι η $\lesssim_B$ είναι καλή προδιάταξη.

**x7.18.** Η σχέση $\precsim \subseteq A \times A$ είναι καλή προδιάταξη τότε και μόνον αν υπάρχει ένας καλά διατεταγμένος χώρος $U = (\text{Field}(U), \leq_U)$ και ένας επιμορφισμός $\pi : A \twoheadrightarrow \text{Field}(U)$, έτσι ώστε

$$x \precsim y \iff \pi(x) \leq_U \pi(y) \quad (x, y \in A).$$

**x7.19.** Για κάθε σύνολο $A$, η σχέση

$$U \lesssim_A V \iff_{\text{ορ}} U, V \in \text{WO}(A) \,\&\, U \leq_o V$$

είναι καλή προδιάταξη του $\text{WO}(A)$.

**x7.20.** Κατεργαστείτε μια διαφορετική διατύπωση της απόδειξης του Θεωρήματος Hartogs, χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα Προβλήματα.

**x7.21.** Για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει καλά διατεταγμένος χώρος $V$ τέτοιος ώστε δεν υπάρχει επιμορφισμός $\pi : A \twoheadrightarrow V$.

**x7.22.** Δείξε ότι αν $A \leq_c B$, τότε $\chi(A) \leq_o \chi(B)$.

**x7.23.** Δείξε ότι $\chi([0, n)) =_o [0, n+1)$.

**x7.24.** Αν ο $W$ καλά διατεταγμένος χώρος και $W \leq_c A$, τότε $W <_o \chi(A)$.

**x7.25.** Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$,

$$U <_o \chi(A) \iff \text{Field}(U) \leq_c A.$$

Ο τελεστής $\chi(A)$ είναι οριστικός, μιας και δώσαμε ένα συγκεκριμένο ορισμό του πεδίου $h(A)$ και της καλής διάταξης $\leq_{\chi(A)}$ του $\chi(A)$ από το $A$. Μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε κάποιους σχετικούς τελεστές σε οικογένειες καλά διατεταγμένων χώρων.

$^*$**x7.26.** Να ορίσεις έναν οριστικό τελεστή $\inf(\mathcal{E})$, τέτοιον ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων, το $\inf(\mathcal{E})$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Το $\inf(\mathcal{E})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.
(2) Για κάποιο $U \in \mathcal{E}$, $\inf(\mathcal{E}) =_o U$.
(3) Για κάθε $U \in \mathcal{E}$, $\inf(\mathcal{E}) \leq_o U$.

Υποδειξη. Ψάξε στα αρχικά τμήματα του $\chi(\bigcup \mathcal{E})$.

$^*$**x7.27.** Να ορίσεις έναν οριστικό τελεστή $\sup(\mathcal{E})$, τέτοιον ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια $\mathcal{E}$ καλά διατεταγμένων χώρων, το $\sup(\mathcal{E})$ να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Το $\sup(\mathcal{E})$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος.
(2) Αν $U \in \mathcal{E}$, τότε $U \leq_o \sup(\mathcal{E})$.
(3) Αν το $W$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος και για κάθε $U \in \mathcal{E}$, έχουμε $U \leq_o W$, τότε $\sup(\mathcal{E}) \leq_o W$.

$^*$**x7.28.** Για κάθε γραμμική διάταξη $\leq$ σε σύνολο $A$, ορίζουμε στο χώρο $\mathcal{P}(A)$ την απεικόνιση

$$\pi(X) =_{\text{ορ}} \{y \in A \mid (\forall x < y)[x \in X]\}.$$

Δείξε ότι η $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ είναι μονοτονική και δώσε ένα παράδειγμα όπου δεν είναι αριθμήσιμα συνεχής. Δείξε ότι αν το $A_w$ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της $\pi$, τότε

$$x \in A_w \iff \{(s,t) \in A \times A \mid s \leq t < x\} \text{ είναι καλή διάταξη.}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου είναι ευκολότερο να χρησιμοποιήσουμε *την απόδειξη* του Θεωρήματος Σταθερού Σημείου **7.35** παρά την εκφώνησή του.

$^*$**x7.29. Λεπτομερειακό Θεώρημα Σταθερού Σημείου.** Για κάθε επεκτατική ή μονοτονική απεικόνιση $\pi : P \to P$ σε επαγωγικό χώρο $P$, υπάρχει υποσύνολο $D \subseteq P$ του $P$ με τις εξής ιδιότητες:

(1) Το $D$ είναι καλά διατεταγμένη αλυσίδα στο $P$.
(2) Κάθε σημείο του $D$ καθορίζεται από τα προηγούμενά του με τον τύπο

$$x = \pi(\sup \{y \in D \mid y < x\}).$$

(3) Κανένα σημείο του $D$ δεν είναι σταθερό σημείο της $\pi$.
(4) Το σημείο $\pi(\sup D)$ είναι σταθερό σημείο της $\pi$,

$$\pi(\pi(\sup D)) = \pi(\sup D).$$

(5) Αν η $\pi$ είναι μονοτονική, τότε το $\pi(\sup D)$ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο της $\pi$.

Δείξε επίσης ότι αυτές οι ιδιότητες χαρακτηρίζουν το $D$: μόνο ένα υποσύνολο του $P$ τις ικανοποιεί.

* **x7.30.** Υποθέτουμε ότι η $\pi : P \times Q \to P$ είναι μονοτονική απεικόνιση στο γινόμενο δύο επαγωγικών χώρων, και ορίζουμε την $\rho : Q \to P$ χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα **x6.4** και το Θεώρημα Ελάχιστου Σταθερού Σημείου 7.36,

$$\begin{aligned} \rho(y) &= (\mu x \in P)[\pi(x, y) = x] \\ &= \text{το ελάχιστο σταθερό σημείο της } \pi(x, y) = x. \end{aligned} \tag{7-40}$$

Δείξε ότι η $\rho$ είναι μονοτονική, και ότι αν η $\pi$ είναι αριθμήσιμα συνεχής, τότε και η $\rho$ είναι αριθμήσιμα συνεχής.

* **x7.31. Ο κανόνας των Bekič-Scott**. Υποθέτουμε ότι οι $P_1, P_2$ είναι επαγωγικοί χώροι και οι

$$\pi_1 : P_1 \times P_2 \to P_1, \quad \pi_2 : P_1 \times P_2 \to P_2,$$

είναι μονοτονικές απεικονίσεις. Χρησιμοποιώντας τον $\mu$-συμβολισμό για τα ελάχιστα σταθερά σημεία της (7-40), ορίζουμε πρώτα την

$$\rho(x_2) = (\mu x_1 \in P_1)[\pi_1(x_1, x_2) = x_1],$$

μετά το σημείο

$$\overline{x}_2 = (\mu x_2 \in P_2)[\pi_2(\rho(x_2), x_2) = x_2]$$

ως το ελάχιστο σταθερό σημείο της απεικόνισης $x_2 \mapsto \pi_2(\rho(x_2), x_2)$ (που είναι μονοτονική από το **x7.30**) και τελικά το σημείο

$$(x_1^*, x_2^*) = (\mu(x_1, x_2) \in P_1 \times P_2)[(\pi_1(x_1, x_2), \pi_2(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)]$$

ως το ελάχιστο σταθερό σημείο στο γινόμενο. Δείξε ότι

$$x_2^* = \overline{x}_2.$$

Το πρόβλημα βεβαιώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τα αμοιβαία ελάχιστα σταθερά σημεία επαναλαμβάνοντας δύο φορές τον τελεστή ελάχιστου σταθερού σημείου $(\mu x \in P)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

# ΕΠΙΛΟΓΕΣ

**8.1. Το Αξίωμα Επιλογής** (Axiom of Choice), **AC**. Για κάθε διμελή σχέση $P \subseteq (A \times B)$ σε σύνολα $A$, $B$,

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x,y) \Longrightarrow (\exists f : A \to B)(\forall x \in A)P(x, f(x)). \tag{8-1}$$

Αυτό είναι το τελευταίο και πλέον επίμαχο αξίωμα του Zermelo. Για να καταλάβουμε πού χρειάζεται, ανακαλούμε το κλασικό παράδειγμα του Russell, όπου το $A$ είναι σύνολο από ζευγάρια παπούτσια, $B = \bigcup A$ και

$$P(x,y) \iff y \in x.$$

Η συνάρτηση

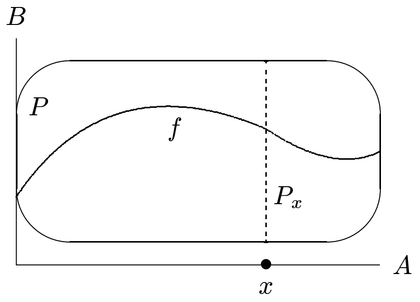
$$f(x) =_{\text{ορ}} \text{το αριστερό παπούτσι του } x, \quad (x \in A)$$

προφανώς επιλέγει ένα παπούτσι από κάθε ζευγάρι, συμβολικά $(\forall x \in A)P(x, f(x))$. Αν όμως το $A$ είναι σύνολο από ζευγάρια *κάλτσες*, τότε δεν μπορούμε να *ορίσουμε* συνάρτηση $f : A \to \bigcup A$ που διαλέγει ακριβώς μία κάλτσα $f(x) \in x$ από κάθε ζευγάρι, επειδή (όπως δεχόμαστε για το παράδειγμα) ένα ζευγάρι κάλτσες αποτελείται από δύο τελείως όμοια αντικείμενα. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει συνάρτηση επιλογής $f$ αν το $A$ είναι πεπερασμένο, με επαγωγή στον αριθμό μελών του $A$ (Πρόβλημα **x8.1**). Αλλά οι μαθηματικοί έχουν την ικανότητα να φαντάζονται και να μελετούν άπειρα ζευγάρια καλτσών, και γι' αυτά χρειαζόμαστε κάτι σαν το Αξίωμα Επιλογής για να εγγυηθούμε την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης.

Λιγότερο διασκεδαστικό αλλά σημαντικότερο παράδειγμα είναι η απόδειξη του βασικού θεωρήματος **2.10**, όπου θεωρούμε μιαν ακολουθία απαριθμητών συνόλων $A_0$, $A_1$, … και αρχίζουμε με τη φράση:

> Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση που κανένα $A_n$ δεν είναι κενό, οπότε μπορούμε να βρούμε απαρίθμηση $\pi_n : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n$ για κάθε $A_n$.

Ίσως για κάθε $n$ να «μπορούμε να βρούμε» (δηλαδή να «υπάρχει») κάποια απαρίθμηση $\pi$ του $A_n$, αλλά η συνέχεια της απόδειξης χρειάζεται μια *συνάρτηση* $(n \mapsto \pi_n)$ που αντιστοιχίζει κάποια συγκεκριμένη απαρίθμηση $\pi_n$ σε κάθε $n$: ποιο από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) εγγυάται την ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης;




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **8.1**. Επιλογέας του $P \subseteq A \times B$.

εδώ $A = \mathbb{N}$, $B = (\mathbb{N} \to \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n)$ και

$$P(n, \pi) \iff \pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A_n,$$

έτσι ώστε $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \pi \in B)P(n, \pi)$ από την υπόθεση ότι κάθε $A_n$ είναι μη κενό και απαριθμητό: και το Αξίωμα Επιλογής βεβαιώνει ακριβώς ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to B$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η τιμή $f(n) = \pi_n$ ικανοποιεί την $P(n, \pi_n)$, δηλαδή απαριθμεί το $A_n$. Τέτοιες «σιωπηρές» επικλήσεις του Αξιώματος Επιλογής είναι πολύ κοινές στα μαθηματικά και ειδικότερα στην ανάλυση, όπου (π.χ.) η κλασική θεωρία ορίων και συνεχών συναρτήσεων δεν μπορεί να αναπτυχθεί ικανοποιητικά χωρίς επιλογές.

Αν εικονίσουμε τη σχέση $P \subseteq A \times B$ ως υποσύνολο του γινομένου, τότε η υπόθεση $(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y)$ σημαίνει ότι η *τομή*

$$P_x =_{\text{op}} \{y \in B \mid P(x, y)\} \tag{8-2}$$

πάνω από κάθε $x \in A$ δεν είναι κενή. Το Αξίωμα Επιλογής εγγυάται την ύπαρξη ενός *επιλογέα* (selector) για το $P$, μιας συνάρτησης $f : A \to B$ που αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in A$ ακριβώς ένα σημείο στην τομή από πάνω του. Υπάρχουν ακόμη δύο απλές εκδοχές του αξιώματος που εκφράζουν με διαφορετικούς τρόπους την πράξη της «συνάθροισης σε ολότητα» οποιουδήποτε πλήθους ελεύθερων και μη συγκρουόμενων επιλογών.

**8.2. Ορισμός.** Το σύνολο $S$ είναι **σύνολο επιλογής** (choice set) για μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{E}$, αν (1) $S \subseteq \bigcup \mathcal{E}$, και (2) για κάθε $X \in \mathcal{E}$, η τομή $S \cap X$ είναι μονοσύνολο. Ένα σύνολο επιλογής $S$ *επιλέγει* από κάθε $X \in \mathcal{E}$ το μοναδικό μέλος της τομής $S \cap X$.

**8.3. Άσκηση.** *Αν $\emptyset \in \mathcal{E}$, τότε η $\mathcal{E}$ δεν επιδέχεται σύνολο επιλογής. Επίσης αν $a \neq b$, τότε η οικογένεια $\mathcal{E} = \{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$ δεν επιδέχεται σύνολο επιλογής.*

**8.4. Θεώρημα.** *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με το εξής: κάθε οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων επιδέχεται σύνολο επιλογής.*

Αυτή είναι η μορφή του **AC** που διατύπωσε ο Zermelo.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αποδεχόμαστε πρώτα το Αξίωμα Επιλογής και θέτουμε $U = \bigcup \mathcal{E}$, όπου η $\mathcal{E}$ είναι οικογένεια ξένων ανά δύο, μη κενών συνόλων. Αυτό σημαίνει εν μέρει ότι

$$(\forall X \in \mathcal{E})(\exists x \in U)[x \in X],$$

άρα από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει συνάρτηση $f : \mathcal{E} \to U$ τέτοια ώστε

$$(\forall X \in \mathcal{E})[f(X) \in X].$$

Θέτουμε $S = f[\mathcal{E}] = \{f(X) \mid X \in \mathcal{E}\}$, και το γεγονός ότι τα μέλη της $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο συνεπάγεται εύκολα ότι το $S$ τέμνει κάθε μέλος της $\mathcal{E}$ σε μονοσύνολο.

Για το αντίστροφο, δεχόμαστε ότι

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y),$$

και θέτουμε

$$\mathcal{E} = \{U_x \mid x \in A\},$$

όπου για κάθε $x \in A$,

$$U_x = \{(t, y) \in P \mid t = x\}.$$

Κάθε μέλος της $\mathcal{E}$ είναι μη κενό από την υπόθεση και καθορίζεται από το κοινό, πρώτο μέρος όλων των μελών του, και επομένως τα μέλη της $\mathcal{E}$ είναι ξένα ανά δύο. Αν το $S$ είναι σύνολο επιλογής για την $\mathcal{E}$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \text{το μοναδικό } y \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in S$$

εύκολα ικανοποιεί το συμπέρασμα του Αξιώματος Επιλογής. ⊣

**8.5. Ορισμός.** **Συνάρτηση επιλογής** για ένα σύνολο $A$ είναι μια μερική συνάρτηση

$$\varepsilon : \mathcal{P}(A) \rightharpoonup A,$$

τέτοια ώστε

$$\emptyset \neq X \subseteq A \Longrightarrow \varepsilon(X)\downarrow \ \& \, \varepsilon(X) \in X.$$

**8.6. Λήμμα.** *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με το εξής: κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής.*

Αποδειξη. Για κάθε $A$, προφανώς

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\})(\exists y \in A)[y \in X],$$

και αμέσως από το Αξίωμα Επιλογής, υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ τέτοια ώστε

$$(\forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\})[\varepsilon(X) \in X].$$

Το αντίστροφο είναι εύκολο και το αφήνουμε για άσκηση. ⊣

**8.7. Άσκηση.** *Αν κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής, τότε αληθεύει το Αξίωμα Επιλογής.*

**8.8. Όμως αληθεύει; (1)** Με την πλέον άμεση ερμηνεία του, το Αξίωμα Επιλογής αιτιάται ότι αν η καθεμία ενός συνόλου μη συγκρουόμενων επιλογών μπορεί να πραγματοποιηθεί, τότε όλες μπορούν να πραγματοποιηθούν ανεξάρτητα και τα αποτελέσματα να συναθροιστούν σε ολότητα, να γίνουν σύνολο. Αν το καταλάβουμε έτσι, το Αξίωμα Επιλογής είναι προφανές, μπορεί να δικαιολογηθεί από τη φυσική ερμηνεία του Αξιώματος Δυναμοσυνόλου: όταν δεχόμαστε ως σύνολο την κλάση $\{X \mid X \subseteq A\}$ όλων των υποσυνόλων του $A$, πραγματικά εννοούμε *όλων* των υποσυνόλων του $A$, ακόμη και αυτών για τα οποία το κριτήριο του τι τους ανήκει δεν καθορίζεται από κάποιο ρητό κανόνα αλλά με ελεύθερη επιλογή, «με την τύχη».

Το Αξίωμα Επιλογής είναι διαφορετικό από τα προηγούμενα «κατασκευαστικά» αξιώματα (**II**) – (**VI**), επειδή *απαιτεί κατευθείαν* την ύπαρξη συνόλων για τα οποία δεν παρέχει ορισμούς. Καθένα από τα (**II**) – (**VI**) απονέμει την ιδιότητα του συνόλου σε μια συγκεκριμένη, ρητά ορισμένη κλάση αντικειμένων, νομιμοποιεί μια ειδική περίπτωση της τόσο αληθοφανούς (αν και λανθασμένης) Γενικής Αρχής Συμπερίληψης **3.3**. *Το Αξίωμα Επιλογής είναι το μόνο αξίωμα του Zermelo εκτός απ' αυτό της Έκτασης που δεν είναι ειδική περίπτωση της Γενικής Αρχής Συμπερίληψης.* Αυτό παρεξηγείται μερικές φορές και προτείνεται το επιχείρημα ότι το Αξίωμα Επιλογής είναι το μόνο που *απαιτεί την ύπαρξη* αντικειμένων για τα οποία δεν παρέχει ορισμούς, αλλά τα Αξιώματα Έκτασης και Δυναμοσυνόλου κάνουν το ίδιο πράγμα, με έμμεσο αλλά θεμελιακά πιο βασικό τρόπο.

Ο Zermelo εισήγαγε το Αξίωμα Επιλογής το 1904, σε μια μικρή εργασία όπου το επικαλέστηκε για να αποδείξει ότι κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο. Ήταν γνωστή εικασία, και ο Cantor είχε ήδη προτείνει περίγραμμα απόδειξής της σ' ένα (τότε ακόμη) αδημοσίευτο γράμμα στον Dedekind. Η απόδειξη του Cantor όμως (και η σχετική απόδειξη της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων που πρότεινε μαζί της) στηριζόταν σε διαισθήσεις για τα σύνολα που δεν ήταν τελείως ξεκάθαρες. Ο Zermelo ξεκαθάρισε απαρχής ότι η δική του, αυστηρή απόδειξη στηριζόταν στο Αξίωμα Επιλογής, και μ' αυτό προκάλεσε αμέσως ισχυρή επίθεση εναντίον του από πολλούς διακεκριμένους μαθηματικούς της εποχής, που τον κατηγόρησαν ότι εισήγαγε μια νέα, αμφίβολη μέθοδο για να δικαιολογήσει ένα απίθανο αποτέλεσμα. Δεδομένου ότι αρχές επιλογής δεν ήταν με κανένα τρόπο ανήκουστες στα γενικά μαθηματικά και ότι διαπότιζαν την προηγούμενη δουλειά του Cantor, δικαιολογείται κανείς να πει ότι η αιτία της αντίδρασης ήταν λιγότερο το νόημα του Αξιώματος Επιλογής και περισσότερο η κατανόηση της δύναμής του.

Στο επόμενο θεώρημα απαριθμούμε τις πλέον περιώνυμες προτάσεις για τα σύνολα που είναι ισοδύναμες με το Αξίωμα Επιλογής. Έχουμε διατηρήσει τα παραδοσιακά ονόματα γι' αυτές τις προτάσεις—Λήμμα, Υπόθεση, Θεώρημα—που τους προσκολλήθηκαν από την ιστορική συγκυρία του πώς και πότε μπήκαν στη μαθηματική βιβλιογραφία.

**8.9. Θεώρημα.** *Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(1) **Το Αξίωμα Επιλογής**: *Κάθε σύνολο επιδέχεται συνάρτηση επιλογής.*

(2) **Η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων**: *Τα σύνολα είναι συγκρίσιμα ανά δύο ως προς το πλήθος, δηλαδή για όλα τα $A$, $B$, είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$.*

(3) **Το Θεώρημα Καλής Διάταξης**: *Κάθε σύνολο είναι καλά διατάξιμο* (επιδέχεται καλή διάταξη).

Αποδειξη. Επαληθεύουμε κυκλικά, ότι καθεμιά απ' αυτές τις προτάσεις συνεπάγεται την επόμενη, και τελικά (3) $\Longrightarrow$ (1).

(1) $\Longrightarrow$ (2). Από την Άσκηση **6.17**, ο χώρος $(A \rightarrowtail B)$ των μερικών μονομορφισμών από το $A$ στο $B$ είναι επαγωγικός. Η ιδέα είναι ότι μπορούμε να ορίσουμε (χρησιμοποιώντας το **AC**) μια επεκτατική απεικόνιση στο $(A \rightarrowtail B)$, η οποία να επεκτείνει κατάλληλα κάθε μερικό μονομορφισμό $p : A \rightarrowtail B$ με πεδίο ορισμού που να μην εξαντλεί το $A$ και πεδίο τιμών που να μην εξαντλεί το $B$. Οποιοδήποτε σταθερό σημείο αυτής της απεικόνισης είτε θα ορίζεται σε ολόκληρο το $A$, φαναιρώνοντας ότι $A \leq_c B$, είτε η εικόνα του θα είναι ολόκληρο το $B$, φαναιρώνοντας ότι $B \leq_c A$.

Αναλυτικότερα, έστω

$$\varepsilon_A : \mathcal{P}(A) \rightharpoonup A, \quad \varepsilon_B : \mathcal{P}(B) \rightharpoonup B$$

συναρτήσεις επιλογής στα $A$ και $B$, από το Αξίωμα Επιλογής. Για κάθε μερικό μονομορφισμό $p : A \rightarrowtail B$, θέτουμε

$$\pi(p) = \begin{cases} p \cup \{(\varepsilon_A(A \setminus \mathrm{Domain}(p)), \varepsilon_B(B \setminus \mathrm{Image}(p)))\}, \\ \qquad\qquad \text{if } \mathrm{Domain}(p) \subsetneq A \,\&\, \mathrm{Image}(p) \subsetneq B, \\ p, \qquad \text{otherwise.} \end{cases}$$

Η $\pi$ είναι προφανώς επεκτατική, και έτσι από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35** έχει σταθερό σημείο $p^* : A \rightharpoonup B$, για το οποίο ισχύει:

$$\text{είτε } \mathrm{Domain}(p^*) = A \text{ είτε } \mathrm{Image}(p^*) = B.$$

Περιπτωση 1. $\mathrm{Domain}(p^*) = A$. Τότε η $p^* : A \rightarrowtail B$ είναι μονομορφισμός από το $A$ στο $B$, έτσι που $A \leq_c B$.

Περιπτωση 2, $\mathrm{Image}(p^*) = B$. Σε αυτήν την περίπτωση, η $p^*$ είναι αντιστοιχία του $\mathrm{Domain}(p^*)$ με το $B$, και έτσι $B =_c \mathrm{Domain}(p^*) \subseteq A$ και άρα $B \leq_c A$.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Από την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων, είτε $A \leq_c h(A)$ είτε $h(A) \leq_c A$, όπου $h(A)$ είναι το σύνολο Hartogs για το $A$· όμως $h(A) \not\leq_c A$ από το Θεώρημα Hartogs **7.34**, και έτσι $A \leq_c h(A)$· επί πλέον, το $h(A)$ είναι καλά διατάξιμο, και άρα από την Άσκηση **7.3** καλά διατάξιμο είναι και το $A$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Αν η $\leq$ είναι καλή διάταξη του $A$, τότε η μερική συνάρτηση

$$\varepsilon(X) = \text{το } \leq\text{-ελάχιστο μέλος του } X$$

είναι συνάρτηση επιλογής για το $A$. ⊣

**8.10. Όμως αληθεύει; (2)** Το νόημα αυτού του θεωρήματος είναι ότι αν δεχτούμε τα βασικά, κατασκευαστικά πρώτα έξι αξιώματα του Zermelo, τότε το Αξίωμα Επιλογής, η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και το Θεώρημα Καλής Διάταξης εκφράζουν με τρεις διαφορετικούς τρόπους την ίδια συνολοθεωρητική αρχή. Χωρίς αμφιβολία, το Αξίωμα Επιλογής είναι η πλέον άμεση και διάφανη εκδοχή αυτής της αρχής, αυτή που κάνει «προφανέστατη» την αλήθεια της. Η Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων είναι εύκολα κατανοητή και αληθοφανής, αλλά λίγοι θα τη δέχονταν ως αξίωμα, έχει την υφή τεχνικής εικασίας που χρήζει απόδειξης. Τέλος, το Θεώρημα Καλής Διάταξης είναι οπωσδήποτε πεντακάθαρο στο νόημά του, δίνει ένα μηχανισμό επιλογών που κατά κάποιο τρόπο «επεξηγεί» το Αξίωμα Επιλογής, αλλά οπωσδήποτε δεν είναι προφανές, τουναντίον γεννά δυσπιστία. Παραδείγματος χάριν, ποια είναι η καλή διάταξη που εγγυάται το θεώρημα στο δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών $\mathcal{P}(\mathbb{N})$; Χωρίς κάποια σκέψη δεν είναι καν προφανές ότι το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ επιδέχεται γραμμικές διατάξεις, βλ. Πρόβλημα **x8.9**. Είναι κάπως δύσκολο να φανταστούμε τη δομή της απαιτούμενης καλής διάταξης του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, και αυτό, φυσικά, μας δημιουργεί κάποιες αμφιβολίες για το αξίωμα που συνεπάγεται την ύπαρξή της. Δεν είναι περίεργο ότι η αντιλογία για το Αξίωμα Επιλογής άρχισε με την απόδειξη από τον Zermelo της συνεπαγωγής (1) $\Longrightarrow$ (3), της οποίας το συμπέρασμα ακόμη και σήμερα πολλοί θεωρούν αντίθετο με τις διαισθήσεις μας.

Πέρα από την Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων και το Θεώρημα Καλής Διάταξης που είναι θεμελιώδη για την ανάπτυξη της συνολοθεωρίας, το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με ένα σωρό προτάσεις που χρησιμεύουν πολύ σε άλλους κλάδους των μαθηματικών. Εδώ αναφέρουμε μονάχα δύο από αυτές, που βρίσκονται πιο κοντά στο αντικείμενό μας και τις οποίες εύκολα αποδεικνύουμε με γνωστές μας μεθόδους· όμως υπάρχουν ακόμα πολλές άλλες.[18]

**8.11. Θεώρημα.** *Το Αξίωμα Επιλογής είναι ισοδύναμο με τις ακόλουθες δύο προτάσεις:*

(1) **Αρχή Μεγιστικής Αλυσίδας**: *Κάθε μερικά διατεταγμένος χώρος $P$ έχει μια μεγιστική αλυσίδα $S \subseteq P$, με την έννοια ότι για κάθε άλλη αλυσίδα $S'$, $S \subseteq S' \Longrightarrow S = S'$.*

(2) **Λήμμα του Zorn**: *Αν σε ένα μερικά διατεταγμένο χώρο $P$ κάθε αλυσίδα έχει άνω φράγμα, τότε ο $P$ έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Απόδειξη. **AC** $\Longrightarrow$ (1). Δεχόμενοι το **AC**, έστω $(\mathrm{Chains}(P), \subseteq)$ ο μερικά διατεταγμένος χώρος όλων τον αλυσίδων του $P$, ο οποίος είναι επαγωγικός από την Πρόταση **6.14**, και υποθέτουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει μεγιστική αλυσίδα, έτσι που από το **AC**,

$$(\forall S \in \mathrm{Chains}(P))(\exists S' \in \mathrm{Chains}(P))[S \subsetneq S'].$$

[18] Σε μία διάλεξή του, ο Kenneth Hoffman είπε ότι το Θεώρημα Tychonoff της γενικής τοπολογίας είναι «προφανώς» ισοδύναμο με το Αξίωμα Επιλογής, «μιας και όλες οι ύποπτες γενικές αρχές είναι ισοδύναμες με το **AC**».

τώρα το **AC** μας δίνει μια απεικόνιση $\pi : \mathrm{Chains}(P) \to \mathrm{Chains}(P)$ που είναι επεκτατική, χωρίς να έχει σταθερό σημείο, που αντιτίθεται το Θεώρημα Σταθερού Σημείου **7.35**.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Από την υπόθεση μπορούμε να θεωρήσουμε $S$ είναι μια μεγιστική αλυσίδα του $P$ και $M$ ένα άνω φράγμα του $S$. Τότε το $M$ είναι μεγιστικό στο $P$—επειδή αν $M <_P M'$, τότε το $S \cup \{M'\}$ θα ήταν αλυσίδα που επεκτείνει αυστηρά την $S$.

(2) $\Longrightarrow$ **AC**. Για δύο σύνολα $A$, $B$, θεωρούμε το χώρο $(A \rightarrowtail B)$ των μερικών μονομορφισμών. Αυτός είναι επαγωγικός, από την Άσκηση **6.17**, και έτσι κάθε αλυσίδα είναι άνω φραγμένη σε αυτόν· από το Λήμμα του Zorn, ο $(A \rightarrowtail B)$ έχει μεγιστικό στοιχείο $f$, το οποίο (όπως και στην απόδειξη του (1) $\Longrightarrow$ (2) στο Θεώρημα **8.9**) φαναιρώνει ότι είτε $A \leq_c B$ είτε $B \leq_c A$, το οποίο με τη σειρά του συνεπάγεται το **AC**. $\dashv$

Θεωρούμε τώρα δύο εύκολα πορίσματα του Αξιώματος Επιλογής που εκφράζουν απλούστερες αρχές επιλογής.

**8.12. Αρχή Απαριθμητής Επιλογής** (Countable Principle of Choice), $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$. Για κάθε σύνολο $B$ και κάθε διμελή σχέση $P \subseteq \mathbb{N} \times B$ ανάμεσα σε φυσικούς αριθμούς και μέλη του $B$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists y \in B)P(n, y) \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to B)(\forall n \in \mathbb{N})P(n, f(n)).$$

**8.13.** (**VII**) **Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών** (Axiom of Dependent Choices), **DC**. Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$,

$$\begin{aligned} &a \in A \,\&\, (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y) \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)[f(0) = a \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})P(f(n), f(n+1))]. \end{aligned}$$

Σε αντιπαράθεση με το πλήρες Αξίωμα Επιλογής που απαιτεί την ύπαρξη συναρτήσεων επιλογής $f : A \to B$ για όλα τα $A$, $B$, η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ δικαιολογεί μόνο ακολουθία ελεύθερων (ανεξάρτητων) επιλογών από το $B$, που ικανοποιούν διαδοχικά τις συνθήκες

$$P(0, f(0)),\ P(1, f(1)),\ P(2, f(2)), \cdots$$

Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών επίσης δικαιολογεί μόνο ακολουθία επιλογών, όπου όμως η καθεμιά απ' αυτές τις επιλογές μπορεί να εξαρτάται από την προηγούμενη, αφού όλες τώρα πρέπει να ικανοποιούν τις συνθήκες

$$P(f(0), f(1)),\ P(f(1), f(2)),\ P(f(2), f(3)), \cdots$$

Είναι εύκολα ισοδύναμο με την εξής, φαινομενικά ισχυρότερη αρχή που επιτρέπει σε κάθε επιλογή να εξαρτάται απ' όλες τις προηγούμενές της.

**8.14. Πρόταση.** *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: για κάθε σύνολο $A$ και κάθε σχέση $P \subseteq A^* \times A$ μεταξύ λέξεων και στοιχείων του $A$,*

$$(\forall u \in A^*)(\exists x \in A)P(u, x) \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)(\forall n)P(\overline{f}(n), f(n)).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη απ' αυτή την εκδοχή του **DC** της «επίσημης» είναι εύκολη και την αφήνουμε για άσκηση. Για το αντίστροφο, δεχόμαστε το **DC** και την υπόθεση της φαινομενικά ισχυρότερης εκδοχής του, και ορίζουμε στο $A^*$ τη σχέση

$$Q(u,v) \iff_{\text{ορ}} (\exists x \in A)[v = u \star \langle x \rangle \,\&\, P(u,x)];$$

προφανώς έχουμε $(\forall u \in A^*)(\exists v \in A^*)Q(u,v)$, το **DC** μας δίνει μια συνάρτηση $g : \mathbb{N} \to A^*$ τέτοια ώστε $g(0) = \emptyset$ και $(\forall n)Q(g(n), g(n+1))$, και η συνάρτηση που χρειαζόμαστε είναι η $f = \bigcup g$, για την οποία ισχύει $f(n) = g(n+1)(n)$ και $\overline{f}(n) = g(n)$. ⊣

**8.15. Άσκηση.** *Δείξε την άλλη κατεύθυνση της Πρότασης* **8.14**.

**8.16. Θεώρημα.** (1) *Το Αξίωμα Επιλογής συνεπάγεται το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών.*

(2) *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών συνεπάγεται την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $\varepsilon : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ συνάρτηση επιλογής για το $A$. Αν ισχύει η υπόθεση του **DC**, τότε η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ που χρειαζόμαστε για το συμπέρασμά του ορίζεται με την αναδρομή:

$$f(0) = a,$$
$$f(n+1) = \varepsilon(\{y \in A \mid P(f(n), y)\}).$$

(2) Δεχόμαστε την υπόθεση της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής και θέτουμε $A = \mathbb{N} \times B$ και $a = (0, b)$, όπου $b \in B$ είναι σημείο τέτοιο ώστε $P(0, b)$. Στο $A$ ορίζουμε τη σχέση

$$Q((n,x),(m,y)) \iff_{\text{ορ}} m = n+1 \,\&\, P(m,y).$$

Η συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times B$ που εγγυάται το **DC** γι' αυτά τα $a$ και $Q$ αποδίδει ζεύγη ως τιμές, οπότε $f(n) = (g(n), h(n))$ με $g(0) = 0$ και $h(0) = b$ για κατάλληλες συναρτήσεις $g$, $h$, και για κάθε $n$, $g(n+1) = g(n)+1$, $P(g(n+1), h(n+1))$. Συνάγεται ότι για κάθε $n$, $g(n) = n$ και $P(n, h(n))$, όπως πρέπει για το συμπέρασμα της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής. ⊣

Χρειαζόμαστε έναν ακόμη ορισμό για τη διατύπωση της πιο χρήσιμης εκδοχής του Αξιώματος Εξαρτημένων Επιλογών.

**8.17. Ορισμός.** Ένα γράφημα $(G, \to_G)$ είναι **εδραιωμένο** (grounded) ή **καλά θεμελιωμένο** (well founded) αν κάθε μη κενό υποσύνολο του $G$ έχει *ελαχιστικό σημείο*, δηλαδή

$$\text{αν } \emptyset \neq X \subseteq G, \text{ τότε } (\exists m \in X)(\forall x \in X)[m \not\to_G x]. \tag{8-3}$$

Ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $(P, \leq)$ είναι **εδραιωμένος** αν το σχετικό «αντίστροφο αυστηρό γράφημα» $(P, >)$ είναι εδραιωμένο, αν δηλαδή για κάθε $X$,

$$\text{αν } \emptyset \neq X \subseteq P, \text{ τότε } (\exists m \in X)(\forall x \in X)[x \leq m \Longrightarrow x = m]. \tag{8-4}$$

**8.18. Άσκηση.** *Δείξε ότι μια γραμμική διάταξη $(P, \leq)$ είναι εδραιωμένη αν και μόνον αν είναι καλή διάταξη.*

**8.19. Πρόταση.** *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: ένα γράφημα $G$ είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν δεν επιδέχεται* **άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες**, *δηλαδή αν δεν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to G$ τέτοια ώστε για κάθε $n$, $f(n) \to_G f(n+1)$,*

$$f(0) \to_G f(1) \to_G f(2) \to_G \cdots.$$

Αποδειξη. Πρώτα δεχόμαστε το $\mathbf{DC}$. Αν η $f : \mathbb{N} \to G$ είναι άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα, τότε το σύνολο $\{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ δεν έχει ελαχιστικό σημείο, άρα το $G$ δεν είναι εδραιωμένο. Αντιστρόφως, αν το $G$ έχει μη κενό υποσύνολο $X$ χωρίς ελαχιστικό σημείο, τότε $(\forall x \in X)(\exists y \in X)[x \to_G y]$ και το $\mathbf{DC}$ μας δίνει μια άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα ξεκινώντας με κάποιο $a \in X$.

Δεχόμαστε τώρα ότι κάθε γράφημα χωρίς άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες είναι εδραιωμένο και τις υποθέσεις $a \in A$ και

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y)$$

του αξιώματος $\mathbf{DC}$, και θεωρούμε το γράφημα $(A, \to_A)$ όπου

$$x \to_A y \iff_{\text{ορ}} P(x, y) \quad (x, y \in A).$$

Το συμπέρασμα του $\mathbf{DC}$ εγγυάται ακριβώς ότι το $(A, \to_A)$ έχει μιαν άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα που ξεκινά με το $a$, έτσι ώστε αν δεν ισχύει, υπάρχει κάποιο ελαχιστικό στοιχείο $m \in A$· αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $(\forall y \in A)\neg P(m, y)$, που είναι ενάντιο στην υπόθεση του $\mathbf{DC}$. ⊣

Τα εδραιωμένα γραφήματα έχουν πολλές από τις ιδιότητες των καλά διατεταγμένων χώρων, και ιδιαίτερα μπορούμε να αποδείξουμε προτάσεις με επαγωγή και να ορίσουμε συναρτήσεις με αναδρομή σ' αυτά, βλ. τα Προβλήματα **x8.10**, **x8.11** και το Θεώρημα **11.5**. Η εύκολη κατεύθυνση αυτού του θεωρήματος κάνει το $\mathbf{DC}$ ιδιαίτερα χρήσιμο στη μελέτη τους, επειδή είναι συνήθως πολύ ευκολότερο να επαληθεύσουμε ότι δεν υπάρχουν άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες σε κάποιο γράφημα $G$ παρά να αποδείξουμε κατευθείαν ότι το $G$ είναι εδραιωμένο.

**8.20. Όμως αληθεύει; (3)** Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι πριν διατυπωθεί αυστηρά από τον Zermelo, το Αξίωμα Επιλογής είχε πολλές φορές χρησιμοποιηθεί «σιωπηρά» στα κλασικά μαθηματικά, και ιδιαίτερα στην ανάλυση. Όμως *αυτές οι κλασικές εφαρμογές μπορούν όλες να στηριχτούν στο Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών*, και μάλιστα οι περισσότερες απαιτούν μόνο την ασθενέστερη Αρχή Απαριθμητής Επιλογής. Αυτό θα γίνει προφανές στο Κεφάλαιο **10** και στο Παράρτημα **A**. Ο Zermelo δέχτηκε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής επειδή είναι φυσική υπόθεση στο πλαίσιο της συνολοθεωρίας του Cantor· επειδή χρειάζεται για την απόδειξη του Θεωρήματος Καλής Διάταξης και της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων· και επειδή είναι απαραίτητο για την ανάπτυξη της πληθικής αριθμητικής. Αυτή η διαφορά ανάμεσα στις αρχές επιλογής που χρειάζονται για τα κλασικά μαθηματικά και αυτές που είναι απαραίτητες για την καινούργια θεωρία συνόλων του Cantor εξηγεί κατά μεγάλο μέρος την άγρια αντίδραση στα αξιώματα του Zermelo από τους διακεκριμένους αναλύστες της εποχής του (εν οις και ο πολύς Borel), που είχαν στηρίξει πολλά από τα θεωρήματά τους σε αρχές επιλογής—και εξακολούθησαν να χρησιμοποιούν τέτοιες αρχές ενώ συγχρόνως αποδοκίμαζαν τη γενική συνολοθεωρία ως μια ψευδαίσθηση: για τη θεμελίωση της κλασικής ανάλυσης του 19ου αιώνα, αρκεί το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών, ενώ το γενικότερο Αξίωμα Επιλογής δε χρειάζεται, και επιπλέον έχει μερικά αντιδιαισθητικά πορίσματα, όπως το Θεώρημα Καλής Διάταξης.

Εδώ όμως πρέπει να παρατηρήσουμε ότι και στη γενική συνολοθεωρία, όπου γενικά δεχόμαστε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής ως προφανές, πολλά από τα βασικά θεωρήματα δεν το χρειάζονται και ειδικότερα *όλα τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου* **2** *μπορούν να στηριχτούν αξιωματικά στο Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών*. Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι αποδείξαμε όλα τα βασικά αποτελέσματα σχετικά με τους καλά διατεταγμένους χώρους στο προηγούμενο κεφάλαιο, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καμία αρχή επιλογής. Γι' αυτό το λόγο θα αποκλίνουμε τεχνικά από τον Zermelo και θα δεχτούμε ως βασικό αξίωμα το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών αντί του ισχυρότερου, πλήρους Αξιώματος Επιλογής. Λέμε «τεχνικά», επειδή δεν έχουμε αμφιβολίες για την αλήθεια του Αξιώματος Επιλογής, και ποτέ δεν θα διστάσουμε να το επικαλεστούμε όταν χρειάζεται, μόνο που σε τέτοιες περιπτώσεις θα το συμπεριλαμβάνουμε (διακριτικά) ανάμεσα στις υποθέσεις.

**8.21. Η αξιωματική θεωρία ZDC**. Το αξιωματικό σύστημα **ZDC** αποτελείται από τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) του Κεφαλαίου **3** και το Αξίωμα (**VII**) Εξαρτημένων Επιλογών **8.13**. Συμβολικά:

$$\mathbf{ZDC} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \mathbf{DC} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VII}).$$

Από τώρα και μέχρι το Κεφάλαιο **11**, θα χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις χωρίς ρητή επίκληση τα αξιώματα της **ZDC**. Όταν χρειαζόμαστε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής, θα σημειώνουμε τις σχετικές προτάσεις με το σημάδι (**AC**). Στο Κεφάλαιο **11** θα συμπληρώσουμε την αξιωματοποίησή μας προσθέτοντας στην **ZDC** το *Αξίωμα Αντικατάστασης*.

**8.22. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας** (consistency, independence). Μήπως είναι εφικτό να καταστείλουμε την αντιγνωμία για το Αξίωμα Επιλογής απλώς *αποδεικνύοντας ή διαψεύδοντάς* το με τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**); Κανένα από τα δύο ενδεχόμενα δεν μοιάζει πιθανό. Αφενός το **AC** κατά πάσα πιθανότητα αληθεύει, όπως αληθεύουν και τα (**I**) – (**VI**), και βεβαίως δεν μπορούμε να διαψεύσουμε αληθή πρόταση με χρήση αληθών αξιωμάτων. Αφετέρου, το **AC** έχει τη μορφή γνήσια νέας αρχής της συνολοθεωρίας και δεν μοιάζει πιθανό ότι θα μπορέσουμε να το αποδείξουμε από τις άλλες μόνο με τη λογική. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν αυστηρές αποδείξεις ότι το Αξίωμα Επιλογής ούτε αποδείχνεται ούτε και διαψεύδεται από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**).

Ο πιο άμεσος τρόπος να δείξουμε ότι μια πρόταση $\phi$ δεν μπορεί να αποδειχτεί σε κάποιο αξιωματικό σύστημα **T**, είναι να κατασκευάσουμε ένα **πρότυπο** (μοντέλο, model) του **T**, όπου η $\phi$ δεν ισχύει. Θεωρούμε για παράδειγμα το κλασικό πρόβλημα για την επίπεδη Ευκλείδεια γεωμετρία, αν το *Αξίωμα Παραλλήλων*[19] μπορεί να αποδειχτεί από τα άλλα αξιώματα. Για να δείξουμε ότι αυτό είναι αδύνατο, δηλώνουμε ότι στο μέλλον με «επίπεδο» θα εννοούμε τον (ανοικτό, πεπερασμένο) δίσκο ακτίνας 1, το χώρο όλων των σημείων (του «αληθινού» επιπέδου) σε απόσταση μικρότερη μιας μονάδας από το αρχικό σημείο $O$· και με «ευθεία» θα εννοούμε την τομή μιας «αληθινής» ευθείας μ' αυτό τον δίσκο. Δεν είναι δύσκολο να ορίσουμε σ' αυτή τη δομή τις υπόλοιπες βασικές έννοιες του Ευκλείδη και να επαληθεύσουμε ότι όλα τα αξιώματά του πλην αυτού των παραλλήλων αληθεύουν με αυτούς τους ορισμούς. Έτσι έχουμε ένα πρότυπο της Επίπεδης Γεωμετρίας στην οποία το Αξίωμα Παραλλήλων δεν ισχύει, αφού προφανώς για κάθε δοσμένη «ευθεία» $L$ και σημείο $P$ έξω από την $L$ υπάρχουν πολλές «ευθείες» που περιέχουν το $P$ και δεν τέμνουν την $L$. Έπεται ότι το Αξίωμα Παραλλήλων δεν μπορεί να αποδειχτεί από τα άλλα «μόνο με τη λογική»: γιατί αν αυτό ήταν εφικτό, τότε θα αλήθευε σε κάθε δομή που αληθεύουν τα άλλα, και εμείς βρήκαμε μια τέτοια δομή όπου δεν αληθεύει.

Για να ορίσουμε πρότυπο αξιωματικής θεωρίας, γενικά, πρέπει να καθορίσουμε ένα πεδίο αντικειμένων και να ερμηνεύσουμε σ' αυτό τις βασικές έννοιες της θεωρίας, έτσι ώστε τα αξιώματά της να αληθεύουν. Για μια συνολοθεωρία, αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ορίσουμε τις έννοιες του *«να είναι σύνολο»* και *«να ανήκει»* σε κάποιο πεδίο αντικειμένων, και επίσης να καθορίσουμε ποιες συνθήκες σ' αυτό το πεδίο θα καλέσουμε **οριστικές**. Πρότυπα της **ZDC** δεν κατασκευάζονται εύκολα, μιας και η θεωρία αυτή είναι πολύ ισχυρή· στο Παράρτημα **B** θα μελετήσουμε μερικά πολύ ειδικά πρότυπα (τους «κόσμους»), αλλά οι πιο ενδιαφέρουσες κατασκευές χρειάζονται μεθόδους της *μαθηματικής λογικής* που δεν χρησιμοποιούμε σ' αυτές τις Σημειώσεις: θα περιοριστούμε στην προσεκτική διατύπωση μερικών από τα πολλά, διάσημα αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας του κλάδου όπως καλύπτουμε τα σχετιζόμενα μέρη του.

Ευθύς εξαρχής δεχτήκαμε στο **3.6** ότι η θεωρία μας έχει ένα πρότυπο, τον κόσμο αντικειμένων $\mathcal{W}$, όπου (τουλάχιστον) τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) αληθεύουν. Η υπόθεση αυτή είναι φυσική και μάλιστα απαραίτητη αν η απασχόλησή μας με τη συνολοθεωρία έχει κάποιο νόημα, αλλά δεν συμπεριλαμβάνεται στα αξιώματα της **ZDC** ή των άλλων θεωριών που θα μελετήσουμε.[20] Δεν τη χρειαζόμαστε σχεδόν ποτέ, παρά μόνο όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη προτύπων για

---

[19] Το πέμπτο «Αίτημα» του Ευκλείδη για τις παράλληλες είναι ισοδύναμο με την αρχή ότι για κάθε ευθεία $L$ και κάθε σημείο $P$ έξω της $L$, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία $L'$ που περιέχει το $P$ και δεν τέμνει την $L$.

[20] Και να το θέλαμε, δεν είναι εφικτό να δεχτούμε ένα τέτοιο αξίωμα: η πρόσθεση της ύπαρξης προτύπου της **ZDC** στα αξιώματα της **ZDC** δημιουργεί μια καινούρια, πλουσιότερη θεωρία **ZDC**$'$ και το νέο πρόβλημα, αν αυτή η **ZDC**$'$ έχει πρότυπο. Στο κορυφαίο αποτέλεσμα της Μαθηματικής Λογικής, ο Gödel έδειξε (αυστηρά) ότι είναι αδύνατο να παρακάμψουμε αυτό το λογικό αίνιγμα: *δεν υπάρχει αξιωματική θεωρία* (συνεπής και άξια μελέτης) *που συμπεριλαμβάνει στα αξιώματα ή θεωρήματά της το αίτημα ότι επιδέχεται πρότυπο.*

επεκτάσεις της **ZDC**: για να κατασκευάσουμε τέτοια πρότυπα πρέπει να ξεκινήσουμε από κάπου, και αυτό είναι πάντα το σταθερό, απαρχής δεκτό πρότυπο της θεωρίας μας.

**8.23. Προϋπόθεση για ισχυρισμούς ύπαρξης προτύπων**. Από δω και μπρος και χωρίς περαιτέρω ειδοποίηση, όλοι οι ισχυρισμοί σ' αυτές τις Σημειώσεις ύπαρξης προτύπων, συνέπειας θεωριών και ανεξαρτησίας προτάσεων βασίζονται στην ύπαρξη προτύπου των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**) και (**VIII**), του *Αξιώματος Αντικατάστασης* που θα εισαγάγουμε στο Κεφάλαιο **11**.

**8.24. Η συνέπεια του Αξιώματος Επιλογής** (Gödel, 1939). *Η θεωρία του Zermelo* **ZDC**+**AC** *με το πλήρες Αξίωμα Επιλογής έχει πρότυπο* και επομένως τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) δεν διαψεύδουν το **AC**, δηλαδή το **AC** είναι *συνεπές με τα* (**I**) – (**VI**). Το διάσημο πρότυπο $L$ των *κατασκευάσιμων συνόλων* (constructible sets) του Gödel έχει πολλές ιδιότητες κανονικότητας και η κατασκευή του αποδεικνύει τη συνέπεια του **AC** με θεωρίες πολύ ισχυρότερες της (**I**) – (**VI**). Θα αναφερθούμε σ' αυτό πολλές φορές στη συνέχεια.

**8.25. Η ανεξαρτησία του Αξιώματος Επιλογής** (Fraenkel-Mostowski, 1939, Cohen, 1963). *Καθεμιά από τις θεωρίες*

$$(\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \neg\mathbf{AC}_{\mathbb{N}},\ (\mathbf{I}) - (\mathbf{VI}) + \mathbf{AC}_{\mathbb{N}} + \neg\mathbf{DC},\ \mathbf{ZDC} + \neg\mathbf{AC}$$

*έχει πρότυπο*. Συνεπώς δεν μπορούμε να αποδείξουμε το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ από τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), δεν μπορούμε να αποδείξουμε το **DC** από τα κατασκευαστικά αξιώματα και το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, και δεν μπορούμε να αποδείξουμε το **AC** στην **ZDC**, η καθεμιά απ' αυτές τις αρχές επιλογής είναι ισχυρότερη από τις προηγούμενες. Οι πρώιμες κατασκευές προτύπων των Fraenkel και Mostowski είτε περιείχαν άτομα ή είχαν κάποια άλλη, τεχνική αδυναμία που περιόριζε τη δυνατότητα γενίκευσής τους. Ο Cohen κατασκεύασε τα πρότυπά του με τη διάσημη μέθοδο του *αναγκασμού ή επιβολής* (forcing) που εφηύρε, με την οποία ο ίδιος (και άλλοι) απέδειξαν κατόπιν πολλά άλλα αποτελέσματα ανεξαρτησίας. Θα αναφερθούμε στη μέθοδο αναγκασμού πολλές φορές στη συνέχεια.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 8

Καλούμε δύο προτάσεις $\phi$ και $\psi$ **κατασκευαστικά ισοδύναμες** αν η ισοδυναμία τους $\phi \iff \psi$ μπορεί να αποδειχτεί με βάση μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), δηλαδή χωρίς χρήση οποιασδήποτε αρχής επιλογής.

**x8.1.** Δείξε το Αξίωμα Επιλογής (8-1) για πεπερασμένα $A$.

**x8.2.** Το Αξίωμα Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $A \neq \emptyset$ και κάθε $f : A \to B$, υπάρχει συνάρτηση $g : B \to A$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$, $f(g(f(x))) = f(x)$.

**x8.3.** Το Αξίωμα Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $I$ και κάθε οικογένεια συνόλων $(i \mapsto A_i)$ με δείκτες στο $I$,

$$(\forall i \in I)[A_i \neq \emptyset] \Longrightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset.$$

Η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής είναι κατασκευαστικά ισοδύναμη με το εξής: για κάθε ακολουθία συνόλων $(n \mapsto A_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})[A_n \neq \emptyset] \Longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Μαζί με το Πρόβλημα **x5.28**, το επόμενο πρόβλημα δίνει μια διατύπωση της Αρχής Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ κατευθείαν από τη βασική έννοια του «ανήκειν», χωρίς αναφορά στο $\mathbb{N}$ ή την έννοια της «συνάρτησης».

**x8.4.** Η Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ είναι κατασκευαστικά ισοδύναμη με το εξής: κάθε άπειρη, απαριθμητή οικογένεια $\mathcal{E}$ μη κενών και ξένων ανά δύο συνόλων επιδέχεται σύνολο επιλογής.

Στα επόμενα τέσσερα προβλήματα θεωρούμε αρχές επιλογής που μοιάζουν ασθενέστερες του **DC** αλλά είναι κατασκευαστικά ισοδύναμές του.

* **x8.5.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε μη κενό σύνολο $A$ και κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$,

$$\text{αν} \quad (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x,y),$$
$$\text{τότε} \quad (\exists B \subseteq A)[B \neq \emptyset \,\&\, (\exists f : B \to B)(\forall x \in B)P(x, f(x))].$$

* **x8.6.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σχέση $P \subseteq A \times A$ και κάθε $a \in A$,

$$\text{αν} \quad (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x,y),$$
$$\text{τότε} \quad (\exists B \subseteq A)[a \in B \,\&\, (\exists f : B \to B)(\forall x \in B)P(x, f(x))].$$

* **x8.7.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: ένας μερικά διατεταγμένος χώρος $P$ είναι εδραιωμένος αν και μόνον αν δεν έχει **άπειρες, φθίνουσες αλυσίδες**, δηλαδή για κάθε $f : \mathbb{N} \to P$,

$$(\forall n \in \mathbb{N})[f(n+1) \leq f(n)] \Longrightarrow (\exists n)[f(n+1) = f(n)].$$

Μπορούμε επίσης να εκφράσουμε το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών κατευθείαν από τη σχέση του «ανήκειν», αλλά κάπως περιπλεγμένα:

* **x8.8.** Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο $A$ και κάθε διμελή οριστική συνθήκη $P$,

$$\text{αν} \quad \Big[\emptyset \in A \,\&\, (\forall u, v \in A)[P(u,v) \Longrightarrow (\exists! x)[v = u \cup \{x\}]]$$
$$\&\, (\forall u \in A)(\exists v \in A)P(u,v)\Big],$$
$$\text{τότε} \quad (\exists B \subseteq A)[\emptyset \in B \,\&\, (\forall u \in B)(\exists! v \in B)P(u,v)].$$

$^*$**x8.9.** Δείξε ότι η εξής «λεξικογραφική» διάταξη του $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ είναι όντως γραμμική διάταξη, αλλά όχι καλή:

$$f \leq g \iff_{\text{ορ}} f = g \vee (\exists n \in \mathbb{N})[(\forall i < n)[f(i) = g(i)] \,\&\, f(n) < g(n)].$$

Συμπέρανε ότι το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ επιδέχεται γραμμική διάταξη.

**x8.10. Εδραιωμένη Επαγωγή**. Για κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ και κάθε μονομελή οριστική συνθήκη $P$,

$$\text{αν} \;\; (\forall x \in G)[(\forall y)(x \to_G y \Longrightarrow P(y)) \Longrightarrow P(x)], \;\text{τότε}\;\; (\forall x \in G)P(x).$$

$^*$**x8.11.** Για κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ και κάθε συνάρτηση

$$h : (G \rightharpoonup E) \times G \to E,$$

υπάρχει μοναδική (ολική) συνάρτηση $f : G \to E$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$f(x) = h(f \restriction \{y \in G \mid x \to_G y\}, x) \quad (x \in G).$$

Υποδειξη. Τροποποίησε την απόδειξη του θεωρήματος **7.24**, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις

$$\sigma_t : \{x \in G \mid t \Rightarrow_G x\} \to E$$

με πεδίο ορισμού «αρχικά τμήματα» της κληρονομικής κλειστότητας $\Rightarrow_G$ της $\to_G$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

# ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΕΠΟΜΕΝΑ

Θα αρχίσουμε αυτό το κεφάλαιο με μερικά αποτελέσματα για απαριθμητά σύνολα των οποίων οι αποδείξεις επεξηγούν τη διαφορά των αρχών επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, **DC** και **AC**. Ο κύριος στόχος μας, όμως, είναι να αποδείξουμε μερικά σημαντικά επακόλουθα του πλήρους Αξιώματος Επιλογής, ανάμεσά τους και τους βασικούς κανόνες της *πληθικής αριθμητικής*. Το ενδεικτικό σημάδι (**AC**) θα διακοσμήσει σχεδόν όλες τις αριθμημένες προτάσεις.

**9.1. Θεώρημα.** *Κάθε άπειρο σύνολο έχει άπειρο, απαριθμητό υποσύνολο, και επομένως, για κάθε πληθάριθμο $\kappa$, είτε $\kappa <_c \aleph_0$ είτε $\aleph_0 \leq_c \kappa$.*

Απόδειξη. Αν το $A$ είναι άπειρο, προφανώς

$$(\forall u \in A^*)(\exists y \in A)(\forall i < \mathrm{lh}(u))[u(i) \neq y].$$

που με το **DC** συνεπάγεται ότι υπάρχει ακολουθία $f : \mathbb{N} \to A$ τέτοια ώστε

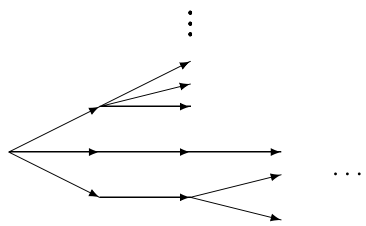
$$(\forall n)(\forall i < n)[f(i) \neq f(n)],$$

και η εικόνα της $f[\mathbb{N}]$ είναι άπειρο, απαριθμητό υποσύνολο του $A$. Το δεύτερο συμπέρασμα συνάγεται εύκολα, διαχωρίζοντας περιπτώσεις αν ο $\kappa$ είναι πεπερασμένος ή άπειρος. $\dashv$

Το νόημα του δεύτερου ισχυρισμού στο Θεώρημα είναι ότι παρόλο που η γενική Εικασία Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων χρειάζεται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής για την απόδειξή της, η ειδική (και σημαντική) περίπτωση συγκρισιμότητας με τον $\aleph_0$ είναι θεώρημα της **ZDC**. Το **9.1** μπορεί μάλιστα να αποδειχτεί με επίκληση μόνο της ασθενέστερης Αρχής Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ αντί του **DC**, αλλά η απόδειξη είναι κάπως πιο τεχνική, βλ. Πρόβλημα **x9.1**. Το φαινόμενο είναι ενδεικτικό της σχέσης ανάμεσα στο **DC** και το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$: πολλά αποτελέσματα των οποίων οι φυσικές αποδείξεις στηρίζονται στο **DC** έπονται της ασθενέστερης αρχής, αλλά με περισσότερη προσπάθεια.

Το Θεώρημα **9.1** επίσης ξεκαθαρίζει τη σχέση ανάμεσα στα άπειρα και τα Dedekind-άπειρα σύνολα.

**9.2. Πόρισμα.** *Ένα σύνολο $A$ είναι πεπερασμένο αν και μόνον αν είναι πεπερασμένο κατά τον Dedekind* (**4.31**), *δηλαδή αν δεν υπάρχει μονομορφισμός $\pi : A \rightarrowtail B \subsetneq A$ από το $A$ σε ένα γνήσιο υποσύνολό του.*



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **9.1**. Μη κενό δέντρο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Τα πεπερασμένα σύνολα είναι Dedekind-πεπερασμένα από την Αρχή του Περιστερεώνα, **5.27**. Αν το $A$ είναι άπειρο, έστω $f : \mathbb{N} \rightarrowtail A$ απαρίθμηση χωρίς επαναλήψεις κάποιου άπειρου, απαριθμητού υποσυνόλου του. Ο μονομορφισμός

$$\pi(x) = \begin{cases} f(n+1) & \text{αν για κάποιο } n,\ x = f(n), \\ x & \text{αν } x \notin f[\mathbb{N}] \end{cases}$$

βεβαιώνει ότι το $A$ είναι Dedekind-άπειρο, εφόσον $\pi[A] = A \setminus \{f(0)\}$. ⊣

Θεωρούμε τώρα ένα απλό αλλά πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα για δέντρα, του οποίου η απόδειξη προσφέρει ακόμη ένα παράδειγμα χρήσης του **DC** και της σχέσης του με το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$.

**9.3. Ορισμός. Δέντρο** (tree)[21] σε σύνολο $E$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο $T \subseteq E^*$ λέξεων από το $E$ που είναι κλειστό προς τα κάτω, δηλαδή

$$u \sqsubseteq v \in T \Longrightarrow u \in T.$$

Από την (5-16), για λέξεις (πεπερασμένες ακολουθίες), $u \sqsubseteq v \iff u \subseteq v$.

Πολλοί όροι χρησιμοποιούνται στη μελέτη δέντρων, οι περισσότεροι πηγάζουν από τη συνήθεια να απεικονίζουμε τα δέντρα σαν ... δέντρα. Τα μέλη του $T$ είναι οι **κόμβοι** (nodes) ή **πεπερασμένα κλαδιά** του (finite branches), και κάθε μη κενό δέντρο έχει το $\emptyset$ ως ελάχιστο κόμβο, τη **ρίζα** (root). Αν $u \star \langle x \rangle \in T$, τότε το $u$ είναι **γονέας** (parent) του $u \star \langle x \rangle$ και το $u \star \langle x \rangle$ είναι **παιδί** (child) του $u$ στο $T$. Κάθε κόμβος εκτός από τη ρίζα έχει ακριβώς ένα γονέα, αλλά μπορεί να έχει πολλά παιδιά· αν δεν έχει παιδιά είναι **τερματικός κόμβος** (terminal node ή leaf). Σε κάθε κόμβο $u$ αντιστοιχίζουμε το **υπόδεντρο**

$$T_u =_{\text{ορ}} \{w \in T \mid w \sqsubseteq u \vee u \sqsubseteq w\} \tag{9-1}$$

των κόμβων που είναι συγκρίσιμοι με τον $u$. Εύκολα:

$$T_u = \{w \mid w \sqsubseteq u\} \cup \bigcup \{T_v \mid \text{το } v \text{ είναι παιδί του } u\}. \tag{9-2}$$

[21] Δέντρα χρησιμοποιούνται σε πολλούς μαθηματικούς κλάδους, με διαφορετικούς ορισμούς ανάλογα με τις ανάγκες του κάθε κλάδου. Αυτός ο ορισμός είναι ο πιο γενικός που θα χρειαστούμε σ' αυτές τις Σημειώσεις.

**9.4. Άσκηση.** *Δείξε την* (9-2).

Τα **άπειρα κλαδιά** (infinite branches) ενός δέντρου $T$ είναι οι άπειρες ακολουθίες του, και τις συλλέγουμε στο **σώμα** (body) του $T$,

$$[T] =_{\text{ορ}} \{f : \mathbb{N} \to E \mid (\forall n)[\overline{f}(n) \in T]\}. \tag{9-3}$$

Κάθε άπειρο κλαδί δέντρου παράγει ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών κόμβων, άρα πεπερασμένα δέντρα έχουν κενά σώματα. Είναι επίσης εύκολο να κατασκευάσουμε άπειρα δέντρα με κενά σώματα:

**9.5. Άσκηση.** *Δείξε ότι το δέντρο*

$$T = \{u \in \mathbb{N}^* \mid (\forall i < \text{lh}(u),\ i > 0)[u(i-1) > u(i)]\}$$

*στους φυσικούς αριθμούς είναι άπειρο αλλά δεν έχει άπειρο κλαδί.*

**9.6. Ορισμός.** Το δέντρο $T$ είναι **πεπερασμένης διακλάδωσης** (finitely branching) αν κάθε κόμβος του $T$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος παιδιών.

Το δέντρο στην Άσκηση **9.5** δεν είναι πεπερασμένης διακλάδωσης (στη ρίζα), και δεν θα μπορούσε να είναι εξαιτίας του επόμενου, βασικού αποτελέσματος.

**9.7. Λήμμα του König.** *Κάθε άπειρο, πεπερασμένης διακλάδωσης δέντρο έχει τουλάχιστον ένα άπειρο κλαδί.*

Αποδειξη. Έστω $T \subseteq E^*$ άπειρο δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και έστω

$$S =_{\text{ορ}} \{u \in T \mid T_u \text{ είναι άπειρο}\}$$

το υπόδεντρο όλων των κόμβων του $T$ που είναι συγκρίσιμα με άπειρο πλήθος κόμβων. Εφόσον το $T_\emptyset = T$ είναι άπειρο από την υπόθεση, η ρίζα $\emptyset \in S$, και η (9-2) συνεπάγεται ότι το $S$ δεν έχει τερματικούς κόμβους,

$$(\forall u \in S)(\exists x \in T)[u \star \{x\} \in S],$$

επειδή κάθε $u$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος παιδιών και το άπειρο σύνολο $S_u$ δεν μπορεί να είναι η ένωση πεπερασμένης οικογένειας πεπερασμένων συνόλων. Από το ισχυρό **DC** Πρόταση **8.14**, έπεται ότι υπάρχει κάποια $f : \mathbb{N} \to E$ τέτοια ώστε για κάθε $n$, $\overline{f}(n) \in S$ και το $f(n+1)$ να είναι παιδί του $\overline{f}(n)$, έτσι που η $f$ είναι ένα άπειρο κλαδί του $S$—συνεπώς και του $T$. ⊣

Το Λήμμα του König είναι πολύ χρήσιμο, ιδιαίτερα στην επόμενη, «κατασκευαστική» εκδοχή του.

**9.8. Ορισμός.** Ένα σύνολο κόμβων $B \subseteq T$ είναι **φράχτης** (bar) του δέντρου $T$, αν κάθε άπειρο κλαδί του $T$ περιέχει τουλάχιστον έναν κόμβο του $B$,

$$(\forall f \in [T])(\exists n)[\overline{f}(n) \in B].$$

**9.9. Θεώρημα Βεντάλιας** (Fan Theorem). *Έστω δέντρο $T$ πεπερασμένης διακλάδωσης. Κάθε φράχτης $B$ του $T$ έχει πεπερασμένο υποσύνολο*

$$B_0 = \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq B,$$

*που είναι επίσης φράχτης του $T$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $B_0$ το σύνολο των ελαχιστικών κόμβων του φράχτη $B$,

$$B_0 =_{\text{ορ}} \{u \in B \mid (\forall v \subsetneq u)[v \notin B]\},$$

Το $B_0$ είναι επίσης φράχτης, επειδή αν $f \in [T]$ και $n$ είναι ο ελάχιστος αριθμός τέτοιος ώστε $\overline{f}(n) \in B$, τότε $\overline{f}(n) \in B_0$. Έστω $S$ το δέντρο όλων των αρχικών τμημάτων κόμβων του $B_0$,

$$S =_{\text{ορ}} \{v \in T \mid (\exists u \in B_0)[v \sqsubseteq u]\}.$$

Παρατηρούμε ότι το $S$ είναι δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης (υπόδεντρο του $T$), και οι τερματικοί του κόμβοι είναι ακριβώς τα μέλη του $B_0$, εφόσον κανείς κόμβος στο $B_0$ δεν είναι γνήσιο αρχικό τμήμα κάποιου άλλου. Άρα το $S$ δεν έχει άπειρο κλαδί, αφού το $B_0$ είναι φράχτης του $T$. Έπεται ότι το $S$ είναι πεπερασμένο, από το Λήμμα του König και επομένως το υποσύνολό του $B_0$ είναι επίσης πεπερασμένο. ⊣

Η εκπληκτικά εύκολη απόδειξη του Λήμματος του König είναι τυπική επιχειρημάτων που στηρίζονται στο **DC**, αφενός επειδή η βασική δομή της απόδειξης φανερά επικαλείται το **DC**, αλλά επίσης και για τους εξής δύο λόγους.

(1) Το Λήμμα του König μπορεί να αποδειχτεί για κάθε δέντρο $T$ σε καλά διατάξιμο σύνολο $E$ χωρίς επίκληση ουδεμίας αρχής επιλογής, Πρόβλημα **x9.3**. Σε πολλές εφαρμογές $E = \mathbb{N}$ ή το $E$ είναι πεπερασμένο, και γι' αυτές δεν χρειαζόμαστε καμία επιλογή.

(2) Όπως και το **9.1**, το Λήμμα του König μπορεί να αποδειχτεί με επίκληση του $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ αντί του **DC**, Πρόβλημα **x9.4**.

Πολλές από τις εφαρμογές του πλήρους Αξιώματος Επιλογής έχουν την εξής δομή: διατυπώνουμε και δείχνουμε στη θεωρία **ZDC** (ή και χωρίς καθόλου επιλογές) κάποια ενδιαφέρουσα πρόταση για τα καλά διατάξιμα σύνολα, και από αυτή βγάζουμε το συμπέρασμα που θέλουμε για όλα τα σύνολα με μια απλή επίκληση του Θεωρήματος Καλής Διάταξης. Τυπικό παράδειγμα είναι η εξής γενίκευση της Εικασίας Συγκρισιμότητας Πληθαρίθμων, όπου (για πρώτη και τελευταία φορά) θα διατυπώσουμε ξεχωριστά το πόρισμα για όλα τα σύνολα.

**9.10. Θεώρημα. Καλή θεμελίωση του $\leq_c$.** (1) *Για κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ καλά διατάξιμων συνόλων, υπάρχει $A_0 \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε για κάθε $A \in \mathcal{E}$, $A_0 \leq_c A$.*

(2) (**AC**) *Κάθε μη κενή κλάση $\mathcal{E}$ συνόλων έχει $\leq_c$-ελάχιστο μέλος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Με επίκληση του **7.33**, έστω $U_0 = (A_0, \leq_0)$ ένας $\leq_o$-ελάχιστος καλά διατεταγμένος χώρος με πεδίο στην $\mathcal{E}$. Αν $A \in \mathcal{E}$, τότε υπάρχει κάποια καλή διάταξη $\leq$ του $A$ και από την επιλογή του $U_0$, $(A_0, \leq_0) \leq_o (A, \leq)$, και ειδικότερα $A_0 \leq_c A$ αφού κάθε αρχική ομοιότητα είναι μονομορφισμός. ⊣

**9.11. Λήμμα. Ο επόμενος πληθάριθμος.** *Για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο $\kappa$, ο πληθάριθμος*

$$\kappa^+ =_{\text{ορ}} |\chi(\kappa)| \tag{9-4}$$

*είναι επίσης καλά διατάξιμος, και είναι ελάχιστος στους καλά διατάξιμους πληθαρίθμους μεγαλύτερους του $\kappa$, δηλαδή*

$$\kappa <_c \kappa^+, \quad \kappa <_c \lambda \Longrightarrow \kappa^+ \leq_c \lambda, \tag{9-5}$$

*για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο $\lambda$.*

Αποδειξη. Ο $\kappa^+$ είναι καλά διατάξιμο σύνολο, επομένως συγκρίσιμο με το $\kappa$, και το Θεώρημα του Hartogs **7.34** αποκλείει την ανισότητα $\kappa^+ \leq_c \kappa$, άρα $\kappa <_c \kappa^+$. Η ελαχιστότητα του $\chi(\kappa)$ συνεπάγεται εύκολα τα υπόλοιπα. ⊣

Θέτουμε

$$\aleph_1 =_{\text{ορ}} \aleph_0{}^+, \ \aleph_2 =_{\text{ορ}} \aleph_1^+, \dots \ . \tag{9-6}$$

**9.12. Άσκηση.** (**AC**) *Εφόσον* (με το **AC**) *οι πληθάριθμοι είναι συγκρίσιμοι ανά δύο, η Υπόθεση του Συνεχούς* **CH** *και η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς* **GCH** *μπορούν να εκφραστούν με απλές εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής:*

$$\mathbf{CH} \iff 2^{\aleph_0} =_c \aleph_1, \quad \mathbf{GCH} \iff (\forall \kappa \geq_c \aleph_0)[2^\kappa =_c \kappa^+]. \tag{9-7}$$

Δυστυχώς αυτό δεν διευκολύνει τη λύση τους.

Σε επιχειρήματα για καλά διατάξιμα σύνολα, το εξής απλό Λήμμα είναι πολλές φορές χρήσιμο.

**9.13. Ορισμός. Άριστη διάταξη** (best wellordering) ενός συνόλου $A$ είναι μια καλή διάταξη $\leq$ του $A$, της οποίας κάθε αρχικό τμήμα έχει πληθάριθμο μικρότερο του $|A|$,

$$(\forall x \in A)[\mathbf{seg}(x) <_c A].$$

**9.14. Λήμμα.** (1) *Κάθε καλά διατάξιμο σύνολο επιδέχεται άριστη διάταξη.*
(2) *Αν οι $\leq_A$, $\leq_B$ είναι άριστες διατάξεις των $A$ και $B$, τότε*

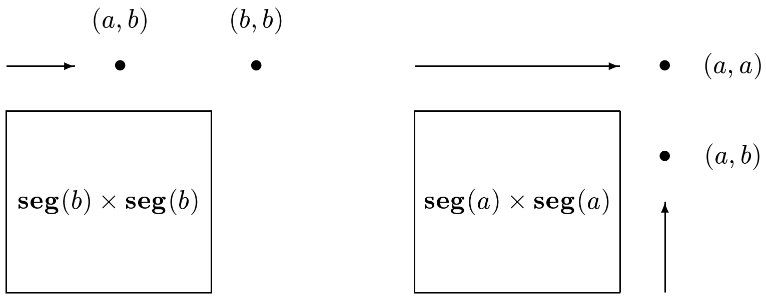
$$\text{αν} \ \ A =_c B, \ \text{τότε} \ \ (A, \leq_A) =_o (B, \leq_B).$$

*Ειδικότερα, δύο άριστες διατάξεις του ίδιου συνόλου είναι όμοιες.*

Αποδειξη. (1) Έστω $U = (A, \leq)$ κάποιος $\leq_o$-ελάχιστος χώρος στο σύνολο όλων των καλά διατεταγμένων χώρων με πεδίο $A$, και έστω (προς απαγωγή σε άτοπο) $x \in A$ τέτοιο που $A \leq_c \mathbf{seg}_U(x)$. Αυτό μας δίνει μονομορφισμό $\pi : A \rightarrowtail \mathbf{seg}_U(x)$ και η σχέση

$$u \leq' v \iff_{\text{ορ}} \pi(u) \leq \pi(v) \quad (u, v \in A)$$

είναι καλή διάταξη του $A$ που είναι $\leq_o \mathbf{seg}_U(x)$ από το **7.32**, άρα $<_o U$, ενάντια στην επιλογή του $U$. (2) Υποθέτουμε ότι $U = (A, \leq_A)$, $V = (B, \leq_B)$ και (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι $U =_o \mathbf{seg}_V(x)$ για κάποιο $x \in B$. Η ομοιότητα $\pi : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbf{seg}_V(x)$ φανερώνει ότι $A =_c \mathbf{seg}_V(x) <_c B$, που αντιτίθεται στην υπόθεση $A =_c B$. ⊣




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **9.2**. Αρχικά τμήματα της καλής διάταξης του Gödel.

Κάθε άριστη διάταξη απαριθμητού συνόλου είναι όμοια με τη φυσική διάταξη του $\mathbb{N}$, και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άριστες διατάξεις για να αποδείξουμε ότι πολλές ιδιότητες απαριθμητών συνόλων ισχύουν για όλα τα καλά διατάξιμα σύνολα. Τυπικό παράδειγμα είναι το επόμενο αποτέλεσμα, που γενικεύει την ταυτότητα ${\aleph_0}^2 =_c \aleph_0$ και δείχνει ότι η υπερπεπερασμένη πληθική αριθμητική των διμελών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι τετριμμένη.

**9.15. Λήμμα.** *Για κάθε άπειρο και καλά διατάξιμο σύνολο $C$, $C \times C =_c C$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμενοι το αντίθετο προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $C$ ένα $\leq_c$-ελάχιστο αντιπαράδειγμα από το **9.10**, και έστω $\leq$ άριστη διάταξη του $C$. Από την επιλογή του $C$, για κάθε άπειρο σημείο $x \in C$,

$$|\mathbf{seg}(x)| + |\mathbf{seg}(x)| =_c 2 \cdot |\mathbf{seg}(x)| \\ \leq_c |\mathbf{seg}(x)| \cdot |\mathbf{seg}(x)| =_c \mathbf{seg}(x) <_c C. \tag{9-8}$$

Το κρίσιμο βήμα στην απόδειξη είναι ο εξής ορισμός μιας νέας καλής διάταξης του γινομένου $C \times C$, του Gödel, που την έχουμε ήδη συναντήσει (κάπως μεταμφιεσμένη) στην απόδειξη του **5.32**. Θέτουμε:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \leq_g (x_2, y_2) \iff_{\text{ορ}} & [\max(x_1, y_1) < \max(x_2, y_2)] \\ & \vee[\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \,\&\, x_1 < x_2] \\ & \vee[\max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \,\&\, x_1 = x_2 \\ & \qquad \& \, y_1 \leq y_2].\end{aligned} \tag{9-9}$$

Τα μέγιστα (max) εδώ προφανώς υπολογίζονται στη διάταξη $\leq$.

**Υπολήμμα**. *Η σχέση $\leq_g$ είναι καλή διάταξη του $C \times C$.*

*Απόδειξη*. Η γραμμικότητα της $\leq_g$ είναι εύκολη υπόθεση. Για να δείξουμε ότι είναι καλή διάταξη, υποθέτουμε ότι το $X \subseteq C \times C$ είναι μη κενό: έστω $w^*$ το $\leq$-ελάχιστο σημείο τέτοιο ώστε να υπάρχει κάποιο $(x, y) \in X$ με $\max(x, y) = w^*$· μετά έστω $x^*$ το $\leq$-ελάχιστο, τέτοιο ώστε για κάποιο $y$, $(x^*, y) \in X$ και $\max(x^*, y) = w^*$· και τελικά έστω $y^*$ το $\leq$-ελάχιστο τέτοιο ώστε $(x^*, y^*) \in X$, $\max(x^*, y^*) = w^*$. Έπεται ότι το $(x^*, y^*)$ είναι το ελάχιστο του $X$.$\dashv$ (Υπολήμμα)

Οι καλά διατεταγμένοι χώροι $(C, \leq)$ και $(C \times C, \leq_g)$ είναι $\leq_o$-συγκρίσιμοι και από την επιλογή του $(C, \leq)$, δεν είναι δυνατό να έχουμε $(C \times C, \leq_g) \leq_o (C, \leq)$, άρα πρέπει να αληθεύει η $C <_o C \times C$· επομένως υπάρχει ζεύγος $(a, b)$ μελών του $C$ που ικανοποιούν την

$$(C, \leq) =_o \mathbf{seg}_{C\times C}((a, b)) = \mathbf{seg}_g((a, b)),$$

και θα φτάσουμε στο άτοπο που χρειαζόμαστε αν δείξουμε ότι το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}_g((a, b)) <_c C$. Θεωρούμε περιπτώσεις στις σχετικές θέσεις των $a$ και $b$ στην $\leq$, και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το σημείο $\max(a, b)$ πρέπει να είναι άπειρο στη διάταξη $\leq_g$.

Περιπτωση 1, $a = b$. Από τον ορισμό της διάταξης του Gödel,

$$(u, v) <_g (a, a) \iff [u < a \,\&\, v < a] \vee [u < a \,\&\, v = a] \vee [u = a \,\&\, v < a],$$

άρα

$$\mathbf{seg}_g((a, a)) = (\mathbf{seg}(a) \times \mathbf{seg}(a)) \cup (\mathbf{seg}(a) \times \{a\}) \cup (\{a\} \times \mathbf{seg}(a)),$$

και εφαρμόζοντας την (9-8) επανειλημμένα,

$$|\mathbf{seg}_g((a, a))| \leq_c |\mathbf{seg}(a)|^2 + |\mathbf{seg}(a)| \cdot 2 \leq_c |\mathbf{seg}(a)| \cdot 3 <_c C.$$

Περιπτωση 2, $a < b$. Τώρα $\max(a, b) = b$,

$$(u, v) <_g (a, b) \iff [u < b \,\&\, v < b] \vee [u < a \,\&\, v = b],$$

έτσι που $\mathbf{seg}((a, b)) = (\mathbf{seg}(b) \times \mathbf{seg}(b)) \cup (\mathbf{seg}(a) \times \{b\})$ και ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ξανά ότι $|\mathbf{seg}_g((a, b))| <_c C$.

Περιπτωση 3, $a > b$. Αυτή τη φορά

$$(u, v) <_g (a, b) \iff [u < a \,\&\, v < a] \vee [u < a \,\&\, v = a] \vee [u = a \,\&\, v < b],$$

από το οποίο φτάνουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο. ⊣

**9.16. Θεώρημα** (**Κανόνες απορρόφησης,** The Absorption Laws). *Αν τουλάχιστον ένας από τους δύο πληθαρίθμους $\kappa$, $\lambda$ είναι άπειρος και κανένας δεν είναι το 0, τότε*

$$\kappa + \lambda =_c \kappa \cdot \lambda =_c \max(\kappa, \lambda).$$

Αποδειξη. Δεχόμενοι ότι $0 <_c \kappa \leq_c \lambda$ και χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα $\lambda \cdot \lambda =_c \lambda$ του Λήμματος, υπολογίζουμε:

$$\lambda \leq_c \kappa + \lambda \leq_c \kappa \cdot \lambda \leq_c \lambda \cdot \lambda =_c \lambda.$$ ⊣

**9.17. Πόρισμα.** (**AC**) *Για κάθε οικογένεια συνόλων σε δείκτες $(i \mapsto \kappa_i)_{i\in I}$ και κάθε άπειρο $\kappa$, αν $|I| \leq_c \kappa$ και για κάθε $i \in I$, $\kappa_i \leq_c \kappa$, τότε $\sum_{i\in I}\kappa_i \leq_c \kappa$.*

Αποδειξη. Από το **AC** και την υπόθεση, επιλέγουμε για κάθε $i \in I$ κάποιο μονομορφισμό $\pi_i : \kappa_i \rightarrowtail \kappa$, έτσι ώστε η απεικόνιση $((i, x) \mapsto (i, \pi_i(x)))$ να είναι μονομορφισμός του $\{(i, x) \mid i \in I \,\&\, x \in \kappa_i\}$ στο $I \times \kappa$. Έτσι

$$\textstyle\sum_{i\in I}\kappa_i =_c \{(i, x) \mid i \in I \,\&\, x \in \kappa_i\} \leq_c |I \times \kappa| =_c |I| \cdot |\kappa| =_c \kappa.$$ ⊣

Για να βρούμε ενδιαφέροντα προβλήματα και αποτελέσματα στην πληθική αριθμητική πρέπει να θεωρήσουμε τελεστές απείρων μεταβλητών, από τους οποίους οι απλούστεροι είναι οι εξής.

**9.18. Λήμμα Πληθικού Ελάχιστου.** *Υπάρχει οριστικός τελεστής* $\inf_c(\mathcal{E})$ *τέτοιος ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{E}$ *από καλά διατάξιμα σύνολα, η τιμή* $\kappa = \inf_c(\mathcal{E})$ *ικανοποιεί τα εξής.*

(1) *Το* $\kappa$ *είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος.*
(2) *Για κάποιο* $A \in \mathcal{E}$, $\kappa =_c A$.
(3) *Για κάθε* $B \in \mathcal{E}$, $\kappa \leq_c B$.

*Επιπλέον, αυτές οι ιδιότητες καθορίζουν την τιμή* $\inf_c(\mathcal{E})$ *μέχρι τη συνθήκη* $=_c$, *δηλαδή αν το* $\kappa$ *είναι οποιοδήποτε σύνολο που ικανοποιεί τις* (1) – (3), *τότε* $\kappa =_c \inf_c(\mathcal{E})$.

Απόδειξη. Αν ο τελεστής πληθικότητας $|X|$ είναι ισχυρός κατά τον ορισμό **4.21**, τότε από το **9.10** υπάρχει ακριβώς ένας πληθάριθμος που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\mathrm{Least}(\mathcal{E},\kappa) \iff (\exists A \in \mathcal{E})[(\forall B \in \mathcal{E})[A \leq_c B] \,\&\, \kappa = |A|],$$

και μπορούμε να ορίσουμε

$$\inf_c(\mathcal{E}) = \min(\mathcal{E}) = \text{το μοναδικό } \kappa \text{ τέτοιο ώστε } \mathrm{Least}(\mathcal{E},\kappa).$$

Αυτό δεν αρκεί, επειδή δεχόμαστε μόνον ότι ο $|X|$ είναι ασθενής τελεστής πληθικότητας και μπορεί να υπάρχουν πολλές τιμές του $\kappa$ που ικανοποιούν την $\mathrm{Least}(\mathcal{E},\kappa)$.

Από το Λήμμα στην απόδειξη του Θεωρήματος Hartogs **7.34**, αν $A \subseteq \bigcup\mathcal{E}$ και η $\leq$ είναι καλή διάταξη του $A$, τότε ο χώρος $U = (A, \leq)$ είναι όμοιος με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $W = \chi(\bigcup\mathcal{E})$, και επομένως κάθε $A \in \mathcal{E}$ είναι ισοπληθικό με κάποιο γνήσιο αρχικό τμήμα του $W$. Άρα μπορούμε να θέσουμε:

$$w =_{\text{ορ}} \text{το ελάχιστο } x \in W \text{ τέτοιο ώστε } (\exists A \in \mathcal{E})[A =_c \mathbf{seg}_W(x)],$$
$$\inf_c(\mathcal{E}) =_{\text{ορ}} |\mathbf{seg}_W(w)|.$$

Η επαλήθευση των χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του $\inf_c(\mathcal{E})$ είναι αρκετά εύκολη.$\dashv$

**9.19. Άσκηση.** *Δείξτε το μέρος του Θεωρήματος που ακολουθεί το «επιπλέον».*

**9.20. Λήμμα Πληθικού Ελάχιστου Άνω Φράγματος.** *Υπάρχει οριστικός τελεστής* $\sup_c(\mathcal{E})$, *τέτοιος ώστε για κάθε μη κενή οικογένεια* $\mathcal{E}$ *από καλά διατάξιμα σύνολα, η τιμή* $\kappa = \sup_c(\mathcal{E})$ *ικανοποιεί τα εξής.*

(1) *Το* $\kappa$ *είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος.*
(2) *Για κάθε* $A \in \mathcal{E}$, $A \leq_c \kappa$.
(3) *Αν το* $B$ *είναι καλά διατάξιμο και για κάθε* $A \in \mathcal{E}$ $A \leq_c B$, *τότε* $\kappa \leq_c B$.

*Επιπλέον, αυτές οι ιδιότητες καθορίζουν την τιμή* $\sup_c(\mathcal{E})$ *μέχρι τη συνθήκη* $=_c$, *δηλαδή αν το* $\kappa$ *είναι οποιοδήποτε σύνολο που ικανοποιεί τις* (1) – (3), *τότε* $\kappa =_c \sup_c(\mathcal{E})$.

Αποδειξη. Έστω $C = h(\bigcup\mathcal{E})$ το σύνολο Hartogs για την ένωση της οικογένειας $\mathcal{E}$, που από το Θεώρημα Hartogs **7.34** είναι καλά διατάξιμο και έχει μεγαλύτερη πληθικότητα από κάθε καλά διατάξιμο υποσύνολο του $\bigcup\mathcal{E}$, ανάμεσα στα οποία είναι και κάθε $A \in \mathcal{E}$. Θέτουμε

$$\sup_c(\mathcal{E}) =_{\text{ορ}} \inf_c(\{B \subseteq C \mid (\forall A \in \mathcal{E})[A \leq_c B]\}),$$

και επαληθεύουμε εύκολα τα συμπεράσματα του Λήμματος. ⊣

Άπειρα αθροίσματα και γινόμενα πληθαρίθμων έχουμε ήδη ορίσει στο **4.21**. Δεν μπορούμε να πούμε πολλά για αυτά, επειδή τα άπειρα αθροίσματα είναι τόσο τετριμμένα όσο και τα πεπερασμένα (Πρόβλημα **x9.15**), και τα άπειρα γινόμενα είναι τουλάχιστον τόσο πολύπλοκα όσο και η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς αφού

$$2^\kappa =_c \prod_{i\in\kappa} 2.$$

Υπάρχει όμως μια ενδιαφέρουσα ανισότητα που συνδέει τα δύο.

**9.21. Θεώρημα του König.** (**AC**) *Για δύο οικογένειες συνόλων $(i \mapsto A_i)$ και $(i \mapsto B_i)$ με δείκτες στο ίδιο σύνολο $I \neq \emptyset$,*

$$\text{αν} \ \ (\forall i \in I)[A_i <_c B_i], \ \ \text{τότε} \ \ \bigcup_{i\in I} A_i <_c \prod_{i\in I} B_i. \tag{9-10}$$

*Ειδικότερα, για οικογένειες πληθαρίθμων $(i \mapsto \kappa_i)$ και $(i \mapsto \lambda_i)$,*

$$\text{αν} \ \ (\forall i \in I)[\kappa_i <_c \lambda_i], \ \ \text{τότε} \ \ \sum_{i\in I} \kappa_i <_c \prod_{i\in I} \lambda_i. \tag{9-11}$$

Αποδειξη. Από την υπόθεση και το **AC**, για κάθε $i$ υπάρχει μονομορφισμός $\pi_i : A_i \rightarrowtail B_i$, και εφόσον ο $\pi_i$ δεν μπορεί να είναι αντιστοιχία, υπάρχει συνάρτηση $c : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ τέτοια ώστε για κάθε $i$, $c(i) \in B_i \setminus \pi_i[A_i]$. Θέτουμε

$$f(x,i) = \begin{cases} \pi_i(x), & \text{αν } x \in A_i, \\ c(i), & \text{αν } x \notin A_i, \end{cases}$$
$$g(x) = (i \mapsto f(x,i)).$$

Αν $x \neq y$ και τα $x$, $y$ ανήκουν στο ίδιο $A_i$ για κάποιο $i$, τότε

$$g(x)(i) = \pi_i(x) \neq \pi_i(y) = g(y)(i),$$

επειδή η $\pi_i$ είναι μονομορφισμός, και επομένως $g(x) \neq g(y)$. Αν δεν υπάρχει $A_i$ που να περιέχει και το $x$ και το $y$, έστω $x \in A_i$, $y \notin A_i$· συνεπώς $g(x)(i) = \pi_i(x) \in \pi_i[A_i]$ και $g(y)(i) = c(i) \in B_i \setminus \pi_i[A_i]$ έτσι ώστε και πάλι $g(x) \neq g(y)$. Συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $g : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrowtail \prod_{i\in I} B_i$ είναι μονομορφισμός, και επομένως

$$\bigcup_{i\in I} A_i \leq_c \prod_{i\in I} B_i.$$

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω ότι υπάρχει αντιστοιχία

$$h : \bigcup_{i\in I} A_i \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \prod_{i\in I} B_i,$$

που φανερώνει ότι αυτά τα δύο σύνολα είναι ισοπληθικά. Για κάθε $i$, η συνάρτηση

$$h_i(x) =_{\text{ορ}} h(x)(i) \quad (x \in A_i)$$

είναι (εύκολα) συνάρτηση από το $A_i$ στο $B_i$ και από την υπόθεση δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός· επομένως από το **AC** υπάρχει συνάρτηση $\varepsilon$ που επιλέγει από κάθε $B_i$ κάποιο στοιχείο που δεν ανήκει στην εικόνα, δηλαδή

$$\varepsilon(i) \in B_i \setminus h_i[A_i], \quad (i \in I).$$

Από τον ορισμό της, $\varepsilon \in \prod_{i\in I} B_i$, άρα πρέπει να υπάρχει στοιχείο $x \in A_j$, για κάποιο $j$, έτσι ώστε $h(x) = \varepsilon$· αυτό μας δίνει

$$\varepsilon(j) = h(x)(j) = h_j(x) \in h_j[A_j],$$

ενάντια στη χαρακτηριστική ιδιότητα της $\varepsilon$.

Η πληθική εκδοχή (9-11) προκύπτει με εφαρμογή της (9-10) στα $A_i = \{i\} \times \kappa_i$ και $B_i = \lambda_i$. ⊣

**9.22. Άσκηση.** (**AC**) *Το Θεώρημα του König εφαρμόζεται στα δεδομένα $I = \kappa$, $A_i = \{i\}$ και $B_i = 2$ και αποδίδει*

$$\kappa = \bigcup_{i\in\kappa}\{i\} <_c \prod_{i\in\kappa} 2 =_c 2^\kappa,$$

*δηλαδή το Θεώρημα του Cantor.*

Παρά την απλότητά του, το Θεώρημα του König συνεπάγεται άμεσα μια μη τετριμμένη ανισότητα για τον πληθικό $\mathfrak{c}$ του συνεχούς, πέραν της $\aleph_0 <_c \mathfrak{c}$. Για τη διατύπωσή της θα χρησιμοποιήσουμε *ομοτελικότητες*.

**9.23. Ορισμός.** Η **ομοτελικότητα** (cofinality) ενός καλά διατάξιμου, άπειρου πληθαρίθμου $\kappa$ είναι ο ελάχιστος καλά διατάξιμος πληθάριθμος $\lambda$ τέτοιος ώστε το $\kappa$ να είναι η ένωση $\lambda$ συνόλων μικρότερων σε πληθικότητα από το $\kappa$:

$$\begin{aligned}\mathrm{cf}(\kappa) =_{\text{ορ}} \inf\nolimits_c(\{I \subseteq \kappa \mid \text{για κάποια οικογένεια } (i \mapsto K_i)_{i\in I},\\ (\forall i \in I)[K_i <_c \kappa] \,\&\, \kappa = \bigcup\nolimits_{i\in I} K_i\}).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η οικογένεια καλά διατάξιμων συνόλων δεικτών της οποίας υπολογίζουμε το $\inf_c$ δεν είναι κενή, μάλιστα περιέχει τον $\kappa$ αφού

$$\kappa = \bigcup_{i\in\kappa}\{i\}. \tag{9-12}$$

Οι γενικές ιδιότητες του $\inf_c$ συνεπάγονται τις εξής, βασικές ιδιότητες του τελεστή ομοτελικότητας:

(1) $\mathrm{cf}(\kappa) \leq_c \kappa$.
(2) $\kappa = \bigcup_{i\in \mathrm{cf}(\kappa)} K_i$ για κάποια οικογένεια συνόλων $(i \mapsto K_i)$ τέτοια ώστε $(\forall i \in \mathrm{cf}(\kappa))[K_i <_c \kappa]$.
(3) Αν ο $\lambda$ είναι καλά διατάξιμος πληθάριθμος, αν $(\forall i \in \lambda)[L_i <_c \kappa]$ και αν $\kappa = \bigcup_{i\in\lambda} L_i$, τότε $\mathrm{cf}(\kappa) \leq_c \lambda$.

Αυτές οι ιδιότητες, επιπλέον, χαρακτηρίζουν τον πληθάριθμο $\mathrm{cf}(\kappa)$ μέχρι τη συνθήκη $=_c$.

*Ένας καλά διατάξιμος, άπειρος πληθάριθμος $\kappa$ είναι* **κανονικός** (regular) *αν $\mathrm{cf}(\kappa) =_c \kappa$, αλλιώς είναι* **ιδιάζων** (singular). Είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον τελεστή ομοτελικότητας $\mathrm{cf}(\kappa)$ και τη συνθήκη της κανονικότητας για κάθε καλά διατάξιμο πληθάριθμο $\kappa$ χωρίς να αποδεχτούμε γενικά το πλήρες Αξίωμα

Επιλογής, αλλά τα περισσότερα αποτελέσματα γι' αυτές τις έννοιες στηρίζονται στο **AC**.

**9.24. Άσκηση.** *Ο $\aleph_0$ είναι κανονικός, επειδή κάθε πεπερασμένο άθροισμα πεπερασμένων πληθαρίθμων είναι πεπερασμένο.*

**9.25. Πόρισμα.** (**AC**) *Για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$,*

$$\mathrm{cf}(2^\kappa) >_c \kappa,$$

*και ειδικότερα $\mathrm{cf}(\mathfrak{c}) >_c \aleph_0$, δηλαδή δεν εκφράζεται το συνεχές $\mathfrak{c}$ ως απαριθμητή ένωση συνόλων με πληθικότητα $<_c \mathfrak{c}$.*

Αποδειξη. Από το Θεώρημα του König, αν $K_i <_c 2^\kappa$ για κάθε $i \in \lambda$ με $\lambda \leq_c \kappa$, τότε

$$\bigcup_{i\in\lambda} K_i <_c \prod_{i\in\lambda} 2^\kappa =_c (2^\kappa)^\lambda =_c 2^{\kappa\cdot\lambda} =_c 2^\kappa,$$

που αντιτίθεται στο $\mathrm{cf}(2^\kappa) \leq_c \kappa$. ⊣

**9.26.** Το πρότυπο $L$ των κατασκευάσιμων συνόλων του Gödel ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση Συνεχούς, και επομένως για κάθε $\kappa$, $2^\kappa =_c \kappa^+$ είναι κανονικός από το Πρόβλημα **x9.19**. Με τη μέθοδο του αναγκασμού του Cohen, μπορούν να κατασκευαστούν πρότυπα της θεωρίας του Zermelo **ZDC**+**AC** στα οποία ο $\mathfrak{c}$ είναι ιδιάζων, με ομοτελικότητα $\mathrm{cf}(\mathfrak{c})$ οποιονδήποτε κανονικό πληθάριθμο μεταξύ των $\aleph_0$ και $\mathfrak{c}$, για παράδειγμα τον $\aleph_1$.

Τα βασικά αποτελέσματα για ομοτελικότητες είναι πολύ απλά και τα έχουμε αφήσει για προβλήματα. Πρέπει όμως να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι δυνατό να μελετήσουμε το θέμα σοβαρά τώρα, επειδή χωρίς το Αξίωμα Αντικατάστασης δεν μπορούμε καν να αποδείξουμε ότι *υπάρχουν* ιδιάζοντες πληθάριθμοι!

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 9

* **x9.1.** Δείξε το Θεώρημα **9.1** επικαλούμενος μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) και την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$.

**x9.2.** Θεωρούμε σύστημα αεροπορικών συγκοινωνιών που ενώνει τις πόλεις (ίσως άπειρες το πλήθος) ενός κόσμου και δεχόμαστε τα εξής. (1) Από κάθε πόλη, υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός κατευθείαν πτήσεων σε άλλες πόλεις. (2) Μπορεί κανείς να ταξιδέψει αεροπορικά από κάθε πόλη σε κάθε άλλη. (3) Δεν είναι δυνατό να ταξιδεύει κανείς για πάντα, χωρίς να επισκεφθεί το ίδιο αεροδρόμιο δύο φορές. Δείξε ότι το σύνολο πόλεων σ' αυτό τον κόσμο είναι πεπερασμένο.

**x9.3.** Δείξε το Λήμμα του König **9.7** στην περίπτωση που το $T$ είναι δέντρο σε καλά διατάξιμο σύνολο $E$ χωρίς επίκληση αρχών επιλογής.

* **x9.4.** Δείξε το Λήμμα του König **9.7** χρησιμοποιώντας μόνο τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**) και την Αρχή Απαριθμητής Επιλογής $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$.

**x9.5.** Έστω $T$ δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και $B$ φράχτης του $T$. Δείξε ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $k$, τέτοιος ώστε για κάθε άπειρο κλαδί $f \in [T]$, $\overline{f}(i) \in B$, για κάποιο $i \leq k$.

$^*$**x9.6.** Έστω καλά διατάξιμο σύνολο $C$ και συνάρτηση $f : C \times C \to C$, $A \subseteq C$, και έστω

$$A_f =_{\mathrm{op}} \bigcap \{X \subseteq C \mid A \subseteq X \,\&\, f[X \times X] \subseteq X\}$$

η **κλειστότητα** (closure) του $A$ για την $f$. Όρισε τα σύνολα $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ με την αναδρομή

$$A_0 = A, \quad A_{n+1} = A_n \cup f[A_n \times A_n],$$

και δείξε ότι

$$A_f = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Δείξε επίσης ότι αν το $A$ είναι άπειρο, τότε $A_f =_c A$.

**x9.7.** Δείξε ότι αν το $C$ είναι καλά διατάξιμο, τότε καλά διατάξιμο είναι και το σύνολο $C^*$ όλων των λέξεων (πεπερασμένων ακολουθιών) από το $C$.

**x9.8.** Αν χρησιμοποίησες το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ ή το **DC** στα Προβλήματα **x9.6** και **x9.7**, να βρεις άλλες λύσεις που δεν επικαλούνται καμιά αρχή επιλογής.

**x9.9.** Κάθε σύνολο Hartogs $h(A)$ είναι άριστα διατεταγμένο από την $\leq_{\chi(A)}$.

**x9.10.** Αν οι $(n \mapsto \kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και $(n \mapsto \lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθίες πληθαρίθμων και για κάθε $n$, $\kappa_n \leq_c \lambda_n$, τότε

$$\sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n \leq_c \sum\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n, \qquad \prod\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \kappa_n \leq_c \prod\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n.$$

**x9.11.** (**AC**) Αν οι $(i \mapsto \kappa_i)_{i \in I}$ και $(i \mapsto \lambda_i)_{i \in I}$ είναι οικογένειες πληθαρίθμων στο ίδιο σύνολο δεικτών $I$ και για κάθε $i \in I$, $\kappa_i \leq_c \lambda_i$, τότε

$$\sum\nolimits_{i \in I} \kappa_i \leq_c \sum\nolimits_{i \in I} \lambda_i, \ \prod\nolimits_{i \in I} \kappa_i \leq_c \prod\nolimits_{i \in I} \lambda_i.$$

**x9.12.** (**AC**) Για κάθε οικογένεια συνόλων σε δείκτες $(i \mapsto A_i)_{i \in I}$,

$$|\prod\nolimits_{i \in I} A_i| =_c \prod\nolimits_{i \in I} |A_i|$$

και το ίδιο για αθροίσματα, με «ξένη ένωση» στα αριστερά.

**x9.13.** Εξήγησε το συμβολισμό και δείξε την ταυτότητα

$$\prod\nolimits_{i \in I} \prod\nolimits_{j \in J(i)} \kappa_{ij} =_c \prod\nolimits_{\{(i,j) \mid i \in I \,\&\, j \in J(i)\}} \kappa_{ij}.$$

**x9.14.** (**AC**) Δείξε το χαρακτηρισμό του $\sup_c \mathcal{E}$ στο **9.20**.

**x9.15.** (**AC**) Για κάθε οικογένεια απείρων πληθαρίθμων $(i \mapsto \kappa_i)$ στο μη κενό σύνολο δεικτών $I$,

$$\sum\nolimits_{i \in I} \kappa_i =_c \max(|I|, \sup_c\{\kappa_i \mid i \in I\}).$$

**x9.16.** Δείξε ότι για κάθε άπειρο, καλά διατάξιμο πληθάριθμο $\kappa$,

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \inf_c\Big(\big\{I \subseteq \kappa \mid \text{για κάποια οικογένεια } (i \mapsto K'_i)_{i\in I}, \\ (\forall i, j \in I)[i \neq j \Longrightarrow K'_i \cap K'_j = \emptyset] \,\&\, (\forall i \in I)[K'_i <_c \kappa] \\ \&\, \kappa = \textstyle\bigcup_{i\in I} K'_i\big\}\Big).$$

* **x9.17.** (**AC**) Δείξε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$,

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \inf_c\Big(\big\{I \subseteq \kappa \mid \text{για κάποια οικογένεια πληθαρίθμων } (i \mapsto \kappa_i)_{i\in I}, \\ (\forall i \in I)[\kappa_i <_c \kappa] \,\&\, \kappa =_c \textstyle\sum_{i\in I} \kappa_i\big\}\Big).$$

Υποδειξη. Χρησιμοποίησε το Πρόβλημα **x9.16**.

* **x9.18.** Δείξε ότι για κάθε άπειρο $\kappa$, $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\kappa)) =_c \mathrm{cf}(\kappa)$, και επομένως ο $\mathrm{cf}(\kappa)$ είναι πάντα κανονικός πληθάριθμος.

**x9.19.** (**AC**) Για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$, ο επόμενος πληθάριθμος $\kappa^+$ είναι κανονικός. Υποδειξη. Το Πρόβλημα **x9.17** απλοποιεί την απόδειξη.

**x9.20.** (**AC**) Δείξε ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$, $\kappa <_c \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

* **x9.21.** (**AC**) Κάθε μερική διάταξη $\leq$ σε τυχόν σύνολο $P$ επιδέχεται **γραμμικοποίηση** (linearization), δηλαδή υπάρχει κάποια γραμμική διάταξη $\leq'$ του $P$ τέτοια ώστε $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$.

Το επόμενο πρόβλημα μας δίνει το βασικό γεγονός που συσχετίζει επαγωγικούς και κατευθυνόμενα πλήρεις μερικά διατεταγμένους χώρους. Πρόσεξε ότι «αλυσίδα» στον μερικά διατεταγμένο χώρο $P$ είναι το τυχόν υποσύνολο $C \subseteq P$ που είναι γραμμικά διατεταγμένο από τη μερική διάταξη $\leq_P$· το $C$ είναι *καλά διατεταγμένη αλυσίδα* αν επιπλέον ο περιορισμός της $\leq_P$ στο $C$ είναι καλή διάταξη. Όταν υποθέτουμε ότι «το $S$ είναι καλά διατάξιμο» για κάποιο $S \subseteq P$, εννοούμε ότι το $S$ *επιδέχεται κάποια καλή διάταξη* $\leq$, η οποία όμως μπορεί να μην έχει καμία σχέση (και συνήθως δεν έχει) με τη δοσμένη μερική διάταξη $\leq_P$ του $P$.

* **x9.22.** Αν κάθε καλά διατεταγμένη αλυσίδα στον μερικά διατεταγμένο χώρο $(P, \leq_P)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε για κάθε καλά διατάξιμο, κατευθυνόμενο υποσύνολο $S$ του $P$ υπάρχει καλά διατεταγμένη αλυσίδα $C$ με τις εξής δύο ιδιότητες:

(1) Το σύνολο $S$ είναι «φραγμένο» από το $C$, δηλαδή για κάθε $x \in S$ υπάρχει κάποιο $y \in C$ τέτοιο ώστε $x \leq_P y$.

(2) Για κάθε $y \in C$, υπάρχει κατευθυνόμενο υποσύνολο $C_y \subseteq S$, τέτοιο ώστε $|C_y| <_c |S|$ και $y = \sup C_y$.

Παρατηρούμε ότι το $C$ μπορεί να έχει αυτές τις ιδιότητες χωρίς απαραίτητα να είναι υποσύνολο του $S$. Υποδειξη (W. Allen). Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω

$S$ καλά διατάξιμο, κατευθυνόμενο και $\leq_c$-ελάχιστο αντιπαράδειγμα του συμπεράσματος, και δείξε πρώτα ότι το $S$ είναι αναπαρίθμητο. Έστω $\leq$ άριστη διάταξη του $S$ και έστω $f : S \times S \to S$ συνάρτηση τέτοια ώστε $x, y \in S \Longrightarrow x, y \leq_P f(x, y)$. Για κάθε $x \in S$, θέτουμε

$$C_x =_{\text{ορ}} \mathbf{seg}(x)_f,$$

με το συμβολισμό του Προβλήματος **x9.6**. Δείξε ότι αυτό είναι κατευθυνόμενο, ότι το $\sup C_x$ υπάρχει για κάθε $x \in S$, και ότι το

$$C =_{\text{ορ}} \{\sup C_x \mid x \in S\}$$

είναι καλά διατεταγμένη αλυσίδα στον $P$ που έχει τις ιδιότητες (1) και (2) για το $S$.

***x9.23.** (**AC**) Για κάθε μερικά διατεταγμένο χώρο $P$, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(1) Κάθε κατευθυνόμενο σύνολο του $P$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.
(2) Κάθε αλυσίδα στο $P$ έχει ελάχιστο, άνω φράγμα.
(3) Κάθε καλά διατεταγμένη αλυσίδα στο $P$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ειδικότερα: (**AC**) *Ένας μερικά διατεταγμένος χώρος είναι επαγωγικός αν και μόνον αν είναι πλήρης κατά κατεύθυνση* (dcpo).

***x9.24.** (**AC**) Έστω $\pi : P \to Q$ μονοτονική απεικόνιση από έναν επαγωγικό χώρο σε κάποιον άλλο. Δείξε ότι η $\pi$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\pi(\sup S) = \sup \pi[S] \tag{9-13}$$

για κάθε μη κενή αλυσίδα $S \subseteq P$, αν και μόνον αν ικανοποιεί την (9-13) για κάθε μη κενό, κατευθυνόμενο $S \subseteq P$.

**x9.25.** Δείξε ότι ο χαρακτηρισμός της ιδιότητας της συνέχειας για απεικονίσεις της μορφής $\pi : (A \rightharpoonup E) \to (B \rightharpoonup M)$ του **x6.24** ισχύει για όλα τα σύνολα $A$, $E$, $B$, $M$.

**x9.26.** (**AC**) **Λήμμα Πεπερασμένης Βάσης**. Έστω μη κενή οικογένεια $\mathcal{I}$ υποσυνόλων κάποιου συνόλου $V$, τέτοια ώστε

$$X \in \mathcal{I} \iff (\forall Y \subseteq X)[Y \text{ πεπερασμένο} \Longrightarrow Y \in \mathcal{I}].$$

Δείξε ότι η $\mathcal{I}$ έχει μεγιστικό μέλος (κατά την $\subseteq$).

***x9.27.** Έστω οικογένεια $\mathcal{I}$ με πεπερασμένη βάση όπως στο **x9.26** και δέξου επιπλέον ότι το $V$ είναι καλά διατάξιμο· δείξε (χωρίς το **AC**) ότι η $\mathcal{I}$ έχει μεγιστικό μέλος.

**x9.28.** (**AC**) Αν ξέρεις τι θα πει *διανυσματικός χώρος* και τις βασικές ιδιότητες *γραμμικής ανεξαρτησίας*, δείξε ότι κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση. Δείξε επίσης, χωρίς το **AC**, ότι κάθε καλά διατάξιμος διανυσματικός χώρος έχει βάση. ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Εφάρμοσε το **x9.26** ή το **x9.27** στην οικογένεια όλων των γραμμικά ανεξάρτητων συνόλων του διανυσματικού χώρου.

*x9.29. (**AC**) Αν ξέρεις μερικά πράγματα για σώματα και αλγεβρικές επεκτάσεις, δείξε ότι κάθε σώμα έχει αλγεβρική κλειστότητα. Υποδειξη. Η συνηθισμένη απόδειξη γι' αυτό είναι κάπως έτσι. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A} =_{\text{ορ}} \{F \mid F \text{ είναι αλγεβρική επέκταση του } K\} \tag{9-14}$$

μερικά διατεταγμένη από την

$$F_1 \sqsubseteq F_2 \iff_{\text{ορ}} F_1 \text{ είναι υποσώμα του } F_2,$$

παρατηρούμε ότι είναι επαγωγικός χώρος και επομένως έχει μεγιστικό στοιχείο $\overline{K}$, και επαληθεύουμε ότι αυτό το $\overline{K}$ είναι αλγεβρικά κλειστό. Το επιχείρημα δεν είναι σωστό, επειδή η κλάση $\mathcal{A}$ στην (9-14) δεν είναι σύνολο. Για να το επιδιορθώσουμε, στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου το $K$ είναι άπειρο, παρατηρούμε ότι *κάθε αλγεβρική επέκταση του $K$ είναι ισομορφική με κάποιο σώμα $F =_c K$*. Αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οικογένεια $\mathcal{A}$ του (9-14) με την

$$\mathcal{A}' =_{\text{ορ}} \{F \subseteq E \mid \text{το } F \text{ είναι αλγεβρική επέκταση του } K\}, \tag{9-15}$$

όπου το $E$ είναι κάποιο υπερσύνολο του $K$, πολυπληθέστερο του $K$.

*x9.30. Δείξε ότι κάθε καλά διατάξιμο σώμα (και επομένως κάθε αριθμήσιμο σώμα) έχει αλγεβρική κλειστότητα. Υποδειξη. Η ιδέα είναι να αποφύγουμε το **AC** ορίζοντας την αλγεβρική κλειστότητα κατευθείαν με Υπερπεπερασμένη Αναδρομή. Το τέχνασμα στο προηγούμενο Πρόβλημα δεν μπορεί να αποφευχθεί. Να κατεργαστείς πρώτα την αριθμήσιμη περίπτωση, που φανερώνει ποια αλγεβρικά αποτελέσματα θα χρειαστείς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

# Ο ΧΩΡΟΣ BAIRE

Μετά τους φυσικούς αριθμούς, ίσως το πιο θεμελιακό αντικείμενο μελέτης της συνολοθεωρίας να είναι ο **χώρος Baire**,

$$\mathcal{N} =_{\text{ορ}} (\mathbb{N} \to \mathbb{N}), \tag{10-1}$$

το σύνολο των αριθμοσειρών. Με το συμβολισμό

$$\mathcal{C} =_{\text{ορ}} (\mathbb{N} \to \{0, 1\}) \tag{10-2}$$

για το **σύνολο του Cantor**[22] των άπειρων, δυαδικών ακολουθιών, τότε

$$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}),$$

και με οικείους πια υπολογισμούς,

$$\mathfrak{c} =_c 2^{\aleph_0} =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c |\mathcal{C}| \leq_c |\mathcal{N}| \leq_c |\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})| =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}.$$

Μετά την αξιωματική απόδειξη της ισοπληθικότητας $\mathcal{N} =_c \mathbb{R}$ στο Παράρτημα **A** (που είναι ακριβώς όπως και η διαισθητική απόδειξη, στο Κεφάλαιο **2**), η Υπόθεση του Συνεχούς **3.2** εκφράζεται από την πρόταση

$$(\mathbf{CH}) \qquad (\forall X \subseteq \mathcal{N})[X \leq_c \mathbb{N} \vee X =_c \mathcal{N}].$$

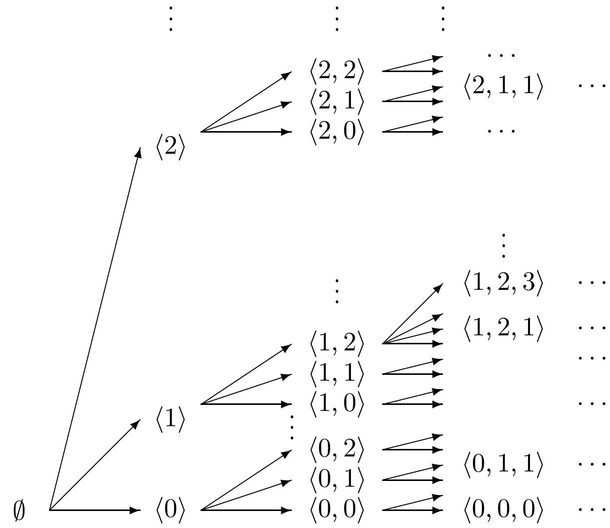
Η σχέση μάλιστα ανάμεσα στους χώρους $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ και $\mathbb{R}$ είναι τόσο στενή, που σχεδόν κάθε ενδιαφέρουσα ιδιότητα ενός απ' αυτούς μας δίνει αμέσως μια σχετιζόμενη ιδιότητα των άλλων. Στα προβλήματα θα δώσουμε αυστηρή διατύπωση αυτού του φαινομένου για τους $\mathcal{N}$ και $\mathcal{C}$, και για τον $\mathbb{R}$ θα το αποδείξουμε στο Παράρτημα **A**, όπου και θα αντλήσουμε τα πορίσματα για τους πραγματικούς αριθμούς από τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.[23]

---

Το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν είναι απαραίτητο για την κατανόηση των επόμενων δύο, παρουσιάζεται εδώ συμπυκνωμένα και σίγουρα απαιτεί περισσότερη προσπάθεια από τον αναγνώστη σε σχέση με τα υπόλοιπα κεφάλαια. Σε μια πρώτη ανάγνωση, ίσως να είναι καλύτερο να το προσπεράσεις και να επανέλθεις σε αυτό αφού πρώτα εμπεδώσεις καλά την ύλη στα Κεφάλαια 11 και 12.

[22] Από παλιά παράδοση χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο γι' αυτό το υποσύνολο του $\mathcal{N}$ και για το σύνολο των πραγματικών αριθμών που ορίσαμε στην απόδειξη του **2.14**. Το Διάγραμμα **2.4** επεξηγεί εύγλωττα το λόγο, και κανείς μέχρι σήμερα δεν έχει μπερδευτεί.

[23] Μπορεί κανείς να εκλάβει το $\mathcal{N}$ ως «διακριτή», «ψηφιακή» ή «συνδυαστική» απόδοση του «συνεχούς» ή «αναλογικού» $\mathbb{R}$. Κάθε πραγματικός αριθμός $x$ καθορίζεται από τη δεκαδική του ανάπτυξη $x(0)\,.\,x(1)x(2)\ldots$, όπου $(n \mapsto x(n)) \in \mathcal{N}$, *αλλά* διαφορετικές δεκαδικές αναπτύξεις




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **10.1**. Μικρό μέρος του χώρου Baire.

Ο στόχος μας εδώ είναι να αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα για το $\mathcal{N}$ που έχουν σχέση με το Πρόβλημα του Συνεχούς. Θα ορίσουμε την οικογένεια των ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΥΠΟΣΥΝΟΛΩΝ ΤΟΥ $\mathcal{N}$ και θα δείξουμε ότι κάθε αναλυτικό σύνολο ικανοποιεί την Υπόθεση του Συνεχούς, δηλαδή είναι ή απαριθμητό ή ισοπληθικό με το $\mathcal{N}$. Αυτό το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΕΛΕΙΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ **10.20** είναι σημαντικό, επειδή σχεδόν κάθε σύνολο με το οποίο ασχολείται η κλασική ανάλυση είναι αναλυτικό. Ειδικότερα, όλα τα ΣΥΝΟΛΑ BOREL που παίζουν τόσο σημαντικό ρόλο στη θεωρία μέτρου και ολοκλήρωσης είναι αναλυτικά· από το ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ SUSLIN **10.31**, ένα σύνολο $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι Borel ακριβώς όταν το $A$ και το $\mathcal{N} \setminus A$ είναι και τα δύο αναλυτικα. Από την άλλη μεριά, θα δείξουμε στο Θεώρημα **10.32** ότι η φυσική μέθοδος απόδειξης της Υπόθεσης του Συνεχούς για τα αναλυτικά σύνολα δεν μπορεί να δώσει λύση στο γενικό Πρόβλημα του Συνεχούς που δεν έχει ακόμη λυθεί. Εκτός από τις εφαρμογές τους στην ανάλυση, τα Θεωρήματα **10.20** και **10.32** παρουσιάζουν ουσιαστικό, θεμελιακό ενδιαφέρον επειδή οι αποδείξεις τους επεξηγούν όμορφα το ρόλο που παίζουν οι αρχές επιλογής στα κλασικά μαθηματικά.

**10.1. Η δομή του $\mathcal{N}$.** Οι διαισθήσεις μας για το χώρο $\mathcal{N}$ πηγάζουν από την απεικόνισή του ως το σώμα του μεγαλύτερου δέντρου στο $\mathbb{N}$, με την ορολογία

μπορεί να παριστάνουν τον ίδιο πραγματικό αριθμό. Αυτό είναι ένα μεγάλο «αλλά», είναι το κλειδί της απόδειξης ότι ο $\mathbb{R}$ είναι *τοπολογικά συνεκτικός*, που είναι ενδιαφέρον αποτέλεσμα για την ανάλυση αλλά άνευ σημασίας για τη συνολοθεωρία. Θεωρούμε το χώρο Baire ως «ψηφιακή απόδοση» του $\mathbb{R}$ επειδή δεν επιτρέπει τέτοιες ταυτίσεις, κάθε $x \in \mathcal{N}$ καθορίζει χωρίς αμφιβολία τα «ψηφία» του $x(0), x(1), \ldots$ .

των **9.3** και (9-3),

$$\mathcal{N} = [\mathbb{N}^*].$$

Τα υποσύνολα του χώρου Baire καλούμε **σημειοσύνολα**, (pointsets), περιορίζοντας προσωρινά το νόημα της λέξης «σημείο» στα μέλη του $\mathcal{N}$, τα άπειρα κλαδιά του $\mathbb{N}^*$. Το **συμπλήρωμα** σημειοσυνόλου είναι το συμπλήρωμά του ως προς το $\mathcal{N}$,

$$cA =_{\text{ορ}} \mathcal{N} \setminus A. \tag{10-3}$$

Επίσης είναι χρήσιμο να επεκτείνουμε το συμβολισμό για αρχικά τμήματα λέξεων,

$$u \sqsubseteq x \iff_{\text{ορ}} u \subset x \quad (u \in \mathbb{N}^*, x \in \mathcal{N}), \tag{10-4}$$

έτσι που να υποδείχνει ότι μια πεπερασμένη ακολουθία $u$ είναι αρχή κάποιου σημείου $x$, μια **προσέγγιση** του $x$ που προσδιορίζει τις πρώτες $\mathrm{lh}(u)$ τιμές του. Για κάθε $u \in \mathbb{N}^*$, το σύνολο

$$\mathcal{N}_u =_{\text{ορ}} \{x \in \mathcal{N} \mid u \sqsubseteq x\} = [\mathbb{N}^*_u] \tag{10-5}$$

σημείων του $\mathcal{N}$ που επεκτείνουν το $u$ είναι η **γειτονιά** (neighborhood) ή **περιοχή** που καθορίζεται από το $u$ στο $\mathcal{N}$.

**10.2. Άσκηση.** *Για όλα τα $u, v \in \mathbb{N}^*$,*

$$u \sqsubseteq v \iff \mathcal{N}_v \subseteq \mathcal{N}_u.$$

**10.3. Άσκηση.** *Η οικογένεια των γειτονιών είναι απαριθμητή.*

**10.4. Ορισμός.** Το σημειοσύνολο $A$ είναι **ανοικτό** (open) αν είναι ένωση γειτονιών, έτσι ώστε

$$x \in G \iff (\exists u)[x \in \mathcal{N}_u \ \&\ \mathcal{N}_u \subseteq G]\cdot \tag{10-6}$$

**κλειστό** (closed) αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό· και **ανοικτό-κλειστό** (clopen) αν είναι και τα δύο, ανοικτό και κλειστό.

Συχνά ορίζουμε τα ανοικτά σύνολα με την ακόλουθη, εύκολα ισοδύναμη συνθήκη:

**10.5. Άσκηση.** *Ένα σύνολο $G \subseteq \mathcal{N}$ είναι ανοικτό, αν και μόνον αν για κάθε $x \in G$, υπάρχει κάποια γειτονιά $\mathcal{N}_u$ έτσι που $x \in \mathcal{N}_u \subseteq G$.*

**10.6. Πρόταση.** (1) *Το $\emptyset$, το $\mathcal{N}$ και κάθε γειτονιά είναι ανοικτά-κλειστά.*

(2) *Κάθε μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, αλλά όχι ανοικτό.*

(3) *Κάθε μη κενό ανοικτό σημειοσύνολο είναι ένωση μιας ακολουθίας γειτονιών.*

(4) *Κάθε οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών σημειοσυνόλων έχει ανοικτή ένωση $\bigcup \mathcal{G}$, και δυϊκά, κάθε οικογένεια κλειστών σημειοσυνόλων $\mathcal{F}$ έχει κλειστή τομή $\bigcap \mathcal{F}$.* (Θέτουμε $\bigcap \emptyset = \mathcal{N}$, έτσι ώστε η πράξη της τομής να είναι ορισμένη για κάθε οικογένεια σημειοσυνόλων.)

(5) *Η τομή $G_1 \cap G_2$ δύο ανοικτών σημειοσυνόλων $G_1$, $G_2$ είναι ανοικτή, και δυϊκά, η ένωση $F_1 \cup F_2$ δύο κλειστών σημειοσυνόλων $F_1$, $F_2$ είναι κλειστή.*

Αποδειξη. (1) Κάθε γειτονιά είναι ανοικτή, αφού $\mathcal{N}_u = \bigcup\{\mathcal{N}_u\}$, και, συγκεκριμένα, το $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\langle\,\rangle}$ είναι ανοικτό. Οι γειτονιές είναι επίσης κλειστές, από την Άσκηση **10.5**: αν $x \notin \mathcal{N}_u$, τότε $u \not\sqsubseteq x$, και άρα υπάρχει $i < \mathrm{lh}(u)$ με $x(i) \neq u(i)$ και έτσι $x \in \mathcal{N}_{\langle x(0),\dots,x(i)\rangle}$ ενώ $\mathcal{N}_{\langle x(0),\dots,x(i)\rangle} \cap \mathcal{N}_u = \emptyset$. Το κενό σύνολο είναι η ένωση της κενής (!) οικογένειας γειτονιών, συμβολικά

$$\emptyset = \bigcup\{\mathcal{N}_u \mid \mathcal{N}_u \subseteq \emptyset\}.$$

(2) Ένα μονοσύνολο $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό, διότι δεν περιέχει καμία γειτονιά, και άρα δεν μπορεί να είναι ένωση γειτονιών. Όμως το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό, αφού

$$\mathcal{N} \setminus \{x\} = \bigcup\{\mathcal{N}_u \mid u \not\sqsubseteq x\}.$$

(3) Αν το $G$ είναι ανοικτό και μη κενό, τότε το σύνολο $\{u \mid \mathcal{N}_u \subseteq G\}$ είναι μη κενό και απαριθμητό, και άρα μπορεί να απαριθμηθεί.

(4) Άμεσο από τον χαρακτηρισμό των ανοικτών συνόλων στην Άσκηση **10.5**.

(5) Αν τα $G_1$, $G_2$ είναι ανοικτά και $x \in G_1 \cap G_2$, τότε υπάρχουν $u, v \sqsubseteq x$ τέτοια ώστε $\mathcal{N}_u \subseteq G_1$ και $\mathcal{N}_v \subseteq G_2$. Οι λέξεις $u$, $v$ είναι συγκρίσιμες επειδή και οι δύο είναι αρχικά τμήματα του $x$. Αν π.χ. $u \sqsubseteq v$, τότε $\mathcal{N}_u \supseteq \mathcal{N}_v$, και επομένως $\mathcal{N}_v \subseteq G_1 \cap G_2$, ακριβώς αυτό που χρειαζόμαστε. Για να δείξουμε τη δυϊκή ιδιότητα των κλειστών θεωρούμε συμπληρώματα. ⊣

Ο χώρος Baire είναι *τοπολογικός χώρος* με τον κλασικό ορισμό που εκθέσαμε στο **4.30**, αλλά πολύ ειδικός, εξαιτίας της επόμενης βασικής ανταπόκρισης ανάμεσα στην τοπολογία του και τη συνδυαστική δομή του δέντρου $\mathbb{N}^*$. Στην απόδειξη—και στη συνέχεια, χωρίς σχόλιο—θα επικαλεστούμε την εξής τετριμμένη ισοδυναμία που συσχετίζει κάθε δέντρο $T$ με το σώμα του:

$$x \in [T] \iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T]. \tag{10-7}$$

Είναι άμεσο επακόλουθο του ορισμού του $[T]$, (9-3).

**10.7. Πρόταση.** *Το σημειοσύνολο $F$ είναι κλειστό αν και μόνον αν είναι το σώμα δέντρου $T$ στο $\mathbb{N}$, $F = [T]$.*

Αποδειξη. Αν $x \notin [T]$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $u \notin T$, και επομένως $\mathcal{N}_u \cap [T] = \emptyset$, άρα $\mathcal{N}_u \subseteq c[T]$· επομένως το $c[T]$ είναι ανοικτό και το $[T]$ κλειστό. Αντιστρόφως, αν αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημειοσύνολο $F$ το δέντρο

$$T^F =_{\text{ορ}} \{u \in \mathbb{N}^* \mid (\exists x \in F)[u \sqsubseteq x]\}, \tag{10-8}$$

τότε προφανώς

$$F \subseteq [T^F].$$

Αν το $F$ είναι κλειστό, έχουμε επίσης $[T^F] \subseteq F$: επειδή αν $x \notin F$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $\mathcal{N}_u \cap F = \emptyset$ αφού το συμπλήρωμα $cF$ είναι ανοικτό, άρα $u \notin T^F$ και $x \notin [T^F]$ από τη (10-7). ⊣

Ο βασικός αυτός χαρακτηρισμός μας επιτρέπει να ταξινομήσουμε τα κλειστά σημειοσύνολα ανάλογα με τις συνδυαστικές ιδιότητες των δέντρων που τα ορίζουν. Δεν είναι λάθος να θεωρήσουμε το σύμπλεγμα συνδυαστικών ορισμών που ακολουθούν ως τη **συνδυαστική γεωμετρία** του $\mathcal{N}$, έστω κι αν δεν είναι «γεωμετρία» με καμία αυστηρή, κλασική αντίληψη του όρου.

**10.8. Ορισμός.** Θέτουμε

$$\begin{aligned} u \mid v &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \text{ οι } u \text{ και } v \text{ είναι } \textbf{ασυμβίβαστες} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\exists i < \mathrm{lh}(u), \mathrm{lh}(v))[u(i) \neq v(i)], \end{aligned} \tag{10-9}$$

και με τη φυσική επέκταση του συμβολισμού στα σημεία,

$$u \mid x \Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \neg[u \sqsubseteq x] \Longleftrightarrow (\exists v \sqsubseteq x)[u \mid v].$$

Η λέξη $u$ **διασπάται** (splits) στο δέντρο $T$ αν έχει ασυμβίβαστες επεκτάσεις στο $T$, και το δέντρο $T$ είναι **διασπώμενο** (splitting) αν κάθε $u \in T$ διασπάται στο $T$,

$$u \in T \Longrightarrow (\exists u_1, u_2 \in T)[u \sqsubseteq u_1 \,\&\, u \sqsubseteq u_2 \,\&\, u_1 \mid u_2].$$

Παρατηρούμε πως τα διασπώμενα δέντρα δεν έχουν τερματικούς κόμβους.

*Το σημειοσύνολο $P$ είναι* **τέλειο** (perfect) *αν είναι σώμα διασπώμενου δέντρου.* Τα τέλεια σημειοσύνολα είναι εξ ορισμού κλειστά.

**10.9. Άσκηση.** *Κάθε γειτονιά $\mathcal{N}_u$ είναι τέλεια.*

**10.10. Πρόταση.** *Κάθε μη κενό, τέλειο σημειοσύνολο $P$ έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$.*

Αποδειξη. Έστω $P = [T]$ όπου το $T$ είναι μη κενό, διασπώμενο, και διάλεξε συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T$$

που φανερώνουν ότι το $T$ είναι διασπώμενο, δηλαδή τέτοιες ώστε για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), \quad u \sqsubseteq r(u), \quad l(u) \mid r(u).$$

Από το Θεώρημα Αναδρομής για Λέξεις **5.33**, υπάρχει συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \to T$$

από το δέντρο των δυαδικών λέξεων στο $T$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad \sigma(u \star \langle 0 \rangle) = l(\sigma(u)), \quad \sigma(u \star \langle 1 \rangle) = r(\sigma(u)).$$

Έτσι το $\sigma(u \star \langle i \rangle)$ είναι γνήσια επέκταση του $\sigma(u)$ για $i = 0, 1$, και άρα η $\sigma$ είναι αυστηρά μονοτονική,

$$u \sqsubsetneq v \Longrightarrow \sigma(u) \sqsubsetneq \sigma(v),$$

και μπορούμε να ορίσουμε την $\pi : \mathcal{C} \to [T]$ με τον τύπο

$$\pi(x) =_{\text{ορ}} \sup \{\sigma(u) \mid u \sqsubseteq x\}. \tag{10-10}$$

Η κρίσιμη ιδιότητα της $\sigma$ είναι ότι σέβεται επίσης την ασυμβιβαστότητα,

$$u \mid v \Longrightarrow \sigma(u) \mid \sigma(v). \tag{10-11}$$

Για να το επαληθεύσουμε αυτό, έστω ο $i$ ελάχιστος με την ιδιότητα $u(i) \neq v(i)$, έτσι που για κάποιο $w$,

$$w \star \langle 0 \rangle \sqsubseteq u, \quad w \star \langle 1 \rangle \sqsubseteq v$$

(ή τανάπαλιν)· συνεπώς (από τους ορισμούς τους) τα $\sigma(w\star\langle 0\rangle)$ και $\sigma(w\star\langle 1\rangle)$ είναι ασυμβίβαστα και από τη μονοτονικότητα της $\sigma$, τα $\sigma(u)$, $\sigma(v)$ είναι επεκτάσεις τους και επομένως επίσης ασυμβίβαστα. Τελικά η (10-11) συνεπάγεται ότι η $\pi$ είναι μονομορφισμός, και αυτό φανερώνει ότι $\mathcal{C} \leq_c [T]$, αυτό που χρειαζόμαστε. $\dashv$

Η απλή αυτή γενίκευση της απόδειξης του Cantor ότι το $\mathbb{R}$ είναι αναπαρίθμητο (**2.14**), υποδείχνει μια φυσική πρόσβαση στο Πρόβλημα του Συνεχούς: για να αποδείξουμε ότι ένα αναπαρίθμητο σημειοσύνολο έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$, αρκεί να δείξουμε ότι περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Αυτό είναι προφανές για τα ανοικτά (επειδή κάθε $\mathcal{N}_u$ είναι τέλειο σύνολο) και επίσης αληθεύει για τα κλειστά, για τα οποία όμως χρειάζεται απόδειξη.

**10.11. Θεώρημα Cantor-Bendixson**. *Κάθε κλειστό υποσύνολο $F$ του $\mathcal{N}$ διασπάται με μοναδικό τρόπο σε δύο ξένα υποσύνολα*

$$F = P \cup S, \quad P \cap S = \emptyset, \tag{10-12}$$

*έτσι που ο* **πυρήνας** (kernel) *$P$ να είναι τέλειο σύνολο και το* **διασπαρμένο μέρος** (scattered part) *$S$ να είναι απαριθμητό.*

Έπεται ότι κάθε αναπαρίθμητο, κλειστό σημειοσύνολο έχει μη κενό, τέλειο πυρήνα, και επομένως έχει πληθικότητα $\mathfrak{c}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $T = T^F$ όπως στην (10-8), έτσι που $F = [T]$ και το $T$ δεν έχει τερματικούς κόμβους. Θέτουμε

$$\begin{aligned} S &=_{\text{ορ}} \bigcup\{[T_u] \mid u \in T \ \&\ |[T_u]| \leq_c \aleph_0\}, \\ P &=_{\text{ορ}} F \setminus S. \end{aligned}$$

Εξ ορισμού το $S$ είναι ένωση απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων και επομένως απαριθμητό (πρόσεξε την επίκληση του $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ εδώ), και απομένει να δείξουμε ότι το $P$ είναι τέλειο.

Το σύνολο λέξεων

$$kT = \{u \in T \mid |[T_u]| >_c \aleph_0\}$$

είναι (εύκολα) δέντρο, και κατευθείαν από τον ορισμό του $S$,

$$x \in S \iff x \in F \ \&\ (\exists u \sqsubseteq x)[u \notin kT].$$

Αλλά $P = F \setminus S$, άρα

$$\begin{aligned} x \in P &\iff x \in F \,\&\, [x \notin F \vee (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT]] \\ &\iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in T] \,\&\, (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT] \\ &\iff (\forall u \sqsubseteq x)[u \in kT] \\ &\iff x \in [kT], \end{aligned}$$

έτσι που αρκεί να δείξουμε ότι το $kT$ είναι διασπώμενο. Προς απαγωγή σε άτοπο, δεχόμαστε ότι κάποιο $u \in kT$ δεν διασπάται. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι επεκτάσεις του $u$ στο $kT$ είναι συγκρίσιμες, επομένως προσδιορίζουν ένα μοναδικό σημείο

$$x = \sup\{v \in kT \mid u \sqsubseteq v\}.$$

Αφού κάθε επέκταση του $u$ στο $kT$ είναι προσέγγιση του $x$,

$$[T_u] = \{x\} \cup \bigcup\{[T_v] \mid u \sqsubseteq v \in T \,\&\, |[T_v]| \leq_c \aleph_0\},$$

και συνεπώς το $[T_u]$ είναι απαριθμητή ένωση απαριθμητών συνόλων, που είναι άτοπο.

Αφήνουμε τη μοναδικότητα της διάσπασης (10-12) για πρόβλημα, **x10.2**. ⊣

**10.12. Ορισμός.** Μια οικογένεια Γ σημειοσυνόλων έχει την **ιδιότητα P** αν κάθε αναπαρίθμητο σύνολο στην Γ περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Μ' αυτή την κλασική ορολογία,[24] η οικογένεια $\mathcal{F}$ των κλειστών σημειοσυνόλων έχει την ιδιότητα **P**, ή (απλούστερα), *κάθε κλειστό σημειοσύνολο έχει την ιδιότητα* **P**.

**10.13. Άσκηση.** *Αν μια οικογένεια σημειοσυνόλων* Γ *έχει την ιδιότητα* **P**, *τότε και η οικογένεια* $\Gamma_\sigma$ *των απαριθμητών ενώσεων από την* Γ *επίσης έχει την ιδιότητα* **P**.

Συνάγεται ότι κάθε $\mathcal{F}_\sigma$ σημειοσύνολο της μορφής

$$A = \bigcup\nolimits_{n\in\mathbb{N}} F_n \tag{10-13}$$

με κάθε $F_n$ κλειστό έχει την ιδιότητα **P**. Η πρόταση αληθεύει και για τα $\mathcal{G}_\delta$-σύνολα της μορφής

$$A = \bigcap\nolimits_{n\in\mathbb{N}} G_n \tag{10-14}$$

με κάθε $G_n$ ανοικτό, αλλά η απόδειξη δεν είναι τόσο απλή· είναι μάλιστα ευκολότερο να αποδείξουμε κατ' ευθείαν την ιδιότητα **P** για την πολύ μεγαλύτερη οικογένεια των αναλυτικών σημειοσυνόλων.

**10.14. Ορισμός.** Σύμφωνα με τον ορισμό **6.25**, συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **συνεχής**, αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου στο $Y$ είναι ανοικτό σύνολο στο $X$. Το σημειοσύνολο[25] $A \subseteq \mathcal{N}$ είναι **αναλυτικό** (analytic) ή **Suslin**, αν είτε $A = \emptyset$ ή το $A$ είναι εικόνα του χώρου Baire από μια συνεχή συνάρτηση, συμβολικά:

$$\mathcal{A} =_{\text{ορ}} \{A \subseteq \mathcal{N} \mid A = \emptyset \vee (\exists \text{ συνεχής } f : \mathcal{N} \to \mathcal{N})[A = f[\mathcal{N}]]\}.$$

Η συνέχεια στο $\mathcal{N}$ επιδέχεται έναν απλό, συνδυαστικό χαρακτηρισμό που είναι το κλειδί των εφαρμογών της.

[24] Η κλασική ορολογία για τα σημειοσύνολα είναι κάπως άσχετη, αλλά τόσο καλά εδραιωμένη που δεν μπορεί κανείς να την αποφύγει. Σε κάθε τοπολογικό χώρο, τα κλειστά σύνολα καλούνται $\mathcal{F}$-σύνολα, από το γαλλικό *fermèt*· τα ανοικτά καλούνται $\mathcal{G}$-σύνολα, από το γερμανικό *Gebiete* (σημαίνει *περιοχή*)· και απαριθμητές ενώσεις Γ-συνόλων είναι $\Gamma_\sigma$-σύνολα ενώ απαριθμητές τομές Γ-συνόλων είναι $\Gamma_\delta$-σύνολα, από τα γερμανικά *Summe* και *Durchschnit* για *ένωση* και *τομή*. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την ορολογία, εκτός από μερικές αναφορές σε $\mathcal{F}_\sigma$ και $\mathcal{G}_\delta$ σημειοσύνολα.

[25] Περιοριζόμαστε στο χώρο Baire, επειδή υπάρχουν πολλοί ορισμοί «αναλυτικών συνόλων» που δεν είναι ισοδύναμοι σε γενικούς τοπολογικούς χώρους, αν και συμπίπτουν στο $\mathcal{N}$.

**10.15. Θεώρημα.** *Η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν υπάρχει μονοτονική συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ στις λέξεις, τέτοια ώστε*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{\tau(u) \mid u \sqsubseteq x\} \quad (x \in \mathcal{N}) \\ &= \lim_n \tau(\overline{x}(n)). \end{aligned} \tag{10-15}$$

Θα λέμε ότι η $\tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ **υπολογίζει** τη συνάρτηση $f$ αν είναι μονοτονική και ικανοποιεί την (10-15).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η $f$ ικανοποιεί την (10-15), τότε

$$f(x) \in \mathcal{N}_v \iff (\exists u \sqsubseteq x)[v \sqsubseteq \tau(u)],$$

και συνεπώς κάθε αντίστροφη εικόνα γειτονιάς

$$f^{-1}[\mathcal{N}_v] = \bigcup\{\mathcal{N}_u \mid v \sqsubseteq \tau(u)\}$$

είναι ένωση γειτονιών, που σημαίνει ότι η $f$ είναι συνεχής.

Για το δυσκολότερο αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η $f$ είναι συνεχής και θέτουμε

$$S(u) =_{\text{ορ}} \{v \in \mathbb{N}^* \mid f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v\} \quad (u \in \mathbb{N}^*).$$

Κάθε $S(u) \neq \emptyset$, αφού η ρίζα $\emptyset \in S(u)$, $v \sqsubseteq v' \in S(u) \Longrightarrow v \in S(u)$, και

$$v, v' \in S(u) \Longrightarrow f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} \Longrightarrow [v \sqsubseteq v' \vee v' \sqsubseteq v],$$

επειδή $v \mid v' \Longrightarrow \mathcal{N}_v \cap \mathcal{N}_{v'} = \emptyset$. Επομένως, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 1. Υπάρχει κάποιο $v \in S(u)$ τέτοιο ώστε $\text{lh}(v) = \text{lh}(u)$. Θέτουμε

$$\tau(u) =_{\text{ορ}} v = \text{ η μοναδική λέξη στο } S(u) \text{ τέτοια ώστε } \text{lh}(v) = \text{lh}(u).$$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2. Δεν υπάρχει $v \in S(u)$ τέτοιο ώστε $\text{lh}(v) = \text{lh}(u)$. Σ' αυτήν την περίπτωση θέτουμε

$$\tau(u) =_{\text{ορ}} \sup\{v \mid v \in S(u)\}.$$

Η μονοτονικότητα της $\tau$ έπεται εύκολα από τις συνεπαγωγές

$$u_1 \sqsubseteq u_2 \Longrightarrow f[\mathcal{N}_{u_1}] \supseteq f[\mathcal{N}_{u_2}] \Longrightarrow S(u_1) \subseteq S(u_2),$$

θεωρώντας τις διάφορες περιπτώσεις στον ορισμό των $\tau(u_1)$ και $\tau(u_2)$. Για να δείξουμε την (10-15), παρατηρούμε πρώτα ότι επειδή $\tau(u) \in S(u)$,

$$u \sqsubseteq x \in \mathcal{N} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{N}_{\tau(u)} \Longrightarrow \tau(u) \sqsubseteq f(x).$$

Από τη συνέχεια της $f$, αν $v \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο $u \sqsubseteq x$, $f[\mathcal{N}_u] \subseteq \mathcal{N}_v$, άρα $v \in S(u)$ και είτε αμέσως $v \sqsubseteq \tau(u)$, αν η τιμή $\tau(u)$ ορίζεται με την ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ 2, ή υπάρχει κάποια επέκταση $u'$ του $u$, με $\text{lh}(u') = \text{lh}(v)$ και τέτοια ώστε $v = \tau(u')$, στην άλλη περίπτωση. ⊣

Η (10-15) δίνει έναν υπολογιστικό χαρακτηρισμό της συνέχειας: η συνάρτηση $\tau(u)$ στις λέξεις μας δίνει ολοένα καλύτερες προσεγγίσεις $\tau(u) \sqsubseteq f(x)$ της τιμής της $f$, καθώς την τροφοδοτούμε με διαδοχικά ακριβέστερες προσεγγίσεις $u \sqsubseteq x$ της μεταβλητής της. Με τις έννοιες του Κεφαλαίου **6**, μπορούμε να δώσουμε αυστηρή και κομψή διατύπωση αυτής της ιδέας.

**10.16. Πόρισμα.** *Η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν είναι ο περιορισμός στο $\mathcal{N}$ κάποιας μονοτονικής, συνεχούς απεικόνισης*

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$$

*στον επαγωγικό χώρο* $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$. Σύμφωνα με τον Ορισμό **6.22**, η μονοτονική απεικόνιση $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ είναι συνεχής αν ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$\pi(x)(i) = w \iff (\exists u \in \mathbb{N}^*)[u \sqsubseteq x \,\&\, \pi(u)(i) = w].$$

Χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι ο $\mathcal{N}$ είναι υποσύνολο του $(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$, που αποτελείται ακριβώς από όλα τα μεγιστικά του σημεία· η βασική παρατήρηση είναι η διάσπαση

$$(\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) = \mathbb{N}^* \cup \mathcal{N}, \quad \mathbb{N}^* \cap \mathcal{N} = \emptyset. \tag{10-16}$$

Αποδειξη. Αν η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής, υποθέτουμε ότι η $\tau$ την υπολογίζει όπως στο Θεώρημα, και θέτουμε (επί λέξει)

$$\pi = \tau \cup f,$$

δηλαδή $\pi(u) = \tau(u)$ για $u \in \mathbb{N}^*$ και $\pi(x) = f(x)$ για $x \in \mathcal{N}$. Η συνέχεια της $\pi$ είναι προφανής και το αντίστροφο πολύ εύκολο. $\dashv$

**10.17. Άσκηση.** *Δείξε το «εύκολο αντίστροφο», δηλαδή ότι αν η $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι ο περιορισμός στον $\mathcal{N}$ κάποιας συνεχούς απεικόνισης*

$$\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}),$$

*τότε η $f$ είναι συνεχής.*

Το Πόρισμα μας επιτρέπει να αναγνωρίζουμε αμέσως τη συνέχεια συγκεκριμένων συναρτήσεων στο χώρο Baire, με το μάτι, παρατηρώντας ότι κάθε ψηφίο $f(x)(i)$ της τιμής $f(x)$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση πεπερασμένου πλήθους τιμών του $x$. Όπως και στο Κεφάλαιο **6**, η αναφορά σε κάποια «προφανώς συνεχή» συνάρτηση χωρίς απόδειξη της συνέχειας υπαινίσσεται επίκληση αυτού του αποτελέσματος.

**10.18. Ορισμός.** Ένα σημειοσύνολο $K \subseteq \mathcal{N}$ είναι **συμπαγές** (compact) αν $K = [T]$ όπου $T$ δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης στο $\mathbb{N}$. Έπεται ότι κάθε συμπαγές σημειοσύνολο είναι κλειστό, και το $\mathcal{C}$ είναι συμπαγές.

Μερικοί θα παραξενευτούν μ' αυτόν τον ορισμό της συμπαγίας για σημειοσύνολα, αφού υπάρχει γνωστός, κλασικός ορισμός συμπαγίας σε γενικούς τοπολογικούς χώρος, σύμφωνα με τον οποίο το **10.18** είναι θεώρημα. Χωρίς σχόλιο κάναμε το ίδιο και με την «τελειότητα», που κι αυτή είναι γενική, τοπολογική έννοια. Εδώ ενδιαφερόμαστε στις συνδυαστικές ιδιότητες αυτών των σημειοσυνόλων που είναι ειδικές για το χώρο Baire, και θα αφήσουμε τους τοπολογικούς χαρακτηρισμούς τους για προβλήματα, **x10.17** και **x10.21**.

**10.19. Πρόταση.** (1) *Η εικόνα $f[K]$ συμπαγούς σημειοσυνόλου $K$ από συνεχή συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συμπαγής.*

(2) *Η εικόνα $f[K]$ συμπαγούς και τέλειου σημειοσυνόλου $K$ από συνεχή μονομορφισμό $f : \mathcal{N} \rightarrowtail \mathcal{N}$ είναι συμπαγής και τέλεια.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $K = [T]$ όπου το $T$ είναι πεπερασμένης διακλάδωσης και η $\tau$ υπολογίζει την $f$ σύμφωνα με την (10-15), και έστω

$$S = T^{f[K]} = \{v \mid (\exists x \in K)[v \sqsubseteq f(x)]\}$$

το δέντρο όλων των αρχικών τμημάτων της εικόνας $f[K]$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $S$ είναι δέντρο πεπερασμένης διακλάδωσης και $f[K] = [S]$.

Έστω $v \in S$. Θέτουμε

$$B =_{\text{ορ}} \{u \in T \mid v \sqsubseteq \tau(u) \vee v \,|\, \tau(u)\},$$

και υποθέτουμε ότι $x \in [T]$. Αν $v \,|\, f(x)$, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός $n$, τέτοιος ώστε $v \,|\, \tau(\overline{x}(n))$, άρα $\overline{x}(n) \in B$· και αν $v \sqsubseteq f(x)$, τότε για κάποιο $n$, $v \sqsubseteq \tau(\overline{x}(n))$, οπότε πάλι $\overline{x}(n) \in B$. Άρα το $B$ είναι φράχτης του $T$, και από το Θεώρημα Βεντάλιας **9.9** πρέπει να έχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, \dots, u_n\} \subseteq B$$

που επίσης είναι φράχτης. Προκύπτει ότι για κάθε $x \in K$ τέτοιο ώστε $v \sqsubseteq f(x)$, υπάρχει κάποιο $u_i$ που ικανοποιεί την $v \sqsubseteq \tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$, και επομένως κάθε παιδί του $v$ στο $S$ είναι αρχικό τμήμα ενός από τα $\tau(u_i)$, και ο αριθμός τους είναι πεπερασμένος.

Προφανώς, $f[K] \subseteq [S]$. Για να δείξουμε ότι $[S] \subseteq f[K]$, δεχόμαστε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι υπάρχει κάποιο $y \in [S] \setminus f[K]$ και θέτουμε

$$B =_{\text{ορ}} \{u \in T \mid \tau(u) \,|\, y\}.$$

Τώρα το $B$ είναι φράχτης του $T$, επειδή ο μόνος τρόπος για να είναι το $\tau(\overline{x}(n))$ συμβατό με το $y$ για κάθε $n$ είναι να ισχύει η $f(x) = y$. Από το Θεώρημα Βεντάλιας, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο

$$B_0 = \{u_0, \dots, u_n\} \subseteq B$$

που επίσης είναι φράχτης του $T$. Θέτουμε

$$k = \max\{\text{lh}(\tau(u_i)) \mid i \leq n\} + 1,$$

και επιλέγουμε κάποιο $x \in [T]$ τέτοιο ώστε $\overline{y}(k) \subseteq f(x)$, που πρέπει να υπάρχει επειδή $y \in [S]$, έτσι που το $y$ επιδέχεται οσοδήποτε ακριβείς προσεγγίσεις από μέλη της εικόνας της $f$. Από την άλλη μεριά, $u_i \sqsubseteq x$ για κάποιο $i$, επειδή το $B_0$ είναι φράχτης· άρα $\tau(u_i) \sqsubseteq f(x)$ επειδή η $\tau$ υπολογίζει την $f$· άρα τα $\tau(u_i)$ και $\overline{y}(k)$ είναι αρχικά τμήματα του $f(x)$, και επομένως συμβατά· και επειδή ο κόμβος $\tau(u_i)$ έχει μικρότερο μήκος του $\overline{y}(k)$, πρέπει να ισχύει η $\tau(u_i) \sqsubseteq y$, που τελικά αντιτίθεται στον ορισμό του $B$.

(2) Με τον ίδιο συμβολισμό του (1) και την επιπρόσθετη υπόθεση, έστω $v \in S$, έτσι που για κάποιο $u \in T$, $v \sqsubseteq \tau(u)$. Αφού το $T$ είναι διασπώμενο, υπάρχουν διαφορετικά σημεία

$$x_1, x_2 \in K \cap \mathcal{N}_u,$$

και αφού η $\tau$ υπολογίζει την $f$,

$$\tau(u) \sqsubseteq f(x_1), \quad \tau(u) \sqsubseteq f(x_2). \tag{10-17}$$

Αλλά $f(x_1) \neq f(x_2)$, επειδή η $f$ είναι μονομορφισμός, άρα υπάρχουν ασυμβίβαστα $v_1 \sqsubseteq f(x_1)$ και $v_2 \sqsubseteq f(x_2)$ που επεκτείνουν το $\tau(u)$ από την (10-17), και αυτά διασπούν την $\tau(u)$, άρα και το μικρότερο $v \sqsubseteq \tau(u)$ στο $S$. ⊣

**10.20. Θεώρημα Τέλειου Συνόλου** (Perfect Set Theorem, Suslin, 1916). *Κάθε αναπαρίθμητο αναλυτικό σημειοσύνολο έχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

Αποδειξη. Έστω $A = f[\mathbb{N}^*]$ αναπαρίθμητο σύνολο, δέξου ότι η $\tau$ υπολογίζει την $f$, και θέσε

$$T =_{\text{ορ}} \{u \in \mathbb{N}^* \mid |f[\mathcal{N}_u]| >_c \aleph_0\}. \tag{10-18}$$

Προφανώς το $T$ είναι μη κενό δέντρο.

**Λήμμα**. *Το δέντρο $T$ είναι $\tau$-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$, υπάρχουν $u_1, u_2 \in T$ τέτοια ώστε*

$$u \sqsubseteq u_1, \quad u \sqsubseteq u_2, \quad \tau(u_1) \,|\, \tau(u_2).$$

*Απόδειξη*. Για κάθε $u \in T$ και κάθε σταθερό $x \in \mathcal{N}_u$,

$$f[\mathcal{N}_u] = \{f(x)\} \;\cup\; \bigcup\{f[\mathcal{N}_{u'}] \mid \tau(u') \,|\, f(x)\} \tag{10-19}$$

επειδή $f(y) \neq f(x) \Longrightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(y)$ για κάποιο $u'$ τέτοιο ώστε η $\tau(u')$ να είναι ασύμβατη με το $f(x)$. Αν το Λήμμα δεν αληθεύει για το $u$, τότε

$$u \sqsubseteq u' \in T \Longrightarrow \tau(u') \sqsubseteq f(x)\cdot$$

έτσι που κάθε εικόνα $f[\mathcal{N}_{u'}]$ με $\tau(u') \,|\, f(x)$ στην (10-19) αναφέρεται σε κάποιο $u' \notin T$ και είναι απαριθμητή, και υπάρχουν μονάχα απαριθμητές το πλήθος επιλογές για το $u'$. Άρα η εικόνα $f[\mathcal{N}_u]$ είναι ένωση ενός μονοσυνόλου και μιας απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων, και επομένως είναι απαριθμητή, ενάντια στην υπόθεση. ⊣ (Λήμμα)

Όπως στο **10.10**, επιλέγουμε τώρα συναρτήσεις

$$l : T \to T, \quad r : T \to T$$

που φανερώνουν ότι το $T$ είναι $\tau$-διασπώμενο, δηλαδή για κάθε $u \in T$,

$$u \sqsubseteq l(u), \quad u \sqsubseteq r(u), \quad \tau(l(u)) \,|\, \tau(r(u)),$$

και ορίζουμε με επίκληση του Θεωρήματος Αναδρομής για Λέξεις **5.33** μια συνάρτηση

$$\sigma : \{0,1\}^* \rightharpoonup T$$

από το δέντρο των δυαδικών λέξεων στο $T$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\sigma(\emptyset) = \emptyset, \quad \sigma(u \star \langle 0\rangle) = l(\sigma(u)), \quad \sigma(u \star \langle 1\rangle) = r(\sigma(u)),$$

και αυτή η $\sigma$ είναι (απαραίτητα) μονοτονική. Η κρίσιμη ιδιότητά της είναι ότι αντιστοιχίζει ασυμβίβαστες δυαδικές λέξεις σε $\tau$-ασυμβίβαστες λέξεις,

$$u \,|\, v \Longrightarrow \tau(\sigma(u)) \,|\, \tau(\sigma(v)), \tag{10-20}$$

κάτι που επαληθεύεται ακριβώς όπως επαληθεύτηκε η (10-11) στην απόδειξη του **10.10**. Επίσης, η $\sigma$ υπολογίζει μια συνεχή $g : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$,

$$g(x) = \sup\{\sigma(u) \mid u \sqsubseteq x\},$$

και προφανώς

$$g[\mathcal{C}] \subseteq [T]. \tag{10-21}$$

Θεωρούμε τώρα τη σύνθεση $h = fg$ της δοσμένης $f$ και αυτής της $g$, που υπολογίζεται από τη σύνθεση των $\tau$ και $\sigma$:

$$h(x) = \sup\{\tau(\sigma(u)) \mid u \sqsubseteq x\}.$$

Η $h$ είναι συνεχής μονομορφισμός από το (10-20), άρα η εικόνα της $h[\mathcal{C}] = fg[\mathcal{C}]$ είναι συμπαγής και τέλεια από το **10.19**, και είναι υποσύνολο του $f[T] \subseteq A$ από τη (10-21). ⊣

Το αποτέλεσμα δεν σημαίνει τίποτα βέβαια, μέχρις ότου δείξουμε ότι υπάρχουν πάμπολλα αναλυτικά σύνολα.

**10.21. Λήμμα.** *Κάθε κλειστό σημειοσύνολο είναι αναλυτικό.*

Απόδειξη. Έστω $T = T^F$ όπως στο (10-8) για το δοσμένο κλειστό σύνολο $F \neq \emptyset$, έτσι ώστε πέρα από το $F = [T]$ γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε λέξη στο $T$ έχει επέκταση, δεν υπάρχουν τερματικοί κόμβοι. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια συνάρτηση $l : T \to T$ τέτοια ώστε

$$u \in T \Longrightarrow u \sqsubseteq l(u) \ \&\ \mathrm{lh}(l(u)) = \mathrm{lh}(u) + 1.$$

Έστω

$$\mathrm{rtail}(u) =_{\mathrm{op}} u \restriction [0, \mathrm{lh}(u) - 1) \quad (\mathrm{lh}(u) > 0) \tag{10-22}$$

η μερική συνάρτηση που αφαιρεί από κάθε μη κενή λέξη το τελευταίο της ψηφίο. Από το Θεώρημα Αναδρομής για Λέξεις **5.33**, υπάρχει συνάρτηση $\tau : \mathbb{N}^* \rightharpoonup T$ τέτοια ώστε

$$\tau(u) = \begin{cases} u, & \text{αν } u \in T, \\ l(\tau(\mathrm{rtail}(u))), & \text{αν } u \notin T, \end{cases}$$

που είναι (εύκολα) *προβολή* του $\mathbb{N}^*$ επί του $T$, δηλαδή είναι ολική, σέβεται τα μήκη και συμφωνεί με την ταυτοτική στο $T$. Απ' αυτά προκύπτει ότι η $\tau$ υπολογίζει κάποια συνάρτηση $f : \mathcal{N} \twoheadrightarrow [T]$. ⊣

**10.22. Λήμμα.** *Κάθε συνεχής εικόνα αναλυτικού σημειοσυνόλου είναι αναλυτική.*

Απόδειξη. Αν $A = f[B]$ και $B = g[\mathcal{N}]$, τότε $A = fg[\mathcal{N}]$, και η σύνθεση $fg$ είναι συνεχής. ⊣

**10.23. Λήμμα.** *Αν $f, g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε το σύνολο*

$$E = \{x \mid f(x) = g(x)\}$$

*των σημείων στα οποία συμφωνούν είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Επειδή διαφορετικά σημεία έχουν ασυμβίβαστες προσεγγίσεις,

$$\begin{aligned} x \notin E &\iff f(x) \neq g(x) \\ &\iff (\exists u, v)[f(x) \in \mathcal{N}_u \ \&\ g(x) \in \mathcal{N}_v \ \&\ u \,|\, v], \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι
$$cE = \bigcup\{f^{-1}[\mathcal{N}_u] \cap g^{-1}[\mathcal{N}_v] \mid u \,|\, v\},$$
έτσι ώστε το $cE$ είναι ένωση ανοικτών συνόλων και επομένως ανοικτό. $\dashv$

**10.24. Θεώρημα.** *Απαριθμητές ενώσεις και απαριθμητές τομές αναλυτικών σημειοσυνόλων είναι επίσης αναλυτικές.*

Αποδειξη. Έστω $A_n = f_n[\mathcal{N}]$ με κάθε $f_n$ συνεχή, και όρισε πρώτα την $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ με τον τύπο
$$f(z) = f_{z(0)}(\mathrm{tail}(z)),$$
όπου
$$\mathrm{tail}(z) =_{\mathrm{op}} (i \mapsto z(i+1)) = (z(1), z(2), \dots)$$
είναι η συνάρτηση που αποκεφαλίζει σημεία. Προφανώς η $f$ είναι συνεχής: επειδή κάθε $f(z)(i)$ μπορεί να υπολογιστεί από πεπερασμένο πλήθος τιμών του $z$, θέτοντας πρώτα $n = z(0)$ και μετά χρησιμοποιώντας το πεπερασμένο σύνολο τιμών του $\mathrm{tail}(z)$ που χρειάζονται για τον υπολογισμό της $f_n(\mathrm{tail}(z))$. Επίσης:
$$\begin{aligned} y \in \textstyle\bigcup_n f_n[\mathcal{N}] &\iff (\exists n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{N})[y = f_n(x)] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[y = f_{z(0)}(\mathrm{tail}(z))] \\ &\qquad\qquad \text{με } z(0) = n, \mathrm{tail}(z) = x \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[y = f(z)], \end{aligned}$$
άρα $\bigcup_n A_n = f[\mathcal{N}]$ και η ένωση των $A_n$ είναι αναλυτικό σύνολο.

Το ουσιαστικό στοιχείο αυτού του υπολογισμού ήταν ότι η απεικόνιση
$$z \mapsto (z(0), \mathrm{tail}(z))$$
είναι επιμορφισμός του $\mathcal{N}$ στο $\mathbb{N} \times \mathcal{N}$—πράγματι αντιστοιχία— με συνεχείς συντεταγμένες. Για να δείξουμε ότι η τομή $\bigcap_n A_n$ είναι αναλυτική, χρειαζόμαστε έναν ανάλογο επιμορφισμό
$$\pi : \mathcal{N} \twoheadrightarrow (\mathbb{N} \to \mathcal{N})$$
του $\mathcal{N}$ επί του συνόλου των άπειρων ακολουθιών από σημεία. Για την κατασκευή μιας τέτοιας $\pi$, προσδιορίζουμε κάποια συγκεκριμένη αντιστοιχία $\rho : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{N}$ και θέτουμε
$$\rho_n(z) = (i \mapsto z(\rho(n,i))). \tag{10-23}$$
Κάθε $\rho_n : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι προφανώς συνεχής, και για κάθε άπειρη ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σημείων μπορούμε να βρούμε κάποιο $z$ τέτοιο ώστε
$$z(\rho(n,i)) = x_n(i) \quad (n, i \in \mathbb{N})\cdot$$
απ' αυτό συνάγεται ότι
$$\rho_n(z) = x_n \quad (n \in \mathbb{N})\cdot$$
με άλλα λόγια, η αντιστοιχία
$$\pi(z) = (n \mapsto \rho_n(z))$$

είναι επιμορφισμός. Από το $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ τώρα,

$$\begin{aligned} y \in \bigcap_n A_n &\iff (\forall n)(\exists x)[y = f_n(x)] \\ &\iff (\exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}})(\forall n)[y = f_n(x_n)] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})(\forall n)[y = f_n(\rho_n(z))] \\ &\iff (\exists z \in \mathcal{N})[(\forall n)[f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z))] \\ &\qquad\qquad \& \ y = f_0(\rho_0(z))]. \end{aligned} \tag{10-24}$$

Για κάθε $n$, το σύνολο

$$B_n = \{z \in \mathcal{N} \mid f_n(\rho_n(z)) = f_0(\rho_0(z))\}$$

είναι κλειστό από το **10.23**, άρα η τομή

$$B = \bigcap_n B_n$$

είναι επίσης κλειστή. Αλλά από την (10-24),

$$\bigcap_n A_n = f_0\rho_0[B],$$

που σημαίνει ότι η τομή των $A_n$ είναι αναλυτική. ⊣

**10.25. Ορισμός.** Η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των συνόλων **Borel** τοπολογικού χώρου $X$ είναι η ελάχιστη οικογένεια υποσυνόλων του $X$ που περιέχει τα ανοικτά σύνολα και είναι **$\sigma$-πεδίο**, δηλαδή είναι κλειστή για απαριθμητές ενώσεις και την πράξη του συμπληρώματος:

$$\begin{aligned} (\forall n)[A_n \in \mathcal{B}(X)] &\implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(X), \\ A \in \mathcal{B}(X) &\implies cA \in \mathcal{B}(X). \end{aligned}$$

Κυρίως ενδιαφερόμαστε για το χώρο Baire βέβαια,

$$\mathcal{B} =_{\text{ορ}} \mathcal{B}(\mathcal{N}) = \text{η οικογένεια των Borel σημειοσυνόλων.}$$

**10.26. Άσκηση.** *Δείξε ότι ο ορισμός έχει νόημα, δηλαδή η τομή*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) = \bigcap\{\mathcal{E} \mid \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} \\ &\& (\forall\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{E})[\textstyle\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}] \\ &\& (\forall A \in \mathcal{E})[cA \in \mathcal{E}]\} \end{aligned}$$

*είναι $\sigma$-πεδίο που περιέχει τα ανοικτά, και επομένως το ελάχιστο τέτοιο $\sigma$-πεδίο.*

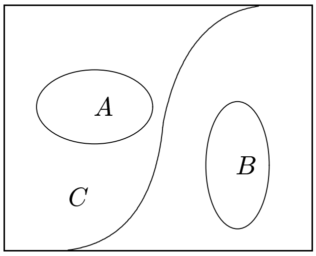
**10.27. Άσκηση.** *Αν $\{A_n\}$ ακολουθία από σύνολα Borel, τότε η τομή $\bigcap_n A_n$ είναι επίσης Borel.*

**10.28. Πόρισμα.** *Κάθε Borel σημειοσύνολο είναι αναλυτικό* (Suslin) *και επομένως έχει την ιδιότητα* **P** (Alexandroff, Hausdorff).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω

$$C\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathcal{N} \mid cA \in \mathcal{A}\} \tag{10-25}$$

η οικογένεια των **αναλυτικών συμπληρωμάτων**. Η οικογένεια $\mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$ των σημειοσυνόλων που είναι αναλυτικά και που έχουν αναλυτικό συμπλήρωμα είναι




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **10.2**. Το $C$ διαχωρίζει το $A$ από το $B$.

$\sigma$-πεδίο, αφού εξ ορισμού είναι κλειστή για τον τελεστή του συμπληρώματος, και αν κάθε $A_n \in \mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$, τότε το $\bigcup_n A_n$ και επίσης το συμπλήρωμά του

$$c(\bigcup_n A_n) = \bigcap_n cA_n$$

είναι αναλυτικά από το θεώρημα. Επίσης, κάθε ανοικτό σύνολο

$$G = \bigcup_n \{\mathcal{N}_u \mid \mathcal{N}_u \subseteq G\}$$

είναι απαριθμητή ένωση γειτονιών, επομένως αναλυτικό, αλλά και με αναλυτικό συμπλήρωμα από το **10.21**. Συνεπάγεται ότι η $\mathcal{A} \cap C\mathcal{A}$ είναι $\sigma$-πεδίο που περιέχει όλα τα ανοικτά σημειοσύνολα, και επομένως περιέχει όλα τα σύνολα Borel. $\dashv$

Στα επόμενα δύο θεωρήματα διασαφηνίζουμε τη σχέση ανάμεσα στα αναλυτικά και στα Borel σημειοσύνολα.

Το σημειοσύνολο $C \subseteq \mathcal{N}$ *διαχωρίζει* το σημειοσύνολο $A$ από το σημειοσύνολο $B$, αν

$$A \subseteq C, \quad C \cap B = \emptyset.$$

Πρόσεξε ότι αν το $C$ διαχωρίζει το $A$ από το $B$, τότε $A \cap B = \emptyset$.

**10.29. Λήμμα.** (1) *Έστω $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ δύο ακολουθίες σημειοσυνόλων και για όλα τα $i$ και $j$, το $C_{ij}$ διαχωρίζει το $A_i$ από το $B_j$. Τότε το σύνολο $C = \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$ διαχωρίζει το $\bigcup_i A_i$ από το $\bigcup_j B_j$, δηλαδή*

$$\bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \bigcap_j C_{ij}, \quad \Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big) \cap \bigcup_j B_j = \emptyset. \tag{10-26}$$

(2) *Αν τα $\{A_i\}$ και $\{B_j\}$ είναι δύο ακολουθίες σημειοσυνόλων και δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το $A = \bigcup_i A_i$ από το $B = \bigcup_j B_j$, τότε υπάρχουν δύο αριθμοί $i_0$ και $j_0$ ώστε κανένα σύνολο Borel να μη διαχωρίζει το $A_{i_0}$ από το $B_{j_0}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Σταθεροποιούμε κάποιο $i$· τώρα για όλα τα $j$, από την υπόθεση, $A_i \subseteq C_{ij}$, και έτσι

$$A_i \subseteq \bigcap_j C_{ij}.$$

Παίρνοντας ενώσεις και στις δύο μεριές, έχουμε

$$A = \bigcup_i A_i \subseteq \bigcup_i \bigcap_j C_{ij},$$

που είναι και η πρώτη σχέση που χρειαζόμαστε. Για τη δεύτερη, παρατηρούμε ότι η υπόθεση $B_j \cap C_{ij} = \emptyset$, ουσιαστικά σημαίνει ότι

$$B_j \subseteq cC_{ij} \quad (cC_{ij} = \mathcal{N} \setminus C_{ij})\cdot$$

και έτσι, σταθεροποιώντας το $i$ και παίρνοντας πάλι ενώσεις, έχουμε

$$B = \bigcup_j B_j \subseteq \bigcup_j C_{ij},$$

το οποίο με τη σειρά του, αφού το $i$ ήταν τυχαίο, συνεπάγεται ότι

$$B \subseteq \bigcap_i \bigcup_j cC_{ij}.$$

Τώρα από το Πρόβλημα **x1.3** (De Morgan's laws) έχουμε

$$\bigcap_i \bigcup_j cC_{ij} = c\Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big),$$

και τελικά $B \cap \Big(\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}\Big) = \emptyset$, αυτό που θέλαμε.

(2) Με απαγωγή σε άτοπο, έυκολα: διότι αν υπήρχε κάποιο σύνολο Borel $C_{ij}$ που να διαχώριζε το $A_i$ από το $B_j$, τότε το $\bigcup_i \bigcap_j C_{ij}$ θα διαχώριζε το $A$ από το $B$—όμως είναι σύνολο Borel. $\dashv$

**10.30. Το Θεώρημα Διαχωρισμού** *(*The Seperation Theorem, Lusin*) Αν τα $A, B \subseteq \mathcal{N}$ είναι αναλυτικά σημειοσύνολα και $A \cap B = \emptyset$, τότε υπάρχει ένα Borel σημειοσύνολο $C$ που διαχωρίζει το $A$ από το $B$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = f[\mathcal{N}]$ και $B = g[\mathcal{N}]$, όπου οι $f$ και $g$ είναι συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες από το Θεώρημα **10.15** υπολογίζονται από δοσμένες, μονοτονικές συναρτήσεις λέξεων $\sigma, \tau : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = \lim_n \sigma(\overline{x}(n)), \quad g(y) = \lim_n \tau(\overline{y}(n)).$$

Για όλες τις λέξεις $u$ και $v$, θέτουμε

$$A_u = f[\mathcal{N}_u] = \{f(x) \mid u \sqsubseteq x\}, \quad B_v = g[\mathcal{N}_v] = \{g(y) \mid v \sqsubseteq y\},$$

και τώρα, το ότι η $\sigma$ υπολογίζει την $f$ και η $\tau$ την $g$, σημαίνει ότι

$$A_u \subseteq \mathcal{N}_{\sigma(u)}, \quad B_v \subseteq \mathcal{N}_{\tau(v)}. \tag{10-27}$$

Επίσης έχουμε $A_\emptyset = A$, $B_\emptyset = B$, και, εύκολα, για όλα τα $u$, $v$,

$$A_u = \bigcup_i A_{u \star \langle i \rangle}, \quad B_v = \bigcup_j B_{v \star \langle j \rangle}. \tag{10-28}$$

Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το $A$ από το $B$, και εφαρμόζουμε επανειλημμένα το Λήμμα **10.29**, χρησιμοποιώντας τη (10-28): αφού δεν υπάρχει σύνολο Borel που να διαχωρίζει το $A = A_\emptyset$ από το $B = B_\emptyset$, υπάρχουν αριθμοί $i_0$, $j_0$ τέτοιοι που κανένα σύνολο Borel δεν διαχωρίζει το $A_{\langle i_0 \rangle}$ από το $B_{\langle j_0 \rangle}$· άρα λοιπόν, υπάρχουν $i_1$,

$j_1$ τέτοιοι που κανένα σύνολο Borel δεν διαχωρίζει το $A_{\langle i_0,i_1\rangle}$ από το $B_{\langle j_0,j_1\rangle}$· κ.ο.κ. Αυστηρά, χωρίς «κ.ο.κ.», ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες αριθμών

$$x = (i_0, i_1, \dots),\ y = (j_0, j_1, \dots) \in \mathcal{N}$$

τέτοιους που για όλα τα $n$, *κανένα σύνολο Borel δε διαχωρίζει το* $A_{\overline{x}(n)}$ *από το* $B_{\overline{y}(n)}$. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\text{για κάθε } n, \mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))} \cap \mathcal{N}_{\tau(\overline{y}(n))} \neq \emptyset, \tag{10-29}$$

αφού διαφορετικά το $\mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))}$ θα διαχώριζε το $A_{\overline{x}(n)}$ από το $B_{\overline{y}(n)}$, από τη (10-27)· και, τελικά, η (10-29) μας δίνει άμεσα ότι

$$f(x) = g(y) \in \bigcap\nolimits_n \Big(\mathcal{N}_{\sigma(\overline{x}(n))} \cap \mathcal{N}_{\tau(\overline{y}(n))}\Big),$$

ενάντια στην υπόθεση, ότι $A \cap B = \emptyset$. $\dashv$

**10.31. Το Θεώρημα του Suslin**. *Το σημειοσύνολο* $A \subseteq \mathcal{N}$ *είναι Borel αν και μόνον αν και το* $A$ *και το συμπλήρωμά του* $cA$ *είναι αναλυτικά.*

Αποδειξη για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση έχουμε άμεσα, αρκεί να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Διαχωρισμού στα $A$ και $cA$. $\dashv$

O Suslin εισήγαγε τα αναλυτικά σημειοσύνολα το 1917 και απέδειξε πληθώρα θεωρημάτων γι' αυτά, ανάμεσά τους το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**, το διάσημο χαρακτηρισμός του **10.31**, και το ότι *υπάρχουν αναλυτικά σημειοσύνολα που δεν είναι Borel*, κάτι που δε θα αποδείξουμε εδώ.[26] Τα σύνολα Borel είχαν εισαχθεί περισσότερο από δέκα χρόνια πριν από τον Borel και τον Lebesgue και ήταν η κρίσιμη έννοια στην ανάπτυξη της θεωρίας του *ολοκληρώματος Lebesgue*, μια από τις χαρακτηριστικές επιτυχίες της Ανάλυσης του 19ου αιώνα. Στη θεωρία ολοκλήρωσης κάθε «ενδιαφέρον» σημειοσύνολο είναι *σχεδόν ίσο* με κάποιο σύνολο Borel, μ' έναν αυστηρό ορισμό του «σχεδόν ίσου» που μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη θεωρία (και τις πιο σημαντικές εφαρμογές της, όπως τη *Θεωρία Πιθανοτήτων*) σαν όλα τα σημειοσύνολα να ήταν Borel. Γι' αυτό το λόγο είναι σημαντική η ειδική περίπτωση του Προβλήματος του Συνεχούς για τα σύνολα Borel, που αποδείχτηκε ταυτόχρονα και ανεξάρτητα από τους Alexandroff και Haussdorff το 1916, λίγο πριν αποδείξει ο Suslin το γενικότερο Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**.

Η οικογένεια των αναλυτικών σημειοσυνόλων αποτελεί πολύ μικρό μέρος του δυναμοσυνόλου του $\mathcal{N}$, Πρόβλημα **x10.9**. Θα μπορούσε όμως να ελπίσει κανείς ότι η μέθοδος που λύνει το Πρόβλημα του Συνεχούς γι' αυτά μπορεί να γενικευτεί και να οδηγήσει σε απόδειξη της Υπόθεσης του Συνεχούς, αλλά αυτό δεν είναι εφικτό.

[26] Η μελέτη των αναλυτικών και των Borel σημειοσυνόλων είναι η καρδιά της *Περιγραφικής Θεωρίας Συνόλων*, ενός από τους ωραιότερους κλάδους του θέματός μας που (δυστυχώς) δεν μπορούμε να καλύψουμε πιο εκτεταμένα σ' αυτές τις Σημειώσεις.

**10.32. Θεώρημα.** (**AC**) *Υπάρχει σημειοσύνολο $A \subset \mathcal{N}$ που είναι αναπαρίθμητο αλλά δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το κλειδί είναι ότι υπάρχουν ακριβώς τόσα μη κενά, τέλεια σημειοσύνολα όσα και σημεία του $\mathcal{N}$:

**Λήμμα 1**. *Αν $\mathcal{P} = \{P \subseteq \mathcal{N} \mid P \neq \emptyset, P$ τέλειο$\}$, τότε $|\mathcal{P}| =_c \mathfrak{c}$.*

*Απόδειξη*. Για κάθε $y \in \mathcal{N}$, το σημειοσύνολο

$$A_y = \{x \mid (\forall n)[y(n) \leq x(n)\}$$

είναι εύκολα τέλειο, και εξίσου εύκολα, $y \neq z \Longrightarrow A_y \neq A_z$, άρα $\mathfrak{c} =_c |\mathcal{N}| \leq_c |\mathcal{P}|$. Από την άλλη μεριά, κάθε τέλειο σύνολο $P = [T^P]$ είναι σώμα δέντρου στο $\mathbb{N}$ που το προσδιορίζει, έτσι ώστε

$$|\mathcal{P}| \leq_c |\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)| =_c |\mathcal{P}(\mathbb{N})| =_c \mathfrak{c}. \qquad \dashv \text{(Λήμμα 1)}$$

Καθορίζουμε ένα σύνολο

$$I =_c \mathfrak{c} =_c \mathcal{P}, \tag{10-30}$$

π.χ. $I = \mathfrak{c}$, και αντιστοιχίες

$$\alpha \mapsto x_\alpha \in \mathcal{N}, \quad \alpha \mapsto P_\alpha \in \mathcal{P} \quad (\alpha \in I)$$

που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες (10-30). Καθορίζουμε επίσης μια άριστη διάταξη $\leq$ του $I$. Θα ορίσουμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή στο $(I, \leq)$ μονομορφισμούς

$$f_\alpha : \mathbf{seg}(\alpha) \rightarrowtail A_\alpha \subset \mathcal{N},\ g_\alpha : \mathbf{seg}(\alpha) \rightarrowtail B_\alpha \subset \mathcal{N} \quad (\alpha \in I),$$

έτσι ώστε να ισχύουν τα εξής:

(1) Αν $\alpha \leq \beta$, τότε $f_\alpha \subseteq f_\beta, g_\alpha \subseteq g_\beta$, έτσι που $A_\alpha \subseteq A_\beta$ και $B_\alpha \subseteq B_\beta$.
(2) Για κάθε $\alpha \in I$, $A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$.
(3) Για κάθε $\alpha \in I$, $B_{S\alpha} \cap P_\alpha \neq \emptyset$, όπου $S$ είναι η συνάρτηση του επόμενου στον καλά διατεταγμένο χώρο $(I, \leq)$.

**Λήμμα 2**. *Αν οι $f_\alpha$, $g_\alpha$ $(\alpha \in I)$ ικανοποιούν τις (1) – (3), τότε η ένωση*

$$A = \bigcup\nolimits_{\alpha \in I} A_\alpha =_c \mathfrak{c},$$

*όμως το $A$ δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.*

*Απόδειξη*. Οι ισοπληθικότητες $A =_c I =_c \mathfrak{c}$ ακολουθούν αμέσως από την (1), αφού

$$\bigcup\nolimits_\alpha f_\alpha : I \rightarrowtail A \text{ και } I =_c \mathfrak{c}.$$

Για το δεύτερο ισχυρισμό, η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$A \cap B_\beta = \emptyset \quad (\beta \in I)\cdot$$

αυτό ισχύει επειδή αν $x \in A_\alpha \cap B_\beta$, τότε μαζί με τη $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$, από την (1), $x \in B_\gamma \cap B_\gamma$, ενάντια στη (2). Τώρα αν το $P \neq \emptyset$ είναι τέλειο, τότε $P = P_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in I$, και άρα υπάρχει κάποιο $x \in P_\alpha \cap B_{S\alpha}$ και $x \notin A$, οπότε $P_\alpha \not\subseteq A$. $\dashv$ (Λήμμα 2)

Οι συνθήκες (1) – (3) σχεδόν αποτελούν ορισμό των $f_\alpha$, $g_\alpha$. Εξηγούμε περιληπτικά την απόδειξη των (1) – (3) με υπερπεπερασμένη επαγωγή, μαζί με την περιγραφή της υπερπεπερασμένης αναδρομής που τις ορίζει· σχολαστικά θα έπρεπε να δώσουμε ξεχωριστά, πρώτα τον ορισμό και μετά την απόδειξη.

(a) Για το ελάχιστο 0 του $I$, θέτουμε $f_0 = g_0 = \emptyset$.

(b) Αν το $\lambda$ είναι οριακό σημείο του $I$, θέτουμε

$$f_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha, \quad g_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} g_\alpha.$$

Οι (1) και (2) ισχύουν τετριμμένα από την επαγωγική υπόθεση, και η (3) δεν ανακύπτει σ' αυτή την περίπτωση.

(c) Έστω $\beta = S\alpha$ επόμενο σημείο στο $I$. Από την επαγωγική υπόθεση, τα $A_\alpha$ και $B_\alpha$ είναι ισοπληθικά με το $\mathbf{seg}(\alpha)$ και $\mathbf{seg}(\alpha) <_c I$, επειδή η $\leq$ είναι άριστη διάταξη. Έτσι οι πληθάριθμοι $|A_\alpha|$, $|B_\alpha|$ είναι και οι δύο μικρότεροι του $\mathfrak{c}$, άρα $|A_\alpha \cup B_\alpha| <_c \mathfrak{c}$, και μπορούμε να βρούμε στο μη κενό, τέλειο σύνολο $P_\alpha =_c \mathcal{N}$ διαφορετικά σημεία

$$x, y \in P_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha)\cdot$$

θέτουμε

$$f_\beta = f_\alpha \cup \{(\alpha, x)\}, \quad g_\beta = g_\alpha \cup \{(\alpha, y)\},$$

και οι (1) – (3) έπονται εύκολα. ⊣

Η κατασκευή προφανώς δείχνει περισσότερα από την εκφώνηση του θεωρήματος, $|A| =_c \mathfrak{c}$ και όχι μόνο το $A$ αλλά και το συμπλήρωμά του $cA$ τέμνουν κάθε μη κενό, τέλειο σημειοσύνολο. Αφήνουμε για τα προβλήματα διάφορες παραλλαγές που κάνουν προφανές ότι δεν υπάρχει ελπίδα να αποδείξουμε την Υπόθεση του Συνεχούς μ' αυτό τον τρόπο, δηλαδή σε τελευταία ανάλυση στηριζόμενοι στο Θεώρημα Cantor-Bendixson.

Στην πραγματικότητα, η στρατηγική αυτή για την επίλυση του Προβλήματος του Συνεχούς δεν είναι η μοναδική που αποτυγχάνει: κάθε προσπάθεια απόδειξης ή διάψευσης της **CH** με τα αξιώματα της **ZDC** + **AC** είναι καταδικασμένη, εξαιτίας των εξής δύο θεμελιακών αποτελεσμάτων ανεξαρτησίας.

**10.33. Συνέπεια της Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς GCH** (Gödel, 1939). Το πρότυπο $L$ των κατασκευάσιμων συνόλων ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς **GCH**, (9-7), και ειδικότερα, η Υπόθεση του Συνεχούς δεν διαψεύδεται στην **ZDC**+**AC**.

**10.34. Ανεξαρτησία της Υπόθεσης του Συνεχούς CH** (Cohen, 1963). Υπάρχει πρότυπο της **ZDC**+**AC** στο οποίο η Υπόθεση του Συνεχούς δεν ισχύει, άρα η **CH** δεν είναι θεώρημα της **ZDC**+**AC**. Το *πρότυπο αναγκασμού* (forcing model) του Cohen επιδέχεται ποικίλες παραλλαγές, έτσι που μπορούμε να προσδιορίσουμε χωρίς αντίφαση με πολλούς τρόπους τις πληθικότητες σημειοσυνόλων ή και υποσυνόλων από μεγαλύτερα δυναμοσύνολα.

**10.35. Τι σημαίνει η ανεξαρτησία της CH;** Οι μέθοδοι των Gödel και Cohen είναι πολύ εύρωστες και έχουν προσαρμοστεί να δείξουν ότι το Πρόβλημα του Συνεχούς δεν επιδέχεται λύση σε πολλές γνωστές, αληθοφανείς επεκτάσεις της

**ZDC+AC** με επιπρόσθετα αξιώματα. Το ίδιο ισχύει για το Αξίωμα Επιλογής και ακόμη για το Αξίωμα Απείρου· αυτά όμως εκφράζουν θεμελιακές αρχές για τα σύνολα που αληθεύουν μεν, αλλά είναι προφανώς διαφορετικές από τις αρχές που εκφράζουν τα άλλα, απλούστερα αξιώματα, και καταλαβαίνουμε γιατί δεν μπορούν να αποδειχτούν απ' αυτά μόνο με τη λογική. Η Υπόθεση του Συνεχούς έχει την υφή τεχνικού, μαθηματικού προβλήματος που θα έπρεπε να λυθεί με κάποια απόδειξη, αλλά φαίνεται ότι μας λείπει (μέχρι στιγμής) η απαραίτητη έμπνευση για να ανακαλύψουμε τα κατάλληλα αξιώματα.

Πολλά έχουν λεχθεί για την ανεξαρτησία της **CH** από τα γνωστά αξιώματα της συνολοθεωρίας, και μερικοί την έχουν επικαλεστεί για να υποστηρίξουν ότι δεν υπάρχει αντικειμενική πραγματικότητα πίσω από τα «τυπικά», αξιωματικά αποτελέσματα του κλάδου. Με τη μέθοδο *αριθμητικοποίησης* του Gödel, όμως, προβλήματα *ύπαρξης αποδείξεων* μεταφράζονται σε αυστηρές, τεχνικές εικασίες για αριθμούς. Υπάρχουν τέτοιες εικασίες[27] που (όπως η **CH**) είναι ανεξάρτητες απ' όλα τα γενικά παραδεκτά αξιώματα των μαθηματικών· πρέπει γι' αυτό να αρνηθούμε την «αντικειμενική πραγματικότητα» των φυσικών αριθμών; Δυστυχώς δεν μπορούμε να διερευνήσουμε τέτοια προβλήματα με τη σοβαρότητα που τους αξίζει χωρίς αναφορές σε ιδέες και αποτελέσματα της Μαθηματικής Λογικής, και θα αντισταθούμε στον πειρασμό.

Παρενθετικά αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει έλλειψη από σημαντικά προβλήματα που δεν επιδέχονται λύση στην **ZDC** ή στην **ZDC+AC**· η **CH** είναι απλώς το πιο βασικό και ενδιαφέρον απ' αυτά. Θα διατυπώσουμε εδώ μόνο τρία συναφή αποτελέσματα ανεξαρτησίας, επειδή σχετίζονται ιδιαίτερα με το Θεώρημα Τέλειου Συνόλου **10.20**.

**10.36.** (Gödel, 1939) Στο πρότυπο $L$ των κατασκευάσιμων συνόλων, υπάρχει αναπαρίθμητο, αναλυτικό συμπλήρωμα που δεν έχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να βελτιώσουμε το Θεώρημα Τέλειου Υποσυνόλου **10.20** στην **ZDC+AC** και να δείξουμε ότι κάθε αναλυτικό συμπλήρωμα έχει την ιδιότητα **P**.

**10.37.** (Solovay, 1970) Υπάρχει πρότυπο της **ZDC+AC** στο οποίο κάθε «ορίσιμο» σημειοσύνολο έχει την ιδιότητα **P**. Δεν θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε εδώ τι θα πει «ορίσιμο», αλλά τα αναλυτικά συμπληρώματα είναι ορίσιμα.

**10.38.** (Solovay, 1970) Υπάρχει πρότυπο της **ZDC** στο οποίο όλα τα σημειοσύνολα έχουν την ιδιότητα **P**.

[27] Οι προτάσεις στις οποίες αναφερόμαστε είναι της μορφής «*αν η* **ZDC+AC** *είναι συνεπής, τότε συνεπής είναι και η* $T$», όπου η $T$ είναι κάποια ισχυρή επέκταση της **ZDC+AC** που συνεπάγεται τη συνέπεια της **ZDC+AC**. Από το *Δεύτερο Θεώρημα Μη Πληρότητας* του Gödel συνάγεται ότι τέτοιες προτάσεις είναι ανεξάρτητες της **ZDC+AC** (εκτός κι αν η **ZDC+AC** δεν είναι συνεπής!), και υπάρχουν φυσικά παραδείγματα τέτοιων προτάσεων των οποίων η αλήθεια είναι αμφιλεγόμενη.

Τα πρότυπα του Solovay κατασκευάζονται με τη μέθοδο αναγκασμού του Cohen αλλά όπως το $L$ του Gödel, έχουν πολλές ιδιότητες κανονικότητας και αποδίδουν πολυάριθμα, επιπρόσθετα αποτελέσματα ανεξαρτησίας. Το πρώτο πρότυπο του Solovay φανερώνει (με το **10.36**) ότι η ιδιότητα **P** για τα αναλυτικά συμπληρώματα δεν μπορεί να αποδειχτεί ή να διαψευστεί στη θεωρία **ZDC+AC**. Το δεύτερο πρότυπο του Solovay δείχνει ότι η **ZDC** δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη αναπαρίθμητου σημειοσυνόλου χωρίς μη κενό, τέλειο υποσύνολο· το **DC** δεν αρκεί για την κατασκευή.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 10

**x10.1.** Δείξε ότι αν το $F \subseteq \mathcal{N}$ είναι κλειστό, τότε υπάρχει μοναδικό δέντρο $T$ στο $\mathbb{N}$ χωρίς τερματικούς κόμβους, έτσι ώστε $F = [T]$, συγκεκριμένα το δέντρο $T^F$ που ορίστηκε στη (10-8).

**x10.2.** Δείξε ότι η διάσπαση (10-12) κλειστού σημειοσυνόλου $F$ σε ένα τέλειο σύνολο $P$ και ένα απαριθμητό σύνολο $S$ προσδιορίζει μοναδικά τα $P$ και $S$.

**x10.3.** Δώσε παράδειγμα ενός κλειστού σημειοσυνόλου $F \subseteq \mathcal{N}$ και συνεχούς $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, έτσι ώστε η εικόνα $f[F]$ να μην είναι κλειστό σύνολο.

**x10.4.** Δείξε ότι κάθε ανοικτό σημειοσύνολο είναι $\mathcal{F}_\sigma$ και κάθε κλειστό σημειοσύνολο είναι $\mathcal{G}_\delta$. Οι ορισμοί ανασκοπούνται στην υποσημείωση 24.

$^*$**x10.5.** Δείξε ότι η αντίστροφη εικόνα $g^{-1}[A]$ αναλυτικού σημειοσυνόλου $A$ από συνεχή συνάρτηση $g : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι αναλυτική. Υποδειξη. Προσπάθησε να δείξεις ισοδυναμία της μορφής

$$y \in g^{-1}[A] \iff (\exists x)[y = f(\rho_1(x)) = g(\rho_2(x))],$$

όπου η $f$ είναι συνεχής και οι $\rho_n$ ορίζονται από τη (10-23), και μετά χρησιμοποίησε το **10.23**.

$^*$**x10.6.** Δείξε ότι

$$\mathcal{N} = \bigcup\nolimits_{i \in \mathbb{N}} A_i \Longrightarrow (\exists i)[A_i =_c \mathcal{N}],$$

δηλαδή ο χώρος $\mathcal{N}$ δεν είναι απαριθμητή ένωση σημειοσυνόλων με μικρότερη πληθικότητα. Υποδειξη. Αυτό ακολουθεί αμέσως από το Θεώρημα του König **9.21**, αλλά αυτή η ειδική περίπτωση δεν χρειάζεται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.

**x10.7.** (**AC**) Δείξε ότι για κάθε $\kappa \leq_c \mathfrak{c}$, υπάρχει σημειοσύνολο $A$ με $|A| =_c \kappa$ που δεν περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο.

**x10.8.** (**AC**) Δείξε ότι υπάρχει αναπαρίθμητο σημειοσύνολο $A$ τέτοιο ώστε ούτε το $A$ ούτε το συμπλήρωμά του να περιέχουν αναπαρίθμητο σύνολο Borel.

**x10.9.** Δείξε ότι υπάρχουν $\mathfrak{c}$-πολλά αναλυτικά και Borel σημειοσύνολα,

$$|\mathcal{A}| =_c |\mathcal{B}| =_c \mathfrak{c}.$$

**10.39. Ορισμός.** Η συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο σε κάποιον άλλο είναι **Borel μετρήσιμη** αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[G]$ κάθε ανοικτού συνόλου του $Y$ είναι Borel υποσύνολο του $X$.

**x10.10.** Η σύνθεση $gf : X \to Z$ δύο Borel μετρήσιμων συναρτήσεων $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ είναι Borel μετρήσιμη.

**x10.11.** Η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}[A]$ ενός συνόλου Borel $A \subseteq Y$ από Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι Borel υποσύνολο του $X$.

**10.40. Ορισμός.** Δύο τοπολογικοί χώροι $X$, $Y$ είναι **Borel ισομορφικοί** αν υπάρχει αντιστοιχία $f : X \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Y$ τέτοια ώστε η $f$ και η αντίστροφη συνάρτησή της $f^{-1} : Y \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow X$ να είναι και οι δύο Borel μετρήσιμες. Χώροι που είναι Borel ισομορφικοί έχουν την ίδια δομή όσον αφορά τη θεωρία μέτρου, και πρακτικά μπορούν να «ταυτιστούν» σ' αυτήν τη θεωρία.

***x10.12.** Έστω $f : X \rightarrowtail Y$ και $g : Y \rightarrowtail X$ Borel μετρήσιμοι μονομορφισμοί σε τοπολογικούς χώρους με την εξής επιπρόσθετη ιδιότητα:[28] υπάρχουν Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1 : Y \to X$ και $g_1 : X \to Y$ που είναι αντίστροφες των $f$ και $g$ με την έννοια ότι

$$f_1 f(x) = x \quad (x \in X),$$
$$g_1 g(y) = y \quad (y \in Y).$$

Δείξε ότι οι $X$ και $Y$ είναι Borel ισομορφικοί. ΥΠΟΔΕΙΞΗ. Χρησιμοποίησε την απόδειξη του Θεωρήματος Schröder-Bernstein **2.26**.

**x10.13.** Θεωρούμε το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ ως τοπολογικό υποχώρο του $\mathcal{N}$ με τον προφανή τρόπο, δηλαδή τα ανοικτά σύνολα είναι οι ενώσεις γειτονιών της μορφής

$$\mathcal{N}_u = \{x \in \mathcal{C} \mid u \sqsubseteq x\} \quad (u \in \{0,1\}^*).$$

Δείξε ότι οι χώροι $\mathcal{C}$ και $\mathcal{N}$ είναι Borel ισομορφικοί.

Στα υπόλοιπα προβλήματα διερευνούμε τη σχέση ανάμεσα στις συγκεκριμένες, συνδυαστικές έννοιες που έχουμε μελετήσει στο χώρο Baire και τις γενικές, τοπολογικές εκδοχές τους.

**10.41. Ορισμός.** Το σημείο $x$ είναι **οριακό σημείο** (limit point) συνόλου $A$ σε τοπολογικό χώρο $X$, αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το $x$ περιέχει επίσης κάποιο σημείο του $A$ διαφορετικό από το $x$,

$$(\forall G)[G \text{ ανοικτό και } x \in G \Longrightarrow (\exists y \in A \cap G)[x \neq y]].$$

Από τον ορισμό, ένα οριακό σημείο του $A$ μπορεί να ανήκει στο $A$, μπορεί και όχι. *Σημείο του $A$ που δεν είναι οριακό σημείο του $A$ καλείται* **απομονωμένο** *ή* **μεμονωμένο** (isolated) στο $A$.

[28] Στην πραγματικότητα, κάθε Borel μονομορφισμός έχει αυτην την ιδιότητα, όμως για να το αποδείξουμε αυτό, χρειάζεται δουλειά.

**x10.14.** Βρες τα οριακά και τα απομονωμένα σημεία του σημειοσυνόλου

$$B = \{x \in \mathcal{N} \mid x(0) = 1 \vee (\forall n)[x(n) = 2] \vee (\exists n)[x(n) = 3]\}.$$

**x10.15.** Δείξε ότι το $x$ είναι οριακό σημείο του $A$ αν και μόνον αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το $x$ περιέχει επίσης απείρως πολλά σημεία του $A$.

**x10.16.** Δείξε ότι ένα σύνολο σε τοπολογικό χώρο είναι κλειστό τότε και μόνον αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.

**x10.17.** Δείξε ότι ένα σημειοσύνολο $P$ είναι τέλειο τότε και μόνον αν είναι κλειστό και δεν έχει απομονωμένα σημεία, δηλαδή κάθε σημείο του $P$ είναι οριακό του σημείο. Αυτή η ισοδυναμία ταυτίζει τον συγκεκριμένο ορισμό τελειότητας που δώσαμε για σημειοσύνολα με τον κλασικό, τοπολογικό ορισμό.

**10.42. Ορισμός.** Η ακολουθία $(n \mapsto x_n)$ σημείων σε έναν τοπολογικό χώρο $X$ **συγκλίνει** στο σημείο $x$ ή έχει το $x$ ως **όριο**, αν κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το $x$ περιέχει όλα τα $x_i$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο αρχικό τμήμα:

$$\lim_n x_n = x \iff_{\text{ορ}} (\forall G \text{ ανοικτό}, x \in G)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall i \geq n)[x_i \in G].$$

**x10.18.** Δείξε ότι το σημείο $x$ είναι οριακό σημείο σημειοσυνόλου $A$ αν και μόνον αν $x = \lim_n x_n$ για κάποια ακολουθία $(n \mapsto x_n \in A)$ σημείων του $A$. Ποια αρχή επιλογής χρησιμοποίησες στην απόδειξη, αν χρησιμοποίησες κάποια;

**x10.19.** Δείξε ότι η συνάρτηση $f : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ είναι συνεχής αν και μόνον αν

$$f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n),$$

για κάθε ακολουθία όπου το όριο $\lim_n x_n$ υπάρχει. Ποια αρχή επιλογής χρησιμοποίησες στην απόδειξη, αν χρησιμοποίησες κάποια;

**x10.20.** *Ο τοπολογικός χώρος $X$ είναι* **Hausdorff** *αν για κάθε ζεύγος σημείων $x \neq y$, υπάρχουν ξένα ανοικτά σύνολα $G \cap H = \emptyset$ τέτοια ώστε $x \in G$ και $y \in H$.* Δείξε ότι αν οι $f, g : X \to Y$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και ο $Y$ είναι Hausdorff, τότε το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ είναι κλειστό στον $X$.

**10.43. Ορισμός. Ανοικτό κάλυμμα** συνόλου $K$ σε τοπολογικό χώρο $X$ είναι η τυχαία οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών συνόλων των οποίων η ένωση περιέχει το $K$, $K \subseteq \bigcup \mathcal{G}$· και το $K$ είναι **συμπαγές** στο $X$ αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του περιέχει πεπερασμένο **υποκάλυμμα**, δηλαδή για κάθε οικογένεια $\mathcal{G}$ ανοικτών συνόλων,

$$K \subseteq \bigcup \mathcal{G} \Longrightarrow (\exists G_0, \dots, G_n \in \mathcal{G})[K \subseteq \textstyle\bigcup_{i \leq n} G_i].$$

***x10.21.** Δείξε ότι ένα σημειοσύνολο είναι συμπαγές με τον Ορισμό **10.18** αν και μόνον αν είναι συμπαγές με τον Ορισμό **10.43**. Υποδειξη. Θα χρειαστείς το Λήμμα του König **9.7**.

**x10.22.** Δείξε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : X \to Y$ από έναν τοπολογικό χώρο $X$ σε κάποιον άλλο $Y$, και για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$, η εικόνα $f[K]$ είναι συμπαγές σύνολο στο $Y$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

# ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΑΛΛΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Έχουμε σχεδόν φτάσει έναν από τους στόχους που θέσαμε στο Κεφάλαιο **4**, να αποδείξουμε όλα τα διαισθητικά αποτελέσματα του Κεφαλαίου **2** από τα αξιώματα του Zermelo. Μένουν μόνο δυο-τρία λεπτά σημεία, που τελικά όμως είναι σημαντικά: θα μας υποδείξουν ότι τα αξιώματα του Zermelo δεν φτάνουν, πρέπει να τα συμπληρώσουμε με ισχυρότερες αρχές κατασκευής συνόλων. Εδώ θα διατυπώσουμε και θα προσθέσουμε στην αξιωματική θεωρία **ZDC** το Αξιωμα Αντικαταστασης που ανακαλύφθηκε στις αρχές της δεκαετίας του '20, μια αρχή κατασκευής συνόλων τόσο αληθοφανή όσο και τα κατασκευαστικά αξιώματα (**I**) – (**VI**), αλλά πλούσια σε επακόλουθα. Επίσης θα εισαγάγουμε και θα διερευνήσουμε μερικές ακόμη αρχές κατασκευής συνόλων που συχνά περιλαμβάνονται ανάμεσα στα αξιώματα της συνολοθεωρίας. Με βάση μόνο ένα από τα ασθενέστερα πορίσματα του Αξιώματος Αντικατάστασης θα κατασκευάσουμε τον Ελαχιστο Κοσμο του Zermelo $\mathcal{Z}$, ένα απλούστατο σύνολο που περιέχει τους φυσικούς αριθμούς, το χώρο Baire, τους πραγματικούς αριθμούς και όλα τα σημαντικά αντικείμενα μελέτης των κλασικών μαθηματικών. Ό,τι έχουμε αποδείξει μέχρι στιγμής επιδέχεται ερμηνεία ως εάν το $\mathcal{Z}$ να αποτελούσε ολόκληρο τον κόσμο των μαθηματικών αντικειμένων, αν και στην πραγματικότητα το $\mathcal{Z}$ είναι απλώς ένα σύνολο—και μάλιστα σύνολο σχετικά μικρό και εύκολο στη σύλληψη! Ο κύριος στόχος μας σ' αυτό το κεφάλαιο είναι να καταλάβουμε το νόημα του Αξιώματος Αντικατάστασης, διερευνώντας τα πιο απλά και άμεσα πορίσματά του. Η μεγάλη δύναμη του πλήρους αξιώματος θα γίνει καταφανής στο επόμενο κεφάλαιο.

Από το (2) του **2.16**, αν το $A$ είναι απαριθμητό σύνολο και για κάθε $n \geq 2$,

$$A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ φορές}},$$

τότε η ένωση $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο. Ο προφανής τρόπος να αποδείξουμε αυτό από τα αξιώματα είναι να ορίσουμε πρώτα τα σύνολα $A^n$ με την αναδρομή

$$\begin{aligned} f(0) &= A \times A, \\ f(n+1) &= f(n) \times A, \end{aligned} \tag{11-1}$$

έτσι ώστε $f(n) = A^{n+2}$ και

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{n+2} = \bigcup f[\mathbb{N}]. \tag{11-2}$$

Από το βασικό Θεώρημα του Cantor **2.10** συνάγεται (επαγωγικά) ότι κάθε $f(n) = A^{n+2}$ είναι απαριθμητό, και επομένως η ένωσή τους $\bigcup_{n=0}^{\infty} A^{n+2}$ είναι επίσης απαριθμητό σύνολο. Υπάρχει λάθος; Σίγουρα όχι με την επαγωγική απόδειξη, που είναι παρόμοια πολλών άλλων σ' αυτήν την περιοχή. Υπάρχει όμως κάποιο πρόβλημα με τον αναδρομικό ορισμό (11-1), που δεν δικαιολογείται με τη μορφή που του δώσαμε από το Θεώρημα Αναδρομής **5.6**. Για να εφαρμόσουμε το **5.6** χρειαζόμαστε ένα σύνολο $E$, μια συνάρτηση $h : E \to E$ στο $E$ και κάποιο $a \in E$, τα οποία καθορίζουν τότε μία μοναδική συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(n+1) &= h(f(n)). \end{aligned} \tag{11-3}$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν υπάρχει προφανές $E$ που περιέχει το $A$ και όλα του τα γινόμενα $A^n$, και αντί της συνάρτησης $h$, έχουμε τον τελεστή

$$h(X) =_{\text{ορ}} X \times A, \tag{11-4}$$

που αντιστοιχίζει σε κάθε σύνολο $X$ το γινόμενο $X \times A$ του $X$ με το δοσμένο $A$. Για να δικαιολογήσουμε τον ορισμό (11-1), χρειαζόμαστε ένα θεώρημα αναδρομής που κυρώνει αναδρομικούς ορισμούς της μορφής (11-3), για κάθε αντικείμενο $a$ και κάθε οριστικό τελεστή (μιας μεταβλητής) $h$. Μοιάζει αθώο, φυσική γενίκευση του Θεωρήματος Αναδρομής—και είναι ακριβώς αυτό— αλλά στην πραγματικότητα, τέτοιο αποτέλεσμα δεν μπορεί να αποδειχτεί αυστηρά από τα αξιώματα του Zermelo.

**11.1. (VIII) Αξίωμα Αντικατάστασης** (Replacement Axiom). *Για κάθε σύνολο $A$ και κάθε οριστικό τελεστή μιας μεταβλητής $H$, η εικόνα*

$$H[A] =_{\text{ορ}} \{H(x) \mid x \in A\}$$

*του $A$ από τον $H$ είναι σύνολο.*

Ως αρχή κατασκευής συνόλων, το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι σχεδόν προφανές, διαισθητικά τόσο αληθοφανές όσο και το Αξίωμα Διαχωρισμού. Αν ήδη έχουμε δεχτεί το $A$ ως τελειωμένη ολότητα και ο $H$ αντιστοιχίζει με οριστικό και αναμφισβήτητο τρόπο ένα αντικείμενο σε κάθε $x \in A$, τότε «κατασκευάζουμε» την εικόνα $H[A]$ «αντικαθιστώντας» κάθε $x \in A$ με το αντίστοιχο $H(x)$.

**11.2. Αξιωματικά.** Το αξιωματικό σύστημα **ZFDC** της **Θεωρίας Zermelo-Fraenkel** με **Εξαρτημένες Επιλογές** αποτελείται από τα αξιώματα της **ZDC** και το Αξίωμα Αντικατάστασης (**VIII**), συμβολικά

$$\mathbf{ZFDC} = \mathbf{ZDC} + \text{Αντικατάσταση} = (\mathbf{I}) - (\mathbf{VIII}).$$

Από δω και στο εξής θα χρησιμοποιούμε όλα τα αξιώματα της **ZFDC** χωρίς ιδιαίτερη μνεία. Θα εξακολουθήσουμε να σημειώνουμε με το σημάδι (**AC**) τα αποτελέσματα που οι αποδείξεις τους χρειάζονται το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.[29]

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει απλούς οριστικούς τελεστές, αυτούς που μας δίνουν αμέσως τα αξιώματα όπως οι $\mathcal{P}(A)$ και $\bigcup \mathcal{E}$, και ρητούς συνδυασμούς τους, π.χ. το ζεύγος $(x, y) =_{\text{ορ}} \{\{x\},\ \{x, y\}\}$ του Kuratowski. Αφού όμως δεχτούμε το Αξίωμα Αντικατάστασης, οι οριστικοί τελεστές αρχίζουν να παίζουν πιο σημαντικό ρόλο στις αποδείξεις και θα αναφερθούμε σε μερικούς απ' αυτούς που δεν επιδέχονται τόσο απλούς ορισμούς. Στην επόμενη, τετριμμένη Πρόταση περιγράφουμε τη βασική μέθοδο ορισμού τελεστών που χρειαζόμαστε, κυρίως για να τονίσουμε τη σημασία της.

**11.3. Πρόταση.** *Αν οι $C$ και $P$ είναι οριστικές συνθήκες $n$ και $n+1$ μεταβλητών αντιστοίχως και*

$$(\forall \vec{x})[C(\vec{x}) \Longrightarrow (\exists! w) P(\vec{x}, w)], \tag{11-5}$$

*τότε ο $n$-αδικός τελεστής*

$$F(\vec{x}) =_{\text{ορ}} \begin{cases} \text{το μοναδικό } w \text{ τέτοιο ώστε } P(\vec{x}, w), & \text{αν } C(\vec{x}), \\ \emptyset, & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{11-6}$$

*είναι επίσης οριστικός.*

Στις εφαρμογές επικαλούμαστε αυτή την παρατήρηση απλώς θέτοντας

$$F(\vec{x}) =_{\text{ορ}} \text{το μοναδικό } w \text{ τέτοιο ώστε } P(\vec{x}, w) \quad (C(\vec{x})), \tag{11-7}$$

αφού πρώτα επαληθεύσουμε την (11-5), χωρίς να προσδιορίσουμε την άσχετη τιμή του $F$ έξω από το πεδίο που μας ενδιαφέρει. Οι εφαρμογές του Αξιώματος Αντικατάστασης συχνά χρειάζονται στην απόδειξη του (11-5) για συγκεκριμένα $C$ και $P$.

**11.4. Άσκηση.** *Για κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $F$, ο τελεστής*

$$G(X) =_{\text{ορ}} F[X] = \{F(x) \mid x \in X\} \quad (\mathrm{Set}(X))$$

*είναι επίσης οριστικός.*

Το επόμενο θεμελιακό αποτέλεσμα του Αξιώματος Αντικατάστασης γενικεύει το Θεώρημα Υπερπεπερασμένης Αναδρομής με δύο τρόπους: επιτρέποντας οριστικό τελεστή όπου το ασθενέστερο θεώρημα δεχόταν μόνο συνάρτηση και εδραιωμένο γράφημα όπου το ασθενέστερο θεώρημα δεχόταν μόνο καλά διατεταγμένο χώρο. Η δεύτερη γενίκευση δεν χρειάζεται το Αξίωμα Αντικατάστασης από μόνη της, Πρόβλημα **x8.11**.

[29] Το Αξίωμα Αντικατάστασης διατυπώθηκε ανεξάρτητα από τους Thoralf Skolem και Abraham Fraenkel στη δεκαετία 1920 – 30.

**11.5. Θεώρημα Εδραιωμένης Αναδρομής**. *Για κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ με σχέση ακμών $\to$ και κάθε οριστικό τελεστή $H$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : G \to f[G]$ που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f(x) = H(f \restriction \{y \in G \mid x \to y\}, x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως και στην απόδειξη του **7.24**, θα δείξουμε πρώτα ένα λήμμα που θα μας δώσει το κατάλληλο σύνολο προσεγγίσεων της συνάρτησης που θέλουμε. Αντί για τα αρχικά τμήματα του $G$ (που δεν έχουν νόημα στο τυχόν γράφημα), αυτές οι προσεγγίσεις έχουν πεδία ορισμού τα «κλειστά προς τα κάτω» υποσύνολα του $G$. Θα αναφερθούμε στην κληρονομική κλειστότητα $\Rightarrow$ του $G$, ορισμένη στο **6.34**, παραλείποντας στο συμβολισμό τους δείκτες, εφόσον εργαζόμαστε μόνο με ένα γράφημα. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τα αντίστροφα βέλη,

$$u \leftarrow t \iff_{\text{ορ}} t \to u \iff u \text{ είναι ακριβώς κάτω από το } t, \quad (11\text{-}8)$$
$$x \Leftarrow t \iff_{\text{ορ}} t \Rightarrow x \iff x \text{ είναι κάτω από το } t. \quad (11\text{-}9)$$

**Λήμμα**. *Για κάθε κόμβο $t \in G$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\sigma$ με πεδίο ορισμού το σύνολο $\{x \in G \mid x \Leftarrow t\}$ και τέτοια ώστε*

$$\sigma(x) = H(\sigma \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) \quad (x \Leftarrow t). \quad (11\text{-}10)$$

*Απόδειξη*. Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $t$ ελαχιστικός κόμβος του $G$ όπου το Λήμμα δεν αληθεύει. Επομένως, για κάθε $u \leftarrow t$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $\sigma_u$ που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\sigma_u(x) = H(\sigma_u \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) \quad (x \Leftarrow u). \quad (11\text{-}11)$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$[x \Leftarrow u \leftarrow t \,\&\, x \Leftarrow v \leftarrow t] \Longrightarrow \sigma_u(x) = \sigma_v(x); \quad (11\text{-}12)$$

επειδή αν το $x$ ήταν ελαχιστικό αντιπαράδειγμα της (11-12) στο $G$, τότε

$$\begin{aligned} \sigma_u(x) &= H(\sigma_u \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) && \text{από την (11-11),} \\ &= H(\sigma_v \restriction \{y \in G \mid y \leftarrow x\}, x) && \text{από την επιλογή του } x, \\ &= \sigma_v(x) && \text{από την (11-11) για το } \sigma_v. \end{aligned}$$

Ο τελεστής $u \mapsto \sigma_u$ που αντιστοιχίζει αυτήν την $\sigma_u$ σε κάθε κόμβο $u \leftarrow t$ είναι οριστικός και επομένως η εικόνα του είναι σύνολο από το Αξίωμα Αντικατάστασης. Θέτουμε

$$\sigma_1 =_{\text{ορ}} \bigcup \{\sigma_u \mid u \leftarrow t\},$$

και παρατηρούμε ότι το $\sigma_1$ είναι συνάρτηση από την (11-12), και επιπλέον, από τον ορισμό της,

$$\sigma_1(x)\downarrow \iff (\exists u)[x \Leftarrow u \leftarrow t].$$

Με μια ακόμη εφαρμογή του Αξιώματος Αντικατάστασης, το

$$\sigma_2 =_{\text{ορ}} \{(v, H(\sigma_v \restriction \{x \mid x \leftarrow v\}), x) \mid v \leftarrow t \,\&\, \neg(\exists u)[v \Leftarrow u \leftarrow t]\}$$

είναι σύνολο, και από τον ορισμό του είναι και αυτό συνάρτηση με πεδίο ορισμού ξένο απ' αυτό της $\sigma_1$. Άρα το

$$\sigma =_{\text{ορ}} \sigma_1 \cup \sigma_2$$

είναι συνάρτηση, και

$$\begin{aligned}\sigma(x)\downarrow &\iff (\exists u)[t \to u \,\&\, u \Rightarrow x] \vee t \to u \\ &\iff t \Rightarrow x \quad (\text{από το } \mathbf{6.35}).\end{aligned}$$

Επιπλέον, η $\sigma$ ικανοποιεί την ταυτότητα (11-10) επειδή την ικανοποιούν ξεχωριστά οι $\sigma_1$ και $\sigma_2$. Τελικά, με το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της (11-12), μπορούμε να δείξουμε ότι το πολύ μία συνάρτηση $\sigma$ με πεδίο ορισμού το $\{x \in G \mid x \Leftarrow t\}$ μπορεί να ικανοποιεί την (11-10), και αυτό τελειώνει την απόδειξη του Λήμματος. ⊣ (Λήμμα)

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα, όπως αποδείξαμε και την **7.24**, εφαρμόζουμε το Λήμμα στο «επόμενο γράφημα»

$$\begin{aligned}\mathrm{Succ}(G) &=_{\text{ορ}} G \cup \{t^*\}, \\ x \to_{\mathrm{Succ}(G)} y &\iff_{\text{ορ}} x \to y \vee [x = t^* \,\&\, y \in G],\end{aligned}$$

που έχει ακριβώς έναν κόμβο περισσότερο από το $G$, στην κορυφή. ⊣

**11.6. Πόρισμα.** (1) *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$ και κάθε διμελή οριστικό τελεστή $H$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f : U \to f[U]$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$f(x) = H(f \restriction \mathbf{seg}(x), x) \quad (x \in U). \tag{11-13}$$

(2) *Για κάθε αντικείμενο $a$ και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $F$, υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(n \mapsto a_n)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις*

$$a_0 = a, \quad a_{n+1} = F(a_n) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{11-14}$$

Η $(n \mapsto a_n)$ είναι η **τροχιά** (orbit) του $a$ από τον $F$.

Αποδειξη. Για το (1) εφαρμόζουμε το **11.5** στο γράφημα $(\mathrm{Field}(U), >_U)$, και για το (2) στο γράφημα $(\mathbb{N}, \to)$, όπου

$$n \to m \iff_{\text{ορ}} n = m + 1.$$ ⊣

**11.7. Άσκηση.** *Ποιον οριστικό τελεστή $H$ χρησιμοποιούμε για να δείξουμε το μέρος (2) του Πορίσματος;*

Η τροχιά ενός συνόλου $A$ από τον τελεστή της ένωσης φανερώνει την κρυμμένη $\in$-δομή του $A$, φέρνοντας στην επιφάνεια τα μέλη του $A$, τα μέλη των μελών του $A$, τα μέλη αυτών κ.λπ.

**11.8. Ορισμός.** Μια κλάση (ή σύνολο) $M$ είναι **μεταβατική** (transitive) αν $\bigcup M \subseteq M$, ή ισοδύναμα

$$(\forall x \in M)(\forall t \in x)[t \in M],$$

ή ακόμη απλούστερα $x \in M \Longrightarrow x \subseteq M$.

**11.9. Άσκηση.** *Τα σύνολα* $\emptyset$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, *το σύνολο*

$$\mathbb{N}_0 = \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \dots\ \} \tag{11-15}$$

*που απαιτείται από το Αξίωμα Απείρου και κάθε κλάση που περιέχει μόνο άτομα είναι μεταβατικά.*

**11.10. Θεώρημα Μεταβατικής Κλειστότητας.** *Κάθε σύνολο* $A$ *είναι μέλος μεταβατικού συνόλου* $M$*, και μάλιστα υπάρχει ελάχιστο* (για την $\subseteq$) *μεταβατικό σύνολο* $M = \mathrm{TC}(A)$ *τέτοιο ώστε* $A \in \mathrm{TC}(A)$. Το $\mathrm{TC}(A)$ είναι η **μεταβατική κλειστότητα** του $A$.

Απόδειξη. Από το (2) του **11.6**, υπάρχει μοναδική ακολουθία $n \mapsto \mathrm{TC}_n(A)$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \mathrm{TC}_0(A) &= \{A\}, \\ \mathrm{TC}_{n+1}(A) &= \bigcup \mathrm{TC}_n(A), \end{aligned} \tag{11-16}$$

και θέτουμε

$$\mathrm{TC}(A) =_{\text{ορ}} \bigcup\nolimits_n \mathrm{TC}_n(A). \tag{11-17}$$

Προφανώς $A \in \mathrm{TC}(A)$ και το $\mathrm{TC}(A)$ είναι μεταβατικό, επειδή

$$u \in \mathrm{TC}_n(A) \Longrightarrow u \subseteq \bigcup \mathrm{TC}_n(A) = \mathrm{TC}_{n+1}(A).$$

Αν το $M$ είναι μεταβατικό και $A \in M$, τότε $\mathrm{TC}_0(A) = \{A\} \subseteq M$, και επαγωγικά

$$\mathrm{TC}_n(A) \subseteq M \Longrightarrow \mathrm{TC}_{n+1}(A) = \bigcup \mathrm{TC}_n(A) \subseteq \bigcup M \subseteq M,$$

έτσι ώστε τελικά $\mathrm{TC}(A) = \bigcup_n \mathrm{TC}_n(A) \subseteq M$. ⊣

**11.11. Άσκηση.** *Αν το* $A$ *είναι μεταβατικό, τότε* $\mathrm{TC}(A) = A \cup \{A\}$.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τη φράση «φανερώνει την κρυμμένη $\in$-δομή» της $A$ που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, θεωρούμε τις εξής φυσικές έννοιες.

**11.12. Ορισμός.** Το σύνολο $A$ είναι *κληρονομικά ελεύθερο από άτομα* ή **αγνό** (pure) αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό σύνολο που δεν περιέχει άτομα, ισοδύναμα αν η μεταβατική του κλειστότητα $\mathrm{TC}(A)$ δεν περιέχει άτομα. Το σύνολο $A$ είναι **κληρονομικά πεπερασμένο** (hereditarily finite) αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό, πεπερασμένο σύνολο· ισοδύναμα αν το $\mathrm{TC}(A)$ είναι πεπερασμένο. Το σύνολο $A$ είναι **κληρονομικά απαριθμητό** αν ανήκει σε κάποιο μεταβατικό, απαριθμητό σύνολο· ισοδύναμα αν το $\mathrm{TC}(A)$ είναι απαριθμητό.

Η ουσία αυτών των ορισμών είναι ότι το $\{\{a\}\}$ είναι μεν σύνολο αλλά όχι αγνό σύνολο αν το $a$ είναι άτομο, επειδή χρειαζόμαστε το $a$ για να το κατασκευάσουμε· το $\{\mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο αλλά όχι κληρονομικά πεπερασμένο επειδή χρειαζόμαστε όλους τους φυσικούς αριθμούς για να το κατασκευάσουμε· το $\{\mathcal{N}\}$ είναι απαριθμητό αλλά όχι κληρονομικά απαριθμητό, επειδή πρέπει να «συμπεριλάβουμε σε ολότητα» την αναπαρίθμητη συλλογή των σημείων του $\mathcal{N}$ πριν κατασκευάσουμε το μονοσύνολο $\{\mathcal{N}\}$ με μια τελευταία, τετριμμένη πράξη συλλογής. Να το πούμε διαφορετικά, το $\{\mathcal{N}\}$ δεν είναι κληρονομικά απαριθμητό επειδή «η έννοιά του περιέχει» αναπαρίθμητο πλήθος αντικειμένων, τα μέλη του μοναδικού του μέλους, $\mathcal{N}$.

**11.13. Άσκηση.** *Η Αρχή Αγνότητας* **3.25** *είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι όλα τα σύνολα είναι αγνά.*

**11.14. Άσκηση.** *Ένα μεταβατικό σύνολο είναι κληρονομικά πεπερασμένο ακριβώς αν είναι πεπερασμένο, και κληρονομικά απαριθμητό ακριβώς αν είναι απαριθμητό.*

Θεωρούμε τώρα τη σύγχρονη κλειστότητα συνόλου για τους τελεστές της ένωσης και του δυναμοσυνόλου.

**11.15. Θεώρημα (Βασικό Λήμμα Κλειστότητας).** *Για κάθε σύνολο $I$ και κάθε φυσικό αριθμό $n$, έστω $M_n = M_n(I)$ το σύνολο που ορίζεται με την αναδρομή*

$$M_0 = I, \quad M_{n+1} = M_n \cup \bigcup M_n \cup \mathcal{P}(M_n). \tag{11-18}$$

*Η* **βασική κλειστότητα** *του $I$ είναι η ένωση*

$$M = M(I) =_{\text{ορ}} \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n(I), \tag{11-19}$$

*και έχει τις εξής ιδιότητες:*

(1) *Το $M$ είναι μεταβατικό σύνολο που περιέχει το κενό $\emptyset$ και το $I$, είναι κλειστό για τους τελεστές του ζεύγους $\{x,y\}$, της ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ και του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ και περιέχει κάθε υποσύνολο καθενός από τα μέλη του.*

(2) *Το $M$ είναι το ελάχιστο* (για την $\subseteq$) *μεταβατικό σύνολο που περιέχει το $I$ και είναι κλειστό για τους τελεστές $\{x,y\}$, $\bigcup \mathcal{E}$ και $\mathcal{P}(X)$.*

(3) *Αν το $I$ είναι αγνό και μεταβατικό, τότε κάθε $M_n$ είναι επίσης αγνό και μεταβατικό, και ικανοποιεί την εξίσωση*

$$M_{n+1} = \mathcal{P}(M_n). \tag{11-20}$$

*Έπεται ότι το $M$ είναι αγνό, μεταβατικό σύνολο.*

Αποδειξη. (1) Από τον ορισμό, $\emptyset, I \in M_1 \subseteq M$. Αν $x, y \in M$, τότε από το προφανές $M_n \subseteq M_{n+1}$, υπάρχει κάποιο $m$ τέτοιο ώστε $\{x,y\} \subseteq M_m$, άρα $\{x,y\} \in M_{m+1}$. Το κλειδί για τα υπόλοιπα είναι η συμπερίληψη

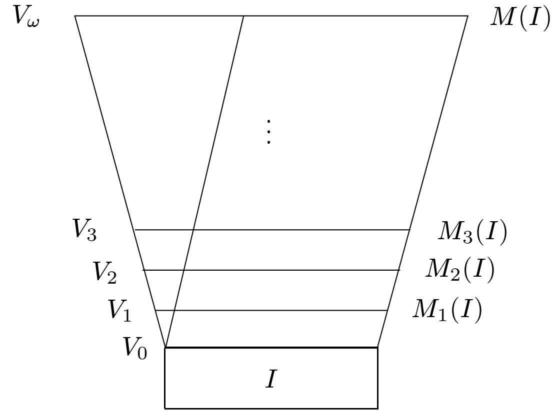
$$x \in M_n \Longrightarrow x \subseteq \bigcup M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq M,$$

από την οποία συνάγεται αμέσως ότι το $M$ είναι μεταβατικό. Με την ίδια μέθοδο,

$$x \in M_n \Longrightarrow \bigcup x \subseteq \bigcup M_{n+1} \subseteq M_{n+2},$$

άρα $x \in M_n \Longrightarrow \bigcup x \in M_{n+3} \subseteq M$ και το $M$ είναι κλειστό για τον τελεστή $\bigcup x$. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το $M$ είναι κλειστό για τον $\mathcal{P}(X)$, και η τελευταία πρόταση προκύπτει απ' αυτή την κλειστότητα και τη μεταβατικότητα.

[30] Η απεικόνιση κόσμων συνόλων με κώνους είναι παραδοσιακή αλλά παραπλανητική: τα διαδοχικά δυναμοσύνολα μεγαλώνουν «υπερεκθετικά» στο πλήθος, έτσι που θα ήταν πιο κοντά στην αλήθεια να τα απεικονίζαμε σαν κώνους με καμπύλες, υπερεκθετικές πλευρές.




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.1**. Λογαριθμικές[30] αποδόσεις των $M(I)$ και $V_\omega$.

(2) Κάθε $M'$ κλειστό για τους $\{x, y\}$ και $\bigcup \mathcal{E}$ είναι επίσης κλειστό για τον $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$· και αν το $M'$ είναι επίσης κλειστό για τον $\mathcal{P}(X)$, τότε επαγωγικά (εύκολα) κάθε $M_n \in M'$, και άρα $M \subseteq M'$ από τη μεταβατικότητα του $M'$.

(3) Αν το $I$ είναι μεταβατικό χωρίς άτομα, τότε κάθε $M_n$ είναι επίσης μεταβατικό χωρίς άτομα, με μια τετριμμένη επαγωγή στο $n$. Απ' αυτό προκύπτει ότι το $M$ είναι μεταβατικό χωρίς άτομα, άρα αγνό, αλλά επίσης και ότι $M_n \cup \bigcup M_n \subseteq \mathcal{P}(M_n)$, έτσι ώστε $M_{n+1} = \mathcal{P}(M_n)$. $\dashv$

**11.16. Άσκηση.** *Σωστό ή λάθος; Για κάθε μεταβατικό σύνολο $X$, $X \subseteq \mathcal{P}(X)$.*

**11.17. Άσκηση.** *Αν $I \subseteq J$, τότε για κάθε $n$, $M_n(I) \subseteq M_n(J)$, και επομένως*

$$I \subseteq J \Longrightarrow M(I) \subseteq M(J).$$

**11.18. Τα εδραιωμένα, αγνά, κληρονομικά πεπερασμένα σύνολα** (Pure, grounded, hereditarily finite sets). Η ελάχιστη βασική κλειστότητα είναι αυτή του κενού συνόλου, $M(\emptyset) \subseteq M(I)$, για κάθε $I$. Με τον κλασικό συμβολισμό (που θα εξηγήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο), $M_n(\emptyset) = V_n$, έτσι ώστε τα $V_n$ και η ένωσή τους προσδιορίζονται από τις εξισώσεις

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n), \quad V_\omega =_{\text{ορ}} \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n = M(\emptyset). \tag{11-21}$$

Για παράδειγμα, $\emptyset \in V_1$, $\{\emptyset\} \in V_2$ και $\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \in V_4$! Τα σύνολα αυτά απεικονίζονται στα αριστερά στο Διάγραμμα **11.1**. Το σύνολο $V_\omega$ είναι εδραιωμένο, αγνό και μεταβατικό, κάθε $V_n$ είναι πεπερασμένο με εύκολη επαγωγή, έτσι που κάθε σύνολο στο $V_\omega$ είναι εδραιωμένο, αγνό και κληρονομικά πεπερασμένο, και βέβαια το $V_\omega$ είναι απαριθμητό. Αυτά είναι τα σύνολα που κατασκευάζονται «από το τίποτα» (κυριολεκτικά, από το κενό σύνολο) με πεπερασμένη επανάληψη της συμπερίληψης σε ολότητα (περιτύλιξης με αγκύλες!) μερικών από τα αντικείμενα που έχουν ήδη κατασκευαστεί.

Οι ιδιότητες κλειστότητας του $M(I)$ που απαριθμήσαμε στο (1) του **11.15** είναι ακριβώς αυτές που απαιτούν τα αξιώματα (**II**) – (**V**) από τον κόσμο $\mathcal{W}$, σύμφωνα με την ανάλυση στο **3.26**, και αν το σύνολο $\mathbb{N}_0$ της (11-15) που εγγυάται το Αξίωμα Απείρου (**VI**) είναι υποσύνολο του $I$, τότε επίσης $\mathbb{N}_0 \in M(I)$. Και επειδή το $M(I)$ είναι μεταβατικό, για όλα τα $A, B \in M(I)$,

$$A \neq B \Longrightarrow (\exists t \in M(I))[t \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)], \tag{11-22}$$

δηλαδή ισχύει στο $M(I)$ ακριβώς αυτό που το Αξίωμα Έκτασης απαιτεί από τον κόσμο $\mathcal{W}$ σύμφωνα με την (3-12). Αυτά προτείνουν ότι αν αλλάξουμε το νόημα του «αντικειμένου» έτσι ώστε να σημαίνει «μέλος του $M(I)$» για κάποιο $I \supseteq \mathbb{N}_0$, τότε κάθε απόδειξη από τα αξιώματα (**I**) – (**VI**) μπορεί να ερμηνευτεί ως επιχείρημα για τα μέλη του $M(I)$ αντί για όλα τα αντικείμενα, που στο τέλος αποδείχνει κάποιο θεώρημα για το $M(I)$ αντί του $\mathcal{W}$. Είναι σημαντική ιδέα, που αξίζει γενίκευση και όνομα.

**11.19. Ορισμός.** Η μεταβατική κλάση $M$ είναι **κόσμος του Zermelo** αν είναι κλειστή για τους τελεστές ζεύγους $\{x, y\}$, ένωσης $\bigcup \mathcal{E}$ και δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(X)$ και περιέχει το σύνολο $\mathbb{N}_0$ ορισμένο από την (11-15). Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo είναι ο $\mathcal{Z} = M(\mathbb{N}_0)$, που καθορίζεται από τις εξισώσεις

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbb{N}_0, \quad \mathcal{Z}_{n+1} = \mathcal{P}(\mathcal{Z}_n), \quad \mathcal{Z} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{Z}_n. \tag{11-23}$$

**11.20. Άσκηση.** *Ο κόσμος $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων είναι κόσμος του Zermelo. Κάθε κόσμος του Zermelo περιέχει το κενό σύνολο και κάθε υποσύνολο καθενός από τα μέλη του.*

Κάθε κόσμος $M$ του Zermelo είναι *πρότυπο* των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**), και μάλιστα πολύ ειδικό πρότυπο εφόσον αποδίδει τις φυσικές ερμηνείες στις βασικές έννοιες του «τι είναι σύνολο» και του «ανήκειν»—περιορίζει μόνο το πεδίο αντικειμένων στο οποίο ερμηνεύουμε αξιώματα και θεωρήματα. Ο ισχυρισμός ότι λογικά επακόλουθα των αξιωμάτων (**I**) – (**VI**) αληθεύουν όταν τα ερμηνεύουμε σε οποιονδήποτε κόσμο του Zermelo καλείται *μεταθεώρημα*, θεώρημα που αφορά θεωρήματα. Για να διατυπώσουμε με ακρίβεια και να αποδείξουμε με αυστηρότητα γενικά αποτελέσματα αυτού του είδους, χρειαζόμαστε μεθόδους και αποτελέσματα από τη *Μαθηματική Λογική*. Σε συγκεκριμένα παραδείγματα όμως, λήμμα προς λήμμα και πρόταση με πρόταση, είναι συνήθως απλό να δούμε ακριβώς για ποια ιδιότητα του κόσμου $\mathcal{W}$ συζητάμε και να αποδείξουμε κατευθείαν την ερμηνεία της σε κάθε κόσμο του Zermelo: επειδή, πράγματι, χρησιμοποιούμε στις αποδείξεις μας τα αξιώματα ως ιδιότητες κλειστότητας του κόσμου $\mathcal{W}$, για τον οποίο δεν έχουμε αποδεχτεί τίποτα περισσότερο από το ότι έχει αυτές τις ιδιότητες.

**11.21. Πρόταση.** *Κάθε κόσμος του Zermelo $M$ είναι κλειστός για τον τελεστή ζεύγους του Kuratowski $(x, y)$ που ορίστηκε στην* (4-1), *και για τους τελεστές Καρτεσιανού γινομένου $A \times B$, συναρτησιακού χώρου $(A \to B)$, και* *χώρου μερικών συναρτήσεων* $(A \rightharpoonup B)$, *αν αυτοί οριστούν από το ζεύγος Kuratowski. Επιπλέον, αν* $A \in M$ *και η* $\sim$ *είναι σχέση ισοδυναμίας στο* $A$, *τότε η* $\sim$ *και το πηλίκο* $[\![A/{\sim}]\!]$ (βλ. **4.12**) *επίσης ανήκουν στο* $M$.

Απόδειξη. Το ζεύγος Kuratowski $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ δύο στοιχείων του $M$ είναι προφανώς στο $M$, χρησιμοποιώντας τρεις φορές την υπόθεση ότι το $M$ είναι κλειστό για τον $\{x, y\}$. Αν $A, B \in M$, τότε $A \cup B = \bigcup\{A, B\}$, και ακολουθώντας την απόδειξη του **4.2**

$$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \in M,$$

έτσι ώστε $A \times B \in M$. Τα υπόλοιπα αποδείχνονται με παρόμοιο τρόπο. ⊣

**11.22. Άσκηση.** *Κάθε κόσμος του Zermelo* $M$ *περιέχει σύστημα Peano, σύμφωνα με τον ορισμό στο* **5.1**.

**11.23. Πρόταση.** (1) *Το Αξίωμα Εξαρτημένων Επιλογών αληθεύει σε κάθε κόσμο του Zermelo* $M$, *με την εξής ερμηνεία: αν* $a \in A \in M$, $P \subseteq A \times A$, $P \in M$, *και* $\mathbb{N} \in M$ *είναι κάποιο σύστημα Peano στο* $M$, *τότε*

$$\begin{aligned} & a \in A \,\&\, (\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y) \\ & \qquad \Longrightarrow (\exists f : \mathbb{N} \to A)[f \in M \,\&\, f(0) = a \,\&\, (\forall n \in \mathbb{N})P(f(n), f(n + 1))]. \end{aligned}$$

(2) (**AC**) *Το Αξίωμα Επιλογής αληθεύει σε κάθε κόσμο του Zermelo* $M$, *με την εξής ερμηνεία, κατά την* **8.4**: *για κάθε οικογένεια* $\mathcal{E} \in M$ *μη κενών και ξένων ανα δύο συνόλων, υπάρχει κάποιο σύνολο* $S \in M$ *που είναι σύνολο επιλογής για την* $\mathcal{E}$, *δηλαδή*

$$S \subseteq \bigcup \mathcal{E}, \quad (\forall X \in \mathcal{E})(\exists u)[S \cap X = \{u\}].$$

Απόδειξη. (1) Αν ισχύει η υπόθεση της συνεπαγωγής που θέλουμε να αποδείξουμε, τότε από το **DC** υπάρχει κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ τέτοια ώστε $f(0) = a$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $P(f(n), f(n + 1))$. Επειδή $(\mathbb{N} \to A) \in M$, έχουμε επίσης $f \in M$ από τη μεταβατικότητα.

Το (2) αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο. ⊣

Επιλέξαμε συγκεκριμένες εκδοχές των αρχών επιλογής για την ευκολία της απόδειξης, αλλά όλες οι ισοδύναμες εκδοχές τους επίσης αληθεύουν σε κάθε κόσμο του Zermelo $M$. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε κατ' ευθείαν, ή παρατηρώντας ότι οι αποδείξεις ισοδυναμίας που δώσαμε «επιδέχονται ερμηνεία μέσα στο $M$».

**11.24. Άσκηση.** (**AC**) *Για κάθε κόσμο του Zermelo* $M$, *αν* $A, B \in M$ *και* $P$ *είναι οποιαδήποτε διμελής οριστική συνθήκη, τότε*

$$\begin{aligned} & (\forall x \in A)(\exists y \in B)P(x, y) \\ & \qquad \Longrightarrow (\exists f \in M)[f : A \to B \,\&\, (\forall x \in A)P(x, f(x))]. \end{aligned} \tag{11-24}$$

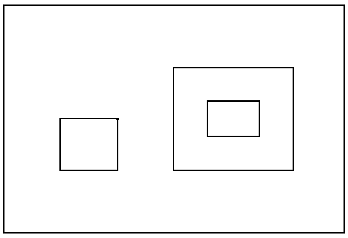
**11.25. Ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo** $\mathcal{Z}$. Για να διασαφηνίσουμε το ζήτημα, θεωρούμε τον συγκεκριμένο, ελάχιστο κόσμο του Zermelo, $\mathcal{Z}$. Πρόκειται για ένα αγνό, μεταβατικό σύνολο, που κατασκευάσαμε ξεκινώντας με το απλούστατο $\mathbb{N}_0$ και επαναλαμβάνοντας άπειρες φορές την πράξη του δυναμοσυνόλου, κάπως όπως κατασκευάζουμε και τους φυσικούς αριθμούς ξεκινώντας με το 0 και επαναλαμβάνοντας άπειρες φορές την πράξη του επόμενου. Μπορούμε να κατανοήσουμε τα μέλη του $\mathcal{Z}$ ως ακριβώς τα αντικείμενα που εγγυώνται τα αξιώματα (**I**) – (**VI**), τα οποία εκφράζουν ιδιότητες κλειστότητας που ικανοποιεί το $\mathcal{Z}$. Οι φυσικές ερμηνείες των **DC** και **AC** επίσης αληθεύουν στο $\mathcal{Z}$, η δεύτερη, βέβαια, αν δεχτούμε ότι αληθεύει στον κόσμο $\mathcal{W}$. Με βάση τις ιδιότητες κλειστότητας των κόσμων του Zermelo που έχουμε ήδη αποδείξει, αν ξανακοιτάξουμε τις αποδείξεις στα Κεφάλαια **5**, **6** και **10** και στο Παράρτημα **A** θα δούμε ότι το $\mathcal{Z}$ περιέχει όχι μόνο το συγκεκριμένο σύστημα φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ που κατασκευάσαμε στο Κεφάλαιο **5**, αλλά και το χώρο Baire που ορίζεται με αυτό το $\mathbb{N}$ και τα συγκεκριμένα συστήματα ρητών και πραγματικών αριθμών που ορίζονται στο Παράρτημα **A**. Από τα θεωρήματα μοναδικότητας που συνοδεύουν αυτές τις κατασκευές, καθένα απ' αυτά τα συστήματα απεικονίζει την ανάλογη διαισθητική έννοια τόσο πιστά όσο και κάθε άλλο, έτσι ώστε μπορούμε να πούμε ότι το $\mathcal{Z}$ περιέχει τους φυσικούς, το χώρο Baire, τους ρητούς και τους πραγματικούς.

Αν συνδυάσουμε τώρα αυτές τις παρατηρήσεις με γνωστά συμπεράσματα και προτάσεις των κλασικών μαθηματικών, δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε ένα πειστικό επιχείρημα ότι *όλα τα αντικείμενα μελέτης της κλασικής άλγεβρας, της ανάλυσης, της συναρτησιακής ανάλυσης, της τοπολογίας, της πιθανοθεωρίας, των διαφορικών εξισώσεων κ.λπ. μπορούν να βρεθούν (μέχρις ισομορφισμού) στο* $\mathcal{Z}$. Πολλά από τα θεμελιακά αντικείμενα της γενικής συνολοθεωρίας επίσης υπάρχουν στο $\mathcal{Z}$, όλα όσα έχουμε κατασκευάσει πριν απ' αυτό το κεφάλαιο, π.χ. στην ανάπτυξη της θεωρίας μερικά και καλά διατεταγμένων χώρων. Σαν σύνθημα: **τα κλασικά μαθηματικά και η απαραίτητη για τη μελέτη τους θεωρία συνόλων, επιδέχονται ερμηνεία σαν όλα τα μαθηματικά αντικείμενα να ήταν μέλη του** $\mathcal{Z}$.

Το ίδιο ισχύει βέβαια για κάθε κόσμο του Zermelo, αλλά ο συγκεκριμένος, απλός ορισμός του $\mathcal{Z}$ μας επιτρέπει να αναλύσουμε τη δομή του και να μελετήσουμε τις ειδικές ιδιότητες των μελών του. Για παράδειγμα, κανένα μέλος του $\mathcal{Z}$ δεν ανήκει στον εαυτό του: επειδή κανένα $X \in \mathbb{N}_0$ δεν ικανοποιεί την $X \in X$ (εύκολα), και αν (προς απαγωγή σε άτοπο) το $n$ είναι ελάχιστο ώστε να υπάρχει κάποιο $X \in X \in \mathcal{Z}_{n+1}$, τότε $X \in X \subseteq \mathcal{Z}_n$ από τον ορισμό, έτσι ώστε $X \in \mathcal{Z}_n$, ενάντια στην επιλογή του $n$. Αυτό μάλλον ευχάριστο είναι, είχαμε προβλήματα με σύνολα που ανήκουν στον εαυτό τους· όμως η επαναληπτική κατασκευή του $\mathcal{Z}$ συνεπάγεται μια πολύ ισχυρότερη ιδιότητα για τα μέλη του που ανακάλυψε ο von Neumann.

**11.26. Ορισμός.** Ένα αντικείμενο $x$ είναι **κακά θεμελιωμένο** (ill founded) αν κάποια φθίνουσα $\in$-αλυσίδα αρχίζει με αυτό, δηλαδή αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to E$ τέτοια ώστε

$$x = f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \cdots .$$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.2**. Το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ σαν απογοητευτικό δώρο.

Αντικείμενα που δεν είναι κακά θεμελιωμένα καλούνται **καλά θεμελιωμένα** (well founded) ή **εδραιωμένα** (grounded). Αν $X \in X$, τότε $X \ni X \ni X \ni \cdots$, και επομένως το $X$ είναι κακά θεμελιωμένο. Το Πρόβλημα **x11.14** δίνει χαρακτηρισμό των κακά θεμελιωμένων συνόλων κατευθείαν από τη σχέση $\in$, με τρόπο που μοιάζει γενίκευση της ιδιότητας $X \in X$.

**11.27. Άσκηση.** *Τα άτομα, το κενό $\emptyset$ και το $\mathbb{N}_0$ είναι εδραιωμένα. Ένα σύνολο $X$ είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν κάθε μέλος του $X$ είναι εδραιωμένο, αν και μόνον αν το δυναμοσύνολό του είναι εδραιωμένο. Η κλάση όλων των εδραιωμένων συνόλων είναι μεταβατική.*

**11.28. Πρόταση.** *Η βασική κλειστότητα $M(I)$ κάθε εδραιωμένου συνόλου $I$ είναι εδραιωμένη. Ειδικότερα, ο ελάχιστος κόσμος του Zermelo $\mathcal{Z}$ και όλα του τα μέλη είναι εδραιωμένα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμαστε ότι το $I$ είναι εδραιωμένο και ότι (προς απαγωγή σε άτοπο) το $n$ είναι ελάχιστο ώστε το $M_n$ να είναι κακά θεμελιωμένο και έστω $M_n \ni x_1 \ni \cdots$ φθίνουσα $\in$-αλυσίδα. Από την υπόθεση, $n > 0$. Επειδή οι υποθέσεις $x_1 \in M_{n-1}$ και $x_1 \in y \in M_{n-1}$ αντιτίθενται στην επιλογή του $n$, πρέπει να ισχύει το $x_1 \subseteq M_{n-1}$, άρα $x_2 \in M_{n-1}$ και η ύπαρξη της φθίνουσας $\in$-αλυσίδας $M_{n-1} \ni x_2 \ni \cdots$ αντιτίθεται πάλι στην επιλογή του $n$. Προκύπτει ότι το $M$ είναι εδραιωμένο, επειδή κάθε φθίνουσα αλυσίδα $M \ni x_1 \ni \cdots$ θα έδειχνε επίσης ότι κάποιο $M_n$ είναι κακά θεμελιωμένο, συγκεκριμένα το $M_n$ που περιέχει το $x_1$. Το πόρισμα για το $\mathcal{Z}$ ισχύει επειδή το $\mathbb{N}_0$ είναι εδραιωμένο.⊣

Στη γνωστή, σαχλή φάρσα, ενθουσιασμένος ο Γιαννάκης στη γιορτή του ανοίγει το τεράστιο κουτί με το δώρο του, μόνο για να βρει μέσα ένα άλλο κουτί, και σ' αυτό μέσα ακόμη ένα κουτί κ.λπ. μέχρις ότου φτάσει στο τελευταίο, μικροσκοπικό κουτάκι που είναι άδειο: το δώρο του είναι τα κουτιά. Μπορούμε να συλλάβουμε τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα σαν αφηρημένες απεικονίσεις τέτοιων απογοητευτικών δώρων, όπου όμως το κάθε κουτί μπορεί να περιλαμβάνει περισσότερα από ένα εσωτερικά κουτιά: όποιο κουτί και ν' ανοίξει ο Γιαννάκης κάθε φορά, τελικά θα βρει το άδειο κουτί, το κενό $\emptyset$. Οι περισσότερες αξιωματοποιήσεις της συνολοθεωρίας δέχονται την εξής αρχή του von Neumann, που απαγορεύει τα κακά θεμελιωμένα σύνολα απαρχής.

**11.29. Αρχή Θεμελίωσης** (Principle of Foundation). *Κάθε σύνολο είναι εδραιωμένο.* Αυτό καλείται επίσης αρχή (ή Αξίωμα) της *Κανονικότητας* (Regularity).

Υπάρχει και η εξής εναλλακτική, κάπως δυσνόητη αλλά χρήσιμη έκφραση της Αρχής Θεμελίωσης.

**11.30. Πρόταση.** *Η Αρχή Θεμελίωσης ισχύει αν και μόνον αν για κάθε μη κενό σύνολο $X$, υπάρχει κάποιο $m \in X$ τέτοιο ώστε*

$$m \cap X = \emptyset. \tag{11-25}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμαστε πρώτα την Αρχή Θεμελίωσης, και (προς απαγωγή σε άτοπο) υποθέτουμε ότι $X \neq \emptyset$, αλλά ότι κανένα $m \in X$ δεν ικανοποιεί την (11-25). Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $a$,

$$a \in X \,\&\, (\forall m \in X)(\exists t \in X)[t \in m],$$

άρα, από το **DC**, υπάρχει άπειρη, φθίνουσα $\in$-αλυσίδα που αρχίζει με το $X \ni a$, και αυτό βέβαια αντιτίθεται στην υπόθεση. Αντιστρόφως, αν η Αρχή Θεμελίωσης δεν αληθεύει και κάποια άπειρη φθίνουσα $\in$-αλυσίδα αρχίζει με το σύνολο

$$X = f(0) \ni f(1) \ni f(2) \ni \cdots ,$$

τότε η εικόνα $f[\mathbb{N}] = \{f(0), f(1), \dots\}$ είναι βεβαίως μη κενή, και τέμνει καθένα από τα μέλη της, έτσι που κανένα απ' αυτά δεν ικανοποιεί την (11-25). $\dashv$

**11.31. Η συνολοθεωρία Zermelo-Fraenkel (με επιλογή), ZFC.** Το πλέον διαδεδομένο—το «επίσημο»— σύστημα αξιωμάτων για σύνολα είναι η **Θεωρία Zermelo-Fraenkel** (με επιλογή), που προσθέτει τις Αρχές Αγνότητας **3.25** και Θεμελίωσης στα αξιώματα της **ZFDC** μαζί με το Αξίωμα Επιλογής, συμβολικά:

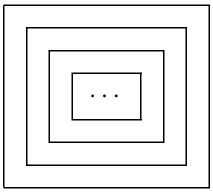
$$\mathbf{ZFC} = \mathbf{ZFDC} + \mathbf{AC} + \text{Αγνότητα} + \text{Θεμελίωση}.$$

Είναι πολλά και πειστικά τα επιχειρήματα που ευνοούν αυτό το σύστημα, μερικά απ' αυτά θα εκθέσουμε αμέσως στη συνέχεια, και πάλι αργότερα, στα Κεφάλαιο **12** και στο Παράρτημα **B**, όπου επίσης θα εξηγήσουμε και τους βασικούς λόγους που μας οδήγησαν να μείνουμε κατά βάση στην ασθενέστερη θεωρία **ZFDC** σ' αυτές τις Σημειώσεις. Από την καθαρά πρακτική άποψη, οι αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης δεν είναι σημαντικές για το μέρος της συνολοθεωρίας που μας αφορά εδώ, και το πλήρες **AC** χρειάζεται μόνο σποραδικά, έτσι που μπορούμε εύκολα να σημειώνουμε τις χρήσεις του.

**11.32. Υπάρχουν μη εδραιωμένα σύνολα;** Η πλέον κατάφωρη παραβίαση της Αρχής Θεμελίωσης θα ήταν ένα αντικείμενο που είναι το μονοσύνολο του εαυτού του,

$$\Omega = \{\Omega\}. \tag{11-26}$$

Μπορούμε να συλλάβουμε το $\Omega$ σαν το πλέον απογοητευτικό δώρο: κάθε κουτί περιέχει ένα άλλο, πανομοιότυπο, και ο Γιαννάκης εξακολουθεί ν' ανοίγει κουτιά



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.3**. Το $\Omega$ σαν τραγικά απογοητευτικό δώρο.

χωρίς αποτέλεσμα ή τέρμα, για πάντα! Μήπως υπάρχουν σύνολα $\Omega^1$ και $\Omega^2$ τέτοια ώστε

$$\Omega^1 = \{\emptyset, \Omega^2\}, \quad \Omega^2 = \{\Omega^1\}? \tag{11-27}$$

Τέτοιες εξισώσεις μοιάζουν απίθανες, άσχετες, αλλά δεν είναι προφανές ότι τα αξιώματα που έχουμε δεχτεί τις αποκλείουν. Για την ακρίβεια, δεν τις αποκλείουν: στο Παράρτημα **B** θα κατασκευάσουμε πιθανοφανή πρότυπα της **ZFDC+AC** που περιέχουν κάποιο αυτομονοσύνολο $\Omega = \{\Omega\}$, και άλλα σύνολα με παραπλήσιες ιδιότητες.

Ας θυμηθούμε τώρα τις κάπως ασαφείς περιγραφές της *μεγάλης* και της *μικρής* άποψης του κόσμου αντικειμένων $\mathcal{W}$ στο **3.26**. Η μεγάλη άποψη θεωρεί το $\mathcal{W}$ ως τη μέγιστη εφικτή συλλογή αντικειμένων που ικανοποιεί τα αξιώματα, ενώ η μικρή άποψη δέχεται ότι το $\mathcal{W}$ αποτελείται από εκείνα τα αντικείμενα που απαιτούνται από τα αξιώματα.

Με τη μεγάλη άποψη, δεν έχουμε τώρα περισσότερες ή λιγότερες ενδείξεις για την αλήθεια της Αρχής Θεμελίωσης απ' ό,τι είχαμε στο Κεφάλαιο **3**, εκτός του ότι έχουμε δημιουργήσει όλη αυτή τη θεωρία χωρίς ποτέ να χρειαστούμε αυτή την αρχή: από την άλλη μεριά, δεν χρειαστήκαμε ούτε κακά θεμελιωμένα σύνολα.

Έχουμε αποκτήσει όμως πολύ καλύτερη αντίληψη της μικρής άποψης, τουλάχιστον για τη θεωρία **ZDC+AC**, και απ' αυτήν όλες οι ενδείξεις ευνοούν την Αρχή Θεμελίωσης: τα σύνολα που «εγγυώνται» τα αξιώματα της **ZDC+AC** είναι προφανώς τα μέλη του $\mathcal{Z}$, και είναι όλα αγνά και εδραιωμένα. Θα μπορούσε κανείς να αντιλογήσει ότι δεν κατασκευάσαμε το $\mathcal{Z}$ από το τίποτα, εργαστήκαμε μέσα σ' ένα «δοσμένο» κόσμο αντικειμένων $\mathcal{W}$, και μάλιστα χρειάστηκε να δεχτούμε ότι εκτός από τα αξιώματα της **ZDC+AC**, το $\mathcal{W}$ ικανοποιεί επίσης το Αξίωμα Αντικατάστασης. Αυτό είναι σωστό, αλλά επίσης σωστή είναι και η προφανής απάντηση: έξω από κάθε έννοια αυστηρής αξιωματοποίησης, ο ορισμός του $\mathcal{Z}$ και οι αποδείξεις των βασικών ιδιοτήτων του μπορούν να κατανοηθούν άμεσα, αφελώς, όπως συνήθως καταλαβαίνουμε τα μαθηματικά—και πείθουν. Μια απλή περιγραφή του $\mathcal{Z}$ θα ήταν τέλεια κατανοητή στο Κεφάλαιο **3**, ως διαισθητικός ορισμός «περιορισμένου συνόλου», που δικαιολογεί τα αξιώματα της **ZDC+AC**, και τις αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης. Δεν έχουμε βρει μέχρι στιγμής παρόμοιο, αληθοφανές διαισθητικό πρότυπο της **ZDC** που να περιέχει μη εδραιωμένα σύνολα, από οποιεσδήποτε υποθέσεις που δεν οδηγούν σε φαύλο κύκλο.[31]

Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε απλά πρότυπα όπως το $\mathcal{Z}$ για την **ZFDC** και την **ZFC**; Ας τα ονομάσουμε πρώτα.

**11.33. Ορισμός.** **ZFDC-κόσμος** είναι ένας κόσμος του Zermelo $M$ που επιπλέον ικανοποιεί το Αξίωμα Αντικατάστασης, δηλαδή για κάθε σύνολο $A \in M$ και μονομελή οριστικό τελεστή $H$,

$$(\forall x \in M)[H(x) \in M] \Longrightarrow H[A] = \{H(x) \mid x \in A\} \in M.$$

**ZFC-κόσμος** είναι ένας **ZFDC**-κόσμος $M$ που δεν περιέχει άτομα και στον οποίο κάθε σύνολο $A \in M$ επιδέχεται καλή διάταξη στο $M$.

Τα αξιώματα της **ZFDC** εκφράζουν ακριβώς την υπόθεση ότι η κλάση $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων είναι **ZFDC**-κόσμος και, αντίστοιχα, τα αξιώματα της **ZFC** ισχυρίζονται ότι το $\mathcal{W}$ είναι **ZFC**-κόσμος.

**11.34. Θεώρημα.** *Η κλάση* **του von Neumann**

$$\mathcal{V} =_{\text{ορ}} \{X \mid X \text{ είναι αγνό, εδραιωμένο σύνολο}\} \tag{11-28}$$

*είναι* **ZFDC**-*κόσμος· και αν ισχύει το* **AC**, *τότε η $\mathcal{V}$ είναι* **ZFC**-*κόσμος.*

Απόδειξη. Η κλάση $\mathcal{V}$ είναι κόσμος του Zermelo, εύκολα από την Άσκηση **11.27**. Για να δείξουμε ότι ικανοποιεί επίσης το Αξίωμα Αντικατάστασης, παρατηρούμε ότι για κάθε σύνολο $A$ (ακόμη κι αν $A \notin \mathcal{V}$), αν ο $H$ είναι μονομελής οριστικός τελεστής τέτοιος ώστε για κάθε $x \in A$, η τιμή $H(x)$ να είναι αγνό, εδραιωμένο σύνολο, τότε η εικόνα $H[A]$ έχει μόνο αγνά και εδραιωμένα μέλη, και επομένως (εύκολα) είναι και αυτή αγνή και εδραιωμένη.

Ο δεύτερος ισχυρισμός έπεται άμεσα, επειδή αν ισχύει το **AC**, τότε κάθε $A \in \mathcal{V}$ επιδέχεται καλή διάταξη $\leq_A \in \mathcal{P}(A \times A)$ και $\leq_A \in \mathcal{V}$. ⊣

Υπάρχει ακόμη ένας, κομψός και χρήσιμος χαρακτηρισμός των αγνών, εδραιωμένων συνόλων που είναι εύκολο πόρισμα του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5**.

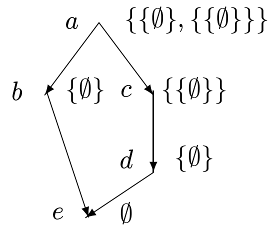
**11.35. Ορισμός.** **Mostowski Επιμορφισμός** ή **διακόσμηση** (decoration) γραφήματος $G$ με σχέση ακμών $\rightarrow$ είναι ένας επιμορφισμός $d : G \twoheadrightarrow d[G]$ που αντιστοιχίζει σύνολο σε κάθε κόμβο του $G$, έτσι ώστε

$$d(x) = \{d(y) \mid y \leftarrow x\} \quad (x \in G). \tag{11-29}$$

**11.36. Θεώρημα (Λήμμα Συμπίεσης του Mostowski,** Collapsing Lemma**).**

(1) *Κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ επιδέχεται ακριβώς έναν Mostowski επιμορφισμό $d_G$, και η εικόνα του $d_G[G]$ είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο σύνολο.*

[31] Πρότυπα όπως το $M(\mathbb{N}_0 \cup \Omega)$ οδηγούν σε φαύλο κύκλο, επειδή χρειαζόμαστε απαρχής κάποιο $\Omega$ με την αμφισβητούμενη ιδιότητα του αυτομονοσυνόλου.




$$d_G[G] = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **11.4**. Συμπίεση Mostowski.

(2) *Ένα σύνολο $A$ είναι αγνό και εδραιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει κάποιο εδραιωμένο γράφημα $G$ και κάποιος κόμβος $x \in G$, έτσι ώστε $A = d_G(x)$, όπου η $d_G$ είναι η μοναδική διακόσμηση του $G$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Η ύπαρξη και μοναδικότητα διακόσμησης ενός εδραιωμένου $G$ είναι άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5** εφαρμοσμένου στο $G$, με τον οριστικό τελεστή

$$H(f) = \text{Image}(f) = \{f(x) \mid f(x)\downarrow\}.$$

Η εικόνα $d_G[G]$ είναι μεταβατικό σύνολο, επειδή αν $s \in t \in d_G[G]$, τότε $s \in t = d_G(y)$ για κάποιο $y \in G$, οπότε $s = d_G(x)$ για κάποιο $x \leftarrow y$, και $s \in d_G[G]$. Αφού το κάθε $d_G(x)$ είναι σύνολο από την (11-29), το $d_G[G]$ είναι μεταβατικό σύνολο χωρίς άτομα και επομένως αγνό. Επίσης το $d_G[G]$ είναι εδραιωμένο, επειδή αν υπήρχε φθίνουσα $\in$-ακολουθία $x_0 \ni x_1 \ni \cdots$ στο $d_G[G]$ και επιλέγαμε τους κόμβους $s_0, s_1, \ldots$ έτσι ώστε $d_G(s_i) = x_i$, τότε η $s_0 \to s_1 \to \cdots$ θα ήταν μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία στο εδραιωμένο γράφημα $G$.

(2) Αν $A = d_G(x)$ με το $x$ κόμβο κάποιου εδραιωμένου γραφήματος, τότε το $A$ ανήκει στο μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο σύνολο από το (1), και επομένως είναι αγνό και εδραιωμένο. Για το αντίστροφο, έστω $G = \text{TC}(A)$ η μεταβατική κλειστότητα του $A$ και όρισε σ' αυτήν

$$x \to y \iff_{\text{op}} y \in x.$$

Το γράφημα $G$ είναι εδραιωμένο, επειδή το $G = \text{TC}(A)$ είναι εδραιωμένο σύνολο, Πρόβλημα **x11.16**. Επίσης ισχύει η

$$d_G(x) = x \quad (x \in G) \tag{11-30}$$

επειδή αν το $x$ ήταν $G$-ελαχιστικό αντιπαράδειγμα για την (11-30), τότε

$$\begin{aligned} d_G(x) &= \{d_G(y) \mid y \;{}_G\!\leftarrow x\}, \\ &= \{y \mid y \leftarrow x\} && \text{από την επιλογή του } x, \\ &= \{y \mid y \in x\} && \text{από τον ορισμό της } \to, \\ &= x && \text{επειδή το } x \text{ είναι σύνολο.} \end{aligned}$$

Ειδικότερα, $A = d_G(A)$, που βεβαιώνει το (2). ⊣

Η κλάση $\mathcal{V}$ δεν είναι σύνολο (Πρόβλημα **x11.20**) και δεν είναι εύκολο να βρούμε σύνολα που να είναι **ZFDC**-κόσμοι, βλ. Προβλήματα **x12.43**, **x12.44** και **xB.12**.

**11.37. Αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας**. Όλα τα αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας που διατυπώσαμε στα **8.24**, **8.25**, **10.33**, **10.34**, **10.36** και **10.37** ισχύουν αν προσθέσουμε το Αξίωμα Αντικατάστασης στις σχετικές θεωρίες. Ήρθε η στιγμή να συλλέξουμε τις γενικότερες και σημαντικότερες εκδοχές αυτών των αποτελεσμάτων για τη θεωρία **ZFC**.

(1) (Gödel, 1939) *Ο κόσμος $L$ των κατασκευάσιμων συνόλων είναι πρότυπο της* **ZFC**, *που επίσης ικανοποιεί τη Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς* **GCH**. Συνεπώς το Αξίωμα Επιλογής **AC** δεν μπορεί να διαψευστεί από τα άλλα αξιώματα της **ZFC**, ούτε και η **GCH** διαψεύδεται στην **ZFC**.

(2) (Cohen, 1963) *Καμία από τις αρχές επιλογής* $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$, **DC** *και* **AC** *δεν μπορεί να αποδειχθεί από ασθενέστερες αρχές μαζί με τα κατασκευαστικά αξιώματα του Zermelo* (**I**) – (**VI**) *και το Αξίωμα Αντικατάστασης* (**VIII**).

(3) (Cohen, 1963) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFC** *στο οποίο η Υπόθεση του Συνεχούς* **CH** *δεν αληθεύει, και επομένως η* **CH** *δεν είναι θεώρημα της* **ZFC**.

(4) (Solovay, 1970) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFC** *στο οποίο κάθε «ορίσιμο», αναπαρίθμητο σημειοσύνολο έχει τέλειο υποσύνολο, και επομένως έχει πληθικό αριθμό* $\mathfrak{c}$. Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο σημειοσύνολο $A$ και μετά να αποδείξουμε στην **ZFC** ότι ο πληθάριθμός του είναι μεγαλύτερος του $\aleph_0$ και μικρότερος του $\mathfrak{c}$.

(5) (Solovay, 1970) *Υπάρχει πρότυπο της* **ZFDC** *στο οποίο κάθε αναπαρίθμητο σημειοσύνολο περιέχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο*, και επομένως *η ύπαρξη αναπαρίθμητων σημειοσυνόλων χωρίς μη κενό, τέλειο υποσύνολο δεν είναι θεώρημα της* **ZFDC**. Το πρότυπο του Solovay ικανοποιεί επίσης τις Αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 11

**x11.1.** Δείξε το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**) από τα υπόλοιπα αξιώματα στην ομάδα (**I**) – (**V**) και το Αξίωμα Αντικατάστασης (**VIII**).

**x11.2.** Για κάθε σύνολο $A$, κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $F$ και κάθε διμελή, οριστικό τελεστή $G$, υπάρχει ελάχιστο για την $\subseteq$ σύνολο $\overline{A}$ που περιέχει το $A$ ως υποσύνολο και είναι κλειστό για τους $F$ και $G$, δηλαδή

$$A \subseteq \overline{A}, \quad x \in \overline{A} \Longrightarrow F(x) \in \overline{A}, \quad x, y \in \overline{A} \Longrightarrow G(x, y) \in \overline{A}.$$

(Το ίδιο ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό τελεστών, οσωνδήποτε μεταβλητών.)

**x11.3.** Το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο $A$ και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $F$, υπάρχει σύνολο

$B$ που περιέχει το $A$ και είναι κλειστό για τον $F$, δηλαδή

$$A \subseteq B \,\&\, F[B] \subseteq B.$$

**x11.4.** Το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι κατασκευαστικά ισοδύναμο με το εξής: για κάθε σύνολο $A$ και κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $F$, ο περιορισμός

$$F \restriction A =_{\mathsf{op}} \{(x, F(x)) \mid x \in A\}$$

του $F$ στο $A$ είναι συνάρτηση, δηλαδή σύνολο ζευγών.

**x11.5.** Αν ο $(x, y)$ είναι οριστικός τελεστής δύο μεταβλητών που ικανοποιεί την πρώτη ιδιότητα διατεταγμένων ζευγών (OP1) στο **4.1**, τότε ικανοποιεί επίσης και τη δεύτερη, (OP2). (Αυτό δεν μπορεί να αποδειχτεί στην **ZDC+AC**, βλ. Πρόβλημα **xB.4**.)

**x11.6.** Αν ο $|A|$ είναι οριστικός τελεστής που έχει την πρώτη ιδιότητα ασθενούς τελεστή πληθικότητας (C1), τότε αυτόματα έχει και την τρίτη, (C3). (Αυτό δεν μπορεί να αποδειχτεί στην **ZDC+AC**, βλ. Πρόβλημα **xB.8**.)

**x11.7.** Η οριστική συνθήκη της συνάρτησης ορισμένη στην (4-14) ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$\begin{aligned} \text{Function}(f) \iff \text{Set}(f) \,\&\, (\forall w \in f)(\exists x, y)[w = (x, y)] \\ \&\, (\forall x, y, y')[[(x, y) \in f \,\&\, (x, y') \in f] \Longrightarrow y = y'], \end{aligned}$$

δηλαδή το $f$ είναι συνάρτηση ακριβώς όταν είναι μονοσήμαντο σύνολο διατεταγμένων ζευγών. (Βλ. επίσης το Πρόβλημα **xB.9**.)

**x11.8.** Υπάρχει ακριβώς μία ακολουθία $(n \mapsto \aleph_n)$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}|, \quad \aleph_{n+1} = \aleph_n^+.$$

Τα ονόματα των πρώτων άπειρων πληθαρίθμων τα ορίσαμε στην (9-6), αλλά άλλο είναι να δείξεις ότι υπάρχει *η ακολουθία* $(n \mapsto \aleph_n)$. (βλ. επίσης το Πρόβλημα **xB.10**.)

**x11.9. Γενικευμένη αναδρομή με παραμέτρους.** Για κάθε μονομελή οριστικό τελεστή $G$ και κάθε τριμελή οριστικό τελεστή $H$, υπάρχει μονομελής, οριστικός τελεστής $F$ που ικανοποιεί τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} F(0, y) &= G(y), \\ F(n+1, y) &= H(F(n, y), n, y). \end{aligned}$$

**x11.10.** Αν η $\mathcal{E}$ είναι μη κενή οικογένεια μεταβατικών συνόλων, τότε η ένωση $\bigcup \mathcal{E}$ και η τομή $\bigcap \mathcal{E}$ είναι επίσης μεταβατικά σύνολα.

**x11.11.** Για κάθε κλάση $A$ υπάρχει ελάχιστη, μεταβατική κλάση $\overline{A}$ που περιέχει την $A$, δηλαδή τέτοια ώστε $A \subseteq \overline{A}$ και για κάθε μεταβατική κλάση $B$, αν $A \subseteq B$, τότε $\overline{A} \subseteq B$.

**x11.12.** Οι κλάσεις των αγνών συνόλων, των κληρονομικά πεπερασμένων συνόλων και των κληρονομικά αριθμήσιμων συνόλων είναι όλες μεταβατικές.

**x11.13.** Αν $x_1 \in x_2 \in \cdots \in x_n = x_1$, τότε το $x_1$ είναι κακά θεμελιωμένο.

**x11.14.** Το αντικείμενο $x$ είναι κακά θεμελιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει σύνολο $A$ τέτοιο ώστε

$$x \in A \,\&\, (\forall s \in A)(\exists t \in A)[s \ni t].$$

**x11.15.** Αν υπάρχουν $\Omega^1$, $\Omega^2$ που ικανοποιούν την (11-27), τότε είναι διαφορετικά, κληρονομικά πεπερασμένα, αγνά σύνολα.

**x11.16.** Ένα σύνολο $A$ είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν η μεταβατική του κλειστότητα $\mathrm{TC}(A)$ είναι εδραιωμένη.

* **x11.17.** Ένα σύνολο ανήκει στο $V_\omega$ αν και μόνον αν είναι αγνό, εδραιωμένο και κληρονομικά πεπερασμένο. Υπόδειξη. Δείξε πρώτα ότι κάθε πεπερασμένο, μεταβατικό, αγνό και εδραιωμένο σύνολο είναι μέλος του $V_\omega$.

**x11.18.** Για κάθε μεταβατικό σύνολο $I$, έστω

$$J = \{x \in I \mid x \text{ είναι αγνό και εδραιωμένο}\}\cdot$$

δείξε ότι

$$M(J) = \{x \in M(I) \mid x \text{ είναι αγνό και εδραιωμένο}\}.$$

**x11.19.** Αν υπάρχει σύνολο $\Omega = \{\Omega\}$ όπως στην (11-26), τότε

$$\{x \in M(\Omega) \mid x \text{ εδραιωμένο}\} = V_\omega.$$

**x11.20.** Δείξε ότι η κλάση $\mathcal{V}$ των αγνών, εδραιωμένων συνόλων δεν είναι σύνολο.

**11.38. Ορισμός.** Η κλάση ατόμων $K$ **στηρίζει** (supports) το σύνολο $A$ αν

$$x \in \mathrm{TC}(A) \,\&\, \mathrm{Atom}(x) \Longrightarrow x \in K\cdot$$

θέτουμε

$$\mathcal{W}[K] = \{x \mid \text{το } x \text{ στηρίζεται από την } K\}, \tag{11-31}$$
$$\mathcal{V}[K] = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι εδραιωμένο και στηρίζεται από την } K\}. \tag{11-32}$$

**x11.21.** Η κλάση $\mathcal{W}[K]$ των συνόλων που στηρίζονται από μια κλάση ατόμων $K$ είναι **ZFDC**-κόσμος.

**x11.22.** Η κλάση $\mathcal{V}[K]$ των εδραιωμένων συνόλων που στηρίζονται από μια κλάση ατόμων $K$ είναι **ZFDC**-κόσμος.

**x11.23.** Έστω $G = (\mathbb{N}, \rightarrow)$ με $m \rightarrow n \iff n < m$. Δείξε ότι το $G$ είναι εδραιωμένο και υπολόγισε την εικόνα $d_G(m)$ για κάθε $m$ για τη μοναδική διακόσμηση του $G$.

**x11.24.** Δώσε παράδειγμα άπειρου, εδραιωμένου γραφήματος $G$ με $d_G[G] = \{\emptyset\}$.

$^*$**x11.25.** Έστω $G = (\mathbb{N} \setminus \{0\}, \to)$, με

$$m \to n \iff m \neq n \,\&\, \text{το } n \text{ διαιρεί το } m.$$

Δείξε ότι το $G$ είναι εδραιωμένο και υπολόγισε την είκονα $d_G(m)$ για κάθε $m$ υπό τη μοναδική διακόσμηση του $G$.

**x11.26.** *Επεκταμένη διακόσμηση* γραφήματος $G$ είναι ένας επιμορφισμός $d : G \twoheadrightarrow d[G]$ που ικανοποιεί για κάθε $x \in G$ την εξίσωση

$$d(x) = \begin{cases} x, & \text{αν το } x \text{ είναι άτομο,} \\ \{d(y) \mid y \leftarrow x\}, & \text{αν το } x \text{ είναι σύνολο.} \end{cases}$$

Δείξε ότι κάθε εδραιωμένο γράφημα επιδέχεται ακριβώς μία επεκταμένη διακόσμηση, και ότι ένα (όχι υποχρεωτικά αγνό) σύνολο $A$ είναι εδραιωμένο αν και μόνον αν υπάρχει εδραιωμένο γράφημα $G$ και $x \in G$, τέτοια ώστε $A = d(x)$.

$^*$**x11.27. Εδραιωμένη $\in$-αναδρομή**. Για κάθε διμελή οριστικό τελεστή $H$, υπάρχει οριστικός τελεστής $F(t)$ τέτοιος ώστε για κάθε εδραιωμένο σύνολο $x$,

$$F(x) = H(F \upharpoonright x, x),$$

όπου η συνάρτηση $F \upharpoonright x = \{(t, F(t)) \mid t \in x\}$ είναι ο περιορισμός του τελεστή $F$ στο σύνολο $x$.

Αυτό είναι ειδική περίπτωση της επόμενης, κάπως γενικότερης επέκτασης του Θεωρήματος Εδραιωμένης Αναδρομής **11.5**.

$^*$**x11.28.** Έστω διμελής οριστική συνθήκη $t < y$ με τις ιδιότητες (1) για κάθε $x$, η κλάση $\{t \mid t < x\}$ είναι σύνολο, και (2) δεν υπάρχει ακολουθία $(n \mapsto x_n)$ τέτοια ώστε για κάθε $n$, $x_{n+1} < x_n$. Δείξε ότι για κάθε διμελή οριστικό τελεστή $H$ υπάρχει κάποιος άλλος $F$, τέτοιος ώστε για κάθε $x$,

$$F(x) = H(F \upharpoonright \{t \mid t < x\}, x),$$

όπου η συνάρτηση $F \upharpoonright \{t \mid t < x\} = \{(t, F(t)) \mid t < x\}$ είναι ο περιορισμός του $F$ στο σύνολο $\{t \mid t < x\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

# ΔΙΑΤΑΚΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Το Αξίωμα Αντικατάστασης βρίσκει τις σημαντικότερες εφαρμογές του στην όμορφη θεωρία Διατακτικων Αριθμων του von Neumann και στην κατασκευή της Συσσωρευτικης Ιεραρχιας των αγνών, εδραιωμένων συνόλων. Μπορεί κανείς να επιβιώσει χωρίς να γνωρίζει τους διατακτικούς αριθμούς, βεβαίως, αλλά όχι τόσο ευχάριστα: προσφέρουν πολλά, εν οις και αληθινούς πληθικούς αριθμούς που δίνουν πραγματικότητα και ουσία στην «εικονική» θεωρία ισοπληθικότητας στην οποία (αναγκαστικά) έχουμε περιοριστεί. Η Συσσωρευτική Ιεραρχία επεκτείνει την επανάληψη του τελεστή δυναμοσυνόλου με την οποία φτιάξαμε το $V_\omega$ «όσο πάει», και τελικά παριστάνει τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα στην πιο επιτακτική, διαισθητική κατανόηση έννοιας συνόλου. Δεν είναι τόσο σίγουρο ότι μπορεί κανείς να ζήσει χωρίς να καταλάβει αυτή την εικόνα, οπωσδήποτε όχι ανάμεσα σε συνολοθεωρητικούς.

Ο Cantor περιγράφει την έννοια των «διατακτικών τύπων» μόλις μερικές σελίδες μετά τον ορισμό πληθαρίθμων που αποκόψαμε στο **4.19**, και με παρόμοιο τρόπο.

> Κάθε διατεταγμένο σύνολο $U$ έχει καθορισμένο 'διατακτικό τύπο', [. . .] τον οποίο συμβολίζουμε $\overline{U}$. Με αυτό εννοούμε τη γενική έννοια που απορρέει από το $U$ όταν αποσύρουμε από τα στοιχεία $u$ μόνο την ιδιαίτερή τους φύση, και κρατήσουμε τη διάταξη ή το προβάδισμα μεταξύ τους. Έτσι ο διατακτικός τύπος $\overline{U}$ είναι και αυτός διατεταγμένο σύνολο, με στοιχεία μονάδες που έχουν αναμεταξύ τους το ίδιο προβάδισμα όπως και τα αντίστοιχα μέλη του $U$, από τα οποία έχουν δημιουργηθεί με αφαίρεση. . . . Ένα απλό επιχείρημα πείθει ότι δύο διατεταγμένα σύνολα έχουν τον ίδιο διατακτικό τύπο τότε και μόνον αν είναι όμοια, έτσι ώστε οι δύο εξισώσεις $U =_o V$ και $\overline{U} = \overline{V}$ είναι ισοδύναμες.

Ο Cantor αναφέρεται σε γραμμικά διατεταγμένους χώρους, γενικά, αλλά εδώ θα θεωρήσουμε το ειδικότερο πρόβλημα ορισμού «διατακτικών τύπων» μόνο για καλά διατεταγμένους χώρους. Ισχυρίζεται ρητά την πρώτη χαρακτηριστική ιδιότητα

$$U =_o \overline{U} \tag{12-1}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\square \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \circ \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \blacksquare \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\emptyset & \{\emptyset\} & \{\emptyset,\{\emptyset\}\} & \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\} & \cdots & \omega & \omega\cup\{\omega\}
\end{tikzcd}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **12.1**. Ο επιμορφισμός von Neumann του
$U \ : \ 0_U, 1_U, 2_U, \ldots, \omega_U, S_U(\omega_U)$.

του τελεστή ανάθεσης διατακτικών αριθμών και επιχειρηματολογεί για τη συνεπαγωγή

$$U =_o V \Longrightarrow \overline{U} = \overline{V}. \tag{12-2}$$

Ο «απλός ισχυρισμός» που υπαινίσσεται ο Cantor για την (12-2) θα πρέπει να δικαιώνει επίσης την ισχυρότερη συνεπαγωγή

$$U \leq_o V \Longrightarrow \overline{U} \sqsubseteq \overline{V} \cdot \tag{12-3}$$

τουλάχιστον για καλά διατεταγμένους χώρους, όπου η θέση σημείου $x$ στο χώρο εξαρτάται μόνο από τα σημεία που προηγούνται του $x$, έτσι ώστε η «μονάδα» $\overline{x}$ που δημιουργείται με αφαίρεση από το $x$ και κωδικοποιεί αυτή τη θέση στο $U$, λογικά πρέπει επίσης να εξαρτάται μόνο από το αρχικό τμήμα $\mathbf{seg}_U(x)$. Έτσι το πρόβλημα της πιστής απεικόνισης στην αξιωματική συνολοθεωρία της έννοιας διατακτικών αριθμών του Cantor καταλήγει στο εξής: *μπορούμε να αντιστοιχίσουμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $\overline{U}$ σε κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$, έτσι που να ισχύουν οι* (12-1) *και* (12-3). Η πρωτότυπη ιδέα του von Neumann είναι να ορίσουμε τον $\overline{U}$ αντικαθιστώντας *αναδρομικά* κάθε μέλος του $U$ με το σύνολο των προηγούμενών του.

**12.1. Διατακτικοί Αριθμοί** (Ordinal Numbers). Ο **von Neumann επιμορφισμός** ενός καλά διατεταγμένου χώρου $U$ είναι ο μοναδική διακόσμηση του αντίστοιχου εδραιωμένου γραφήματος $(\mathrm{Field}(U), >_U)$, έτσι ώστε από την (11-29),

$$\mathbf{v}_U(x) = \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U x\}, \quad (x \in \mathrm{Field}(U)). \tag{12-4}$$

Ο **διατακτικός αριθμός** του $U$ είναι η εικόνα

$$\mathrm{ord}(U) =_{\mathrm{o}\rho} \mathbf{v}_U[\mathrm{Field}(U)] \tag{12-5}$$

του $U$ από τον von Neumann επιμορφισμό του, και

$$\mathrm{ON} = \{\alpha \mid (\exists \text{ καλά διατεταγμένος χώρος } U)[\alpha = \mathrm{ord}(U)]\} \tag{12-6}$$

είναι η κλάση των διατακτικών αριθμών. Ως συνήθως, γράφουμε ισοδύναμα,

$$\mathrm{ON}(\alpha) \iff \alpha \in \mathrm{ON}.$$

Για παράδειγμα, έστω

$$U \ : \ 0_U, 1_U, 2_U, \ldots, \omega_U, S_U(\omega_U)$$

καλά διατεταγμένος χώρος με ελάχιστο σημείο $0_U$, επόμενο $1_U$, ... , πρώτο οριακό σημείο $\omega_U$, και αμέσως μετά το τελευταίο (μέγιστο) σημείο $S_U(\omega_U)$. Υπολογίζουμε τις τιμές του von Neumann επιμορφισμού με επανειλημμένες εφαρμογές της (12-5) (παραλείποντας τους δείκτες):

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(0_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 0_U\} &&= \emptyset &&= 0,\\
\mathbf{v}(1_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 1_U\} &&= \{\emptyset\} &&= 1,\\
\mathbf{v}(2_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 2_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &&= 2,\\
\mathbf{v}(3_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < 3_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &&= 3,\\
&\vdots\\
\mathbf{v}(\omega_U) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < \omega_U\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\} &&= \omega\\
\mathbf{v}(S_U(\omega_U)) &= \{\mathbf{v}(x) \mid x < S_U(\omega_U)\} &&= \omega \cup \{\omega\}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}[U] = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega \cup \{\omega\}\}.$$

Οι υπολογισμοί αυτοί είναι ειδικές περιπτώσεις των παρακάτω γενικών προτάσεων:

**12.2. Άσκηση.** *Αν $0_U$ είναι το ελάχιστο σημείο ενός καλά διατεταγμένου χώρου $U$, τότε $\mathbf{v}_U(0_U) = \emptyset$· και αν $S(x)$ είναι ο επόμενος του $x$ στον $U$, τότε*

$$\mathbf{v}_U(S(x)) = \mathbf{v}_U(x) \cup \{\mathbf{v}_U(x)\}.$$

**12.3. Άσκηση.** *Αν το $x$ είναι οριακό σημείο ενός καλά διατεταγμένου χώρου $U$, τότε $\emptyset \in \mathbf{v}_U(x)$ και*

$$\alpha \in \mathbf{v}_U(x) \Longrightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{v}_U(x).$$

**12.4. Άσκηση.** *Αν $\omega_U$ είναι το πρώτο οριακό σημειό σε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$, τότε*

$$\omega = \mathbf{v}_U(\omega_U) = \bigcap \{X \mid \emptyset \in X \,\&\, (\forall \alpha \in X)[\alpha \cup \{\alpha\} \in X]\}, \tag{12-7}$$

*και, ειδικότερα, το $\omega = \mathbf{v}_U(\omega_U)$ είναι ανεξάρτητο από το συγκεκριμένο καλά διατεταγμένο χώρο $U$ που χρησιμοποιούμε για να το υπολογίσουμε.*

Η άσκηση αυτή, διασαφηνίζει για το $\omega_U$, κάτι που είναι προφανές για τα $0_U, 1_U, \dots$ στο Διάγραμμα **12.1**· η τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ είναι ανεξάρτητη από το σημείο $x \in U$ και εξαρτάται μόνο από τη θέση του $x$ στο $U$, αν είναι το πρώτο σημείο, το πέμπτο, το πρώτο οριακό σημείο κ.λπ. Η γενική αλήθεια αυτής της ιδιότητας του $\mathbf{v}$ εκφράζεται ως εξής.

**12.5. Λήμμα (Πρώτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών).** *Για κάθε αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$ από έναν καλά διατεταγμένο χώρο $U$ σε κάποιον άλλο $V$, το Διάγραμμα* **12** *είναι αντιμεταθετικό, δηλαδή*

$$\mathbf{v}_V(\pi(x)) = \mathbf{v}_U(x) \quad (x \in U). \tag{12-8}$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathbf{v}_U"'] & V \arrow[d, "\mathbf{v}_V"] \\ \mathrm{ord}(U) \arrow[r, "id(x)=x"] & \mathrm{ord}(V) \end{tikzcd}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **12.2**. Ο επιμορφισμός von Neumann και αρχικές ομοιότητες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προς άτοπο, έστω $x$ ελάχιστο στο $U$ τέτοιο που $\mathbf{v}_V(\pi(x)) \neq \mathbf{v}_U(x)$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_V(\pi(x)) &= \{\mathbf{v}_V(y) \mid y <_V \pi(x)\} && \text{εξ ορισμού,} \\ &= \{\mathbf{v}_V(\pi(t)) \mid t <_U x\} && \text{επειδή η } \pi \text{ είναι αρχική,} \\ &= \{\mathbf{v}_U(t) \mid t <_U x\} && \text{από την επιλογή του } x, \\ &= \mathbf{v}_U(x), \end{aligned}$$

που αντιτίθεται στην επιλογή του $x$. Το κλειδί της απόδειξης είναι το δεύτερο βήμα, όπου χρησιοποιούμε το γεγονός ότι η εικόνα μιας αρχικής ιδιότητας «δεν έχει τρύπες», έτσι που κάθε $y <_V \pi(x)$ είναι ένα $\pi(t)$ για κάποιο $t <_U x$. ⊣

**12.6. Άσκηση.** *Αν οι $U$ και $V$ είναι καλά διατεταγμένοι χώροι, τότε*

$$U \leq_o V \Longrightarrow \mathrm{ord}(U) \subseteq \mathrm{ord}(V).$$

*Έπεται ότι αν $U =_o V$, τότε $\mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(V)$.*

**12.7. Λήμμα (Δεύτερη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών).** *Για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$ και κάθε $y \in U$,*

$$\mathbf{v}_U(x) = \mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(x)). \tag{12-9}$$

*Έπεται ότι κάθε von Neumann τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ είναι διατακτικός αριθμός, και αντιστρόφως, κάθε διατακτικός αριθμός $\alpha$ είναι η von Neumann τιμή $\mathbf{v}_U(x)$ κάποιου σημείου, σε κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο.*

Απλούστερα: κάθε μέλος διατακτικού αριθμού είναι διατακτικός αριθμός και κάθε διατακτικός αριθμός είναι μέλος διατακτικού αριθμού.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφαρμόζοντας το Λήμμα **12.5** με $\mathbf{seg}_U(x)$ για $U$, $U$ για $V$ και την ταυτοτική αρχική ομοιότητα $\pi : \mathbf{seg}_U(x) \rightarrowtail U$, συνάγουμε ότι

$$\mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(y) = \mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(\pi(y)) = \mathbf{v}_U(y) \qquad (y <_U x),$$

έτσι που, τελικά

$$\mathbf{v}_U(x) = \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U x\} = \{\mathbf{v}_{\mathbf{seg}_U(x)}(y) \mid y <_U x\} = \mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(x)).$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, ας είναι $V = \mathrm{Succ}(U)$ ο επόμενος καλά διατεταγμένος χώρος του $U$, με ένα νέο $t$ στην κορυφή, όπως στο **7.16**: τώρα $U = \mathbf{seg}_V(t)$, έτσι που $\mathrm{ord}(U) = \mathbf{v}_V(t)$. ⊣

Έτσι οι διατακτικοί αριθμοί απεικονίζουν εξίσου μήκη καλά διατεταγμένων χώρων αλλά και θέσεις σημείων σε κάποιο καλά διατεταγμένο χώρο. Η δεύτερη ερμηνεία συμφωνεί καλύτερα με τη χρήση διατακτικών αριθμών στην καθημερινή γλώσσα, όπου «πρώτος», «δεύτερος», ... τυπικά καθορίζουν τη θέση κάποιου αντικειμένου σε μια σειρά.

**12.8. Άσκηση (Οι πεπερασμένοι von Neumann διατακτικοί αριθμοί).** *Αν $\leq_{\mathbb{N}}$ είναι η συνηθισμένη διάταξη των φυσικών $\mathbb{N}$, τότε*

$$\mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}) = \omega,$$

*όπως το $\omega$ ορίστηκε στο* (12-7). *Επιπλέον, αν θέσουμε*

$$S_\omega(n) = n \cup \{n\} \quad (n \in \omega),$$

*τότε το $(\omega, \emptyset, S_\omega)$ είναι σύστημα Peano, και ο $\mathbf{v}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \omega$ είναι ο μοναδικός* (από το Θεώρημα **5.4**) *ισομορφισμός των φυσικών αριθμών με το $\omega$.*

Συνηθίζεται στην προχωρημένη συνολοθεωρία να θεωρούμε το $(\omega, \emptyset, S)$ ως *το* σύστημα Peano που σταθεροποιήσαμε στο **5.9**, δηλαδή να ταυτίζουμε το $\mathbb{N}$ με το $\omega$. Αυτό διευκολύνει ορισμένα πράγματα, αλλά δεν είναι ούτε απαραίτητο, ούτε ιδιαίτερα φυσιολογικό—δύσκολα βρίσκουμε πειστικά επιχειρήματα ότι το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ είναι καλύτερη αναπαράσταση του αριθμού 2, από αυτήν του Zermelo, $\{\{\emptyset\}\}$ που είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος **5.3**, ή αλλιώς το τρίτο μέλος οποιουδήποτε συστήματος Peano.

Ακολουθεί το βασικό αποτέλεσμα για τους διατακτικούς αριθμούς.

**12.9. Λήμμα (Τρίτη Ιδιότητα Διατακτικών Αριθμών).** *Κάθε διατακτικός αριθμός $\alpha$ είναι καλά διατεταγμένος από τη σχέση*

$$u \leq_\alpha v \iff_{\text{ορ}} u = v \vee u \in v \quad (u, v \in \alpha)\cdot \tag{12-10}$$

*και αν $\alpha = \mathrm{ord}(U)$ για κάποιο χώρο $U$, τότε ο von Neumann επιμορφισμός $\mathbf{v}_U : U \twoheadrightarrow \alpha$ είναι ομοιότητα.*

*Έπεται ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος είναι όμοιος με κάποιον διατακτικό αριθμό, και κάθε καλά διατάξιμο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό.*

Αποδειξη. Αρχικά, από το Λήμμα **11.36**, κάθε $\alpha = \mathbf{v}_U[U]$ είναι μεταβατικό, αγνό και εδραιωμένο σύνολο, και (γράφοντας $\mathbf{v}$ αντί για $\mathbf{v}_U$),

$$x <_U y \Longrightarrow \mathbf{v}(x) \in \mathbf{v}(y). \tag{12-11}$$

Επιπλέον,

$$x \neq y \Longrightarrow \mathbf{v}(x) \neq \mathbf{v}(y), \quad (x, y \in U)\cdot$$

επειδή αν $x \neq y$, τότε είτε $x <_U y$ είτε $y <_U$, έτσι που από τη (12-11), είτε $\mathbf{v}(x) \in \mathbf{v}(y)$ είτε $\mathbf{v}(y) \in \mathbf{v}(x)\cdot$ και σε κάθε περίπτωση, δεν μπορεί να ισχύει η $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(y)$ εφόσον το $\alpha$ είναι εδραιωμένο σύνολο. Έτσι η $\mathbf{v} : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \alpha$ είναι μονομορφισμός, άρα αντιστοιχία, και η σχέση $\leq_\alpha$ είναι η εικόνα της $\leq_U$ από τη $\mathbf{v}$, δηλαδή,

$$x \leq_U y \iff \mathbf{v}(x) \leq_\alpha \mathbf{v}(y) \quad (x, y \in U)\cdot$$

έπεται ότι η $\leq_\alpha$ είναι καλή διάταξη του $\alpha$ και η $\mathbf{v}$ είναι ομοιότητα.

Ο τελευταίος ισχυρισμός ισχύει επειδή οι ομοιότητες είναι αντιστοιχίες. $\dashv$

Το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα βεβαιώνει ότι υπάρχουν αρκετά μακριές $\in$-αλυσίδες ώστε να μας δίνουν αντίγραφα κάθε καλής διάταξης, και είναι χαρακτηριστικό επακόλουθο του Αξιώματος Αντικατάστασης. Όπως πάντα με δομημένα σύνολα, «ο διατακτικός αριθμός $\alpha$» θα είναι διφορούμενα το σύνολο $\alpha$ ή ο διατεταγμένος χώρος $(\alpha, \leq_\alpha)$, έτσι που, για παράδειγμα, το Λήμμα **12.9** εκφράζεται απλά από την

$$U =_o \operatorname{ord}(U).$$

**12.10. Άσκηση.** *Για κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha$, $\operatorname{ord}(\alpha) = \alpha$.*

**12.11. Πόρισμα (Χαρακτηρισμός των διατακτικών).** *Το σύνολο $\alpha$ είναι διατακτικός αριθμός αν και μόνον αν είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο και $\in$-συνεκτικό, δηλαδή,*

$$x = y \lor x \in y \lor y \in x \qquad (x, y \in \alpha).$$

Αποδειξη. Κάθε διατακτικός έχει αυτές τις ιδιότητες, από τα Λήμματα **11.36** και **12.9**. Για το αντίστροφο, δεχόμαστε ότι το $A$ είναι μεταβατικό, αγνό, εδραιωμένο και $\in$-συνεκτικό και θέτουμε (σαν να είναι το $A$ διατακτικός)

$$x \leq_A y \iff x = y \lor x \in y, \quad (x, y \in A).$$

Η σχέση αυτή είναι (εύκολα) καλή διάταξη του $A$· έστω $\mathbf{v}_A : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \operatorname{ord}(A, \leq_A)$ η αντίστοιχη απεικόνιση von Neumann. Ισχυριζόμαστε ότι η $\mathbf{v}_A$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση: αν όχι και $x$ είναι το $\leq_A$-ελάχιστο τέτοιο που $\mathbf{v}_A(x) \neq x$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_A(x) &= \{\mathbf{v}(y) \mid y <_A x\} \\
&= \{y \mid y <_A x\} && \text{(από την επιλογή του } x\text{)} \\
&= \{y \mid y \in x\} && \text{(από τον ορισμό της } \leq_A\text{)} \\
&= x && \text{(επειδή το } x \text{ δεν περιέχει άτομα)},
\end{aligned}$$

που αντιτίθεται στην επιλογή του $x$. Έπεται ότι $\operatorname{ord}(A, \leq_A) = \mathbf{v}_A[A] = A$, και το $A$ είναι διατακτικός. $\dashv$

Ο χαρακτηρισμός αυτός των διατακτικών αριθμών είναι ιδιαίτερα απλός αν δεχτούμε ότι όλα τα σύνολα είναι εδραιωμένα και αγνά, τα επιπρόσθετα αξιώματα της **ZFC**: *ένα σύνολο είναι διατακτικός ακριβώς αν και μόνον αν είναι μεταβατικό και $\in$-συνεκτικό.*

Οι τρεις βασικές ιδιότητες των διατακτικών αριθμών δίνουν επίσης ικανοποιητική λύση στο πρόβλημα της πιστής απεικόνισης των διατακτικών τύπων καλά διατεταγμένων χώρων του Cantor, όπως το περιγράψαμε στις (12-1) – (12-3).

**12.12. Θεώρημα.** *Ο οριστικός τελεστής $U \mapsto \mathrm{ord}(U)$ στους καλά διατεταγμένους χώρους ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:*

$$U =_o \mathrm{ord}(U), \tag{12-12}$$

$$U \leq_o V \Longrightarrow \mathrm{ord}(U) \sqsubseteq \mathrm{ord}(V), \tag{12-13}$$

$$\mathrm{ON}(\alpha) \Longrightarrow \alpha = \{\beta \in \mathrm{ON} \mid \beta <_o \alpha\}. \tag{12-14}$$

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα (12-12) είναι επανάληψη του Λήμματος **12.9**.

Για να δείξουμε τη (12-13), έστω $\pi : U \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \pi[U] \sqsubseteq V$ αρχική ομοιότητα. Από το Λήμμα **12.7**, παίρνοντας τις εικόνες,

$$\mathbf{v}_V[\pi[U]] = \mathbf{v}_U[U] = \mathrm{ord}(U)\cdot$$

αλλά η $\mathbf{v}_V$ είναι ομοιότητα του $V$ με τον $\mathrm{ord}(V)$ και μεταφέρει αρχικά τμήματα σε αρχικά τμήματα, άρα

$$\mathrm{ord}(U) = \mathbf{v}_U[U] = \mathbf{v}_V[\pi[U]] \sqsubseteq \mathrm{ord}(V).$$

Τελικά, για τη (12-14), αν $\alpha = \mathrm{ord}(U)$, τότε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \{\mathbf{v}_U(y) \mid y \in U\} \\ &= \{\mathrm{ord}(\mathbf{seg}_U(y)) \mid y \in U\} \quad (\text{από το Λήμμα } \mathbf{12.7}) \\ &= \{\beta \in \mathrm{ON} \mid \beta <_o \alpha\}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία εξίσωση ισχύει επειδή οι καλά διατεταγμένοι χώροι που είναι $<_o U$ είναι ακριβώς αυτοί που είναι όμοιοι με μη τετριμμένα, αρχικά τμήματα του $U$. ⊣

**12.13. Άσκηση.** *Αν οι $U$ και $V$ καλά διατεταγμένοι χώροι, τότε*

$$U =_o V \iff \mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(V),$$

*και έτσι για κάθε καλά διατεταγμένο χώρο $U$, υπάρχει μοναδικός διατακτικός αριθμός $\alpha$ τέτοιος που $U =_o \alpha$.*

Οι συνθήκες (12-12) και (12-13) είναι ακριβώς οι (12-1) και (12-3) του Cantor. Η πιο σημαντική, τελευταία συνθήκη (12-14) είναι χαρακτηριστική του διατακτικού τελεστή του von Neumann και έχει ως επακόλουθο τη μοναδικότητά του, Πρόβλημα **x12.4**. Είναι ενδιαφέρον αυτό το αποτέλεσμα· παραλείπουμε την απόδειξη μόνο επειδή είναι ωραίο πρόβλημα και δεν θα το χρειαστούμε για περαιτέρω αποτελέσματα. Είναι όμως εύκολο να χαθεί κανείς στην απόδειξη πληθώρας ιδιοτήτων των διατακτικών αριθμών, μερικές απ' αυτές χρήσιμες άλλες απλώς περίπλοκες, και οι αποδείξεις κατευθείαν από τον ορισμό τείνουν προς το μυστηριώδες: δεν είναι τελείως φυσικό να θεωρούμε τη σχέση $\in$ ως διάταξη. Μια καλή τακτική, τουλάχιστον στην αρχή, είναι να στηρίζουμε τις αποδείξεις ιδιοτήτων των διατακτικών αριθμών στις τρεις χαρακτηριστικές τους ιδιότητες.

**12.14. Λήμμα (Σύγκριση διατακτικών).** *Για όλους τους διατακτικούς αριθμούς $\alpha$, $\beta$,*

$$\alpha \leq_o \beta \iff \alpha = \beta \vee \alpha \in \beta \iff \alpha \sqsubseteq \beta \iff \alpha \subseteq \beta.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δείχνουμε με τη σειρά, κυκλικά, τις αντίστοιχες, αυστηρές συνεπαγωγές.

(1) $\alpha <_o \beta \Longrightarrow \alpha \in \beta$ προκύπτει αμέσως από τις (12-12) και (12-14), αφού η υπόθεση σημαίνει ότι $\alpha = \mathrm{ord}(U)$ και $\beta = \mathrm{ord}(V)$ με $U <_o V$.

Το (2) $\alpha \in \beta \Longrightarrow \alpha \subsetneqq \beta$ και το (3) $\alpha \subsetneqq \beta \Longrightarrow \alpha \subsetneq \beta$ έπονται εξίσου εύκολα από τις (12-12) και (12-14) και θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες.

(4) $\alpha \subsetneq \beta \Longrightarrow \alpha <_o \beta$. Η υπόθεση μας δίνει κάποιο μονομορφισμό από το $\alpha$ στο $\beta$ (τον ταυτοτικό!), έτσι που $\alpha \leq_o \beta$ από το Πόρισμα **7.32**· όμως από το $\alpha =_o \beta$, σύμφωνα με την Άσκηση **12.6** παίρνουμε $\alpha = \beta$ που αντιτίθεται στην αυστηρή συμπερίληψη $\alpha \subsetneq \beta$ που υποθέσαμε, και έτσι $\alpha <_o \beta$. ⊣

Συνηθίζεται να χρησιμοποιούμε για τη διάταξη των διατακτικών αριθμών τον απλούστατο συμβολισμό

$$\alpha \leq \beta \iff_{\text{ορ}} \alpha \leq_o \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{ON}), \tag{12-15}$$

χωρίς βέβαια να ξεχνάμε τους ισοδύναμούς του χαρακτηρισμούς στο Λήμμα (12.14). Οι βασικές ιδιότητες αυτής της συνθήκης είναι (τώρα) εύκολες.

**12.15. Θεώρημα (Η διάταξη του ON).** (1) *Η κλάση* ON *των διατακτικών αριθμών είναι καλά διατεταγμένη από τη συνθήκη* $\alpha \leq \beta$, *με την εξής αυστηρή έννοια:*

$$\alpha \leq \alpha, \quad \alpha \leq \beta \,\&\, \beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma, \quad \alpha \leq \beta \,\&\, \beta \leq \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta,$$
$$\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha,$$

*και για κάθε οριστική συνθήκη* $P$,

$$(\exists \alpha \in \mathrm{ON})P(\alpha) \Longrightarrow (\exists \alpha \in \mathrm{ON})[P(\alpha) \,\&\, (\forall \beta < \alpha)\neg P(\beta)].$$

*Ειδικότερα, δεν υπάρχει άπειρη, φθίνουσα αλυσίδα διατακτικών αριθμών,*

$$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \Longrightarrow (\exists n)[\alpha_n = \alpha_{n+1}]. \tag{12-16}$$

*Όταν ισχύει η* $P(\alpha)$ *για κάποιο* $\alpha$, *θέτουμε*

$$(\mu\alpha \in \mathrm{ON})P(\alpha) = \min\{\alpha \in \mathrm{ON} \mid P(\alpha)\}. \tag{12-17}$$

(2) *Για κάθε διατακτικό αριθμό, υπάρχει ο επόμενος*

$$S(\alpha) =_{\text{ορ}} (\mu\beta \in \mathrm{ON})[\alpha < \beta] = \alpha \cup \{\alpha\}. \tag{12-18}$$

(3) *Κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών* $A$ *έχει ελάχιστο άνω φράγμα,*

$$\sup A =_{\text{ορ}} (\mu\beta \in \mathrm{ON})(\forall \alpha \in A)[\alpha \leq \beta] = \bigcup A, \tag{12-19}$$

*που είναι το μέγιστο του* $A$ *(αν το* $A$ *έχει μέγιστο) και το* $0$ *αν* $A = \emptyset$.

Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ αφήνεται για τα προβλήματα, **x12.1** – **x12.3**. ⊣

**12.16. Άσκηση.** *Για κάθε μη κενό σύνολο διατακτικών αριθμών* $\mathcal{E}$,

$$(\mu\alpha \in \mathrm{ON})[\alpha \in \mathcal{E}] = \bigcap \mathcal{E}.$$

Οι **επόμενοι διατακτικοί αριθμοί** (successor ordinals) είναι αυτοί της μορφής $S(\alpha)$, και οι **οριακοί διατακτικοί αριθμοί** (limit ordinals) είναι αυτοί που δεν είναι ούτε επόμενοι ούτε το 0, έτσι που $\alpha < \lambda \Longrightarrow S(\alpha) < \lambda$· οι οριακοί διατακτικοί προφανώς χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα

$$\mathrm{Limit}(\lambda) \iff \lambda \neq 0 \,\&\, \lambda = \sup\{\alpha \mid \alpha < \lambda\}. \tag{12-20}$$

Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ιδιότητες των διατακτικών αριθμών με *υπερπεπερασμένη επαγωγή* και να ορίσουμε τελεστές σ' αυτούς με *υπερπεπερασμένη αναδρομή*, ως εξής.

**12.17. Θεώρημα (Διατακτική επαγωγή).** *Για κάθε μονομελή οριστική συνθήκη $P$,*

$$(\forall\alpha)[(\forall\xi < \alpha)P(\xi) \Longrightarrow P(\alpha)] \implies (\forall\alpha)P(\alpha).$$

Αποδειξη. Προς άτοπο, έστω $\alpha$ ο ελάχιστος διατακτικός τέτοιος που $\neg P(\alpha)$· έπεται ότι η $P(\xi)$ ισχύει για κάθε $\xi < \alpha$, και επομένως και η $P(\alpha)$ ισχύει από την υπόθεση, που είναι άτοπο. ⊣

**12.18. Θεώρημα (Διατακτική αναδρομή).** *Για κάθε διμελή οριστικό τελεστή $H$, υπάρχει μονομελής οριστικός τελεστής $F$, που ικανοποιεί την εξίσωση*

$$F(\alpha) = H(F\restriction\alpha, \alpha) \quad (\alpha \in \mathrm{ON}). \tag{12-21}$$

Εδώ η $F\restriction\alpha$ είναι η συνάρτηση $\{(\xi, F(\xi)) \mid \xi \in \alpha\}$, ο περιορισμός της $F(\xi)$ στο $\alpha = \{\xi \mid \xi < \alpha\}$.

*Όμοια, με παραμέτρους, για δοσμένο $H(w, \alpha, x)$, υπάρχει $F(\alpha, x)$ έτσι ώστε για κάθε διατακτικό $\alpha$ και κάθε $x$,*

$$F(\alpha, x) = H(\{(\xi, F(\xi, x)) \mid \xi < \alpha\}, \alpha, x) \quad (\alpha \in \mathrm{ON}).$$

Αποδειξη της απλής εκδοχής, χωρίς παραμέτρους.

Για κάθε $\beta$, από το Πόρισμα **11.6** στον καλά διατεταγμένο χώρο $(\beta, \leq_\beta)$, υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f_\beta : \beta \twoheadrightarrow E_\beta$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} f_\beta(\alpha) &= H(f_\beta\restriction\{x \in \beta \mid x <_\beta \alpha\}, \alpha) \quad (\alpha < \beta), \\ &= H(f_\beta\restriction\alpha, \alpha), \end{aligned} \tag{12-22}$$

επειδή η $<_\beta$ είναι ο περιορισμός της $\in$ στο $\beta$ και τα μέλη του $\beta$ είναι διατακτικοί αριθμοί. Υποστηρίζουμε ότι:

$$\text{αν } \alpha < \beta \text{ και } \alpha < \gamma, \text{ τότε } f_\beta(\alpha) = f_\gamma(\alpha)\cdot$$

αν όχι, τότε υπάρχει ελάχιστο $\alpha$ για το οποίο αυτό δεν ισχύει για κάποια $\beta$ και $\gamma$ και τότε η (12-22) οδηγεί αμέσως σε άτοπο. Αν λοιπόν θέσουμε

$$F(\alpha) = f_{S(\alpha)}(\alpha),$$

τότε $F(\alpha) = f_\beta(\alpha)$ για κάθε $\beta > \alpha$ και η (12-22) συνεπάγεται την ταυτότητα που θέλουμε για τον $F$.

Η απόδειξη για την έκδοση με παραμέτρους παρουσιάζει μονό τεχνικές δυσκολίες στους συμβολισμούς. ⊣

Με αυτό το θεώρημα μπορούμε να ορίσουμε αριθμητικές πράξεις στο ON και να μελετήσουμε τη δομή τους. Θα αφήσουμε τα περισσότερα απ' αυτά για προβλήματα, αλλά αξίζει να διατυπώσουμε εδώ δύο βασικούς ορισμούς αυτού του είδους, ως παραδείγματα εφαρμογής του Θεωρήματος **12.18** και για να έχουμε στη διάθεσή μας ονόματα των απλούστερων διατακτικών αριθμών.

**12.19. Θεώρημα (Διατακτική πρόσθεση και πολλαπλασιασμός).** *Υπάρχουν διμελείς, οριστικοί τελεστές $\alpha + \beta$ και $\alpha \cdot \beta$ στους διατακτικούς αριθμούς με τις εξής ιδιότητες:*

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, \\ \alpha + S(\beta) &= S(\alpha + \beta), \\ \alpha + \lambda &= \sup\{\alpha + \beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-23}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0 &= 0, \\ \alpha \cdot S(\beta) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha, \\ \alpha \cdot \lambda &= \sup\{\alpha \cdot \beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-24}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\alpha + \beta = F(\beta, \alpha)$, όπου ο $F(\beta, \alpha)$ ορίζεται με την ακόλουθη αναδρομή στο $\beta \in \mathrm{ON}$, με παράμετρο το $\alpha$:

$$F(\beta, \alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \beta = 0, \\ S(F(\gamma, \alpha)), & \text{αν } \beta = S(\gamma), \text{ για κάποιο } \gamma, \\ \sup\{F(\xi, \alpha) \mid \xi < \beta\}, & \text{αν } \mathrm{Limit}(\beta). \end{cases}$$

Αφήνουμε τον πολλαπλασιασμό για το Πρόβλημα **x12.6**. ⊣

Έχουμε ήδη αναφερθεί στον $\omega$ στη (12-7), και αποδείξαμε στην Άσκηση **12.8** ότι $\omega = \mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$. Οι διατακτικοί αριθμοί που τον ακολουθούν αμέσως είναι προφανώς οι

$$\omega + 1 = S(\omega),\ \omega + 2 = S(\omega + 1),\ \omega + 3 = S(\omega + 2), \ldots$$

και αμέσως μετά απ' αυτούς έρχεται ο

$$\omega + \omega = \sup\{\omega + n \mid n \in \omega\} = \omega \cdot 2. \tag{12-25}$$

Αυτός είναι ο δεύτερος οριακός διατακτικός, ο πρώτος μετά τον $\omega$. Κάθε $\omega \cdot n$ κατασκευάζεται αθροίζοντας τον $\omega$ με τον εαυτό του $n$ φορές, κατευθείαν από τον ορισμό. Αμέσως μετά έρχεται ο

$$\omega^2 = \sup\{\omega \cdot n \mid n < \omega\},$$

μετά από λίγο ο $\omega^3 = \omega^2 \cdot \omega$, κ.λπ.

Πολλές από τις ιδιότητες της διατακτικής πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έπονται από τις ιδιότητες των τελεστών αυτών σε (καλά διατεταγμένους) χώρους, όπως ορίστηκαν στα **7.37** και **7.38**, χρησιμοποιώντας τις επόμενες τρεις ασκήσεις.

**12.20. Άσκηση.** *Για κάθε διατακτικό $\alpha$,*

$$\alpha + 1 = \mathrm{ord}(\mathrm{Succ}(\alpha)),$$

*από τον ορισμό του επόμενου μερικά διατεταγμένου χώρου $\mathrm{Succ}(P)$ στο* **7.16**.

**12.21. Άσκηση.** *Για όλους τους διατακτικούς* $\alpha$, $\beta$,

$$\alpha + \beta = \mathrm{ord}(\alpha +_o \beta),$$

*από τον ορισμό της πρόσθεσης μερικά διατεταγμένων χώρων στο* **7.37**. *Έπεται ότι η πρόσθεση διατακτικών είναι προσεταιριστική αλλά όχι μεταθετική.*

$$\beta < \gamma \Longrightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma. \tag{12-26}$$

**12.22. Άσκηση.** *Για όλους τους διατακτικούς* $\alpha$, $\beta$,

$$\alpha \cdot \beta = \mathrm{ord}(\alpha \cdot_o \beta),$$

*με τον πολλαπλασιασμό μερικά διατεταγμένων χώρων που ορίστηκε στο* **7.38**. *Έπεται ότι ο πολλαπλασιασμός των διατακτικών είναι προσεταιριστικός αλλά όχι μεταθετικός, και ότι*

$$0 < \alpha \,\&\, \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma. \tag{12-27}$$

Από την άλλη μεριά, μερικές από τις ιδιότητες της διατακτικής αριθμητικής αποδεικνύονται ευκολότερα με διατακτική επαγωγή, κατευθείαν από τους αναδρομικούς τους ορισμούς:

**12.23. Άσκηση (Επιμεριστική ιδιότητα προς τα δεξιά).** *Για όλους τους διατακτικούς* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Αφήνουμε για προβλήματα μερικές επιπρόσθετες ιδιότητες της πρόσθεσης διατακτικών, που αποδεικνύονται με παρόμοιους τρόπους. Πρόσεξε ότι πέρα από τη μεταθετικότητα, πολλές ακόμη ιδιότητες της συνηθισμένης αριθμητικής δεν ισχύουν για τους διατακτικούς, όπως για παράδειγμα η επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά, Πρόβλημα **x12.13**.

**12.24. Όρια ακολουθιών διατακτικών**. Για κάθε μονοτονική ακολουθία διατακτικών αριθμών $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots$, θέτουμε

$$\lim_n \alpha_n = \sup\{\alpha_n \mid n = 0, 1, \dots\}.$$

Ο συμβολισμός είναι χρήσιμος, όμως πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί μιας και αυτά τα όρια δεν ικανοποιούν τα συνηθισμένα θεωρήματα του απειροστικού λογισμού, βλ. Πρόβλημα **x12.9**.

Μια από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των διατακτικών αριθμών είναι η επόμενη, κομψή λύση που έδωσε ο von Neumann στο πρόβλημα *ανάθεσης πληθαρίθμων* **4.20**, για καλά διατάξιμα σύνολα. Η λύση βασίζεται στο ότι κάθε καλά διατάξιμο σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό αριθμό, Λήμμα **12.9**.

**12.25. Ορισμός (Πληθάριθμοι von Neumann).** Θέτουμε

$$|A| = \begin{cases} (\mu\xi \in \mathrm{ON})[A =_c \xi], & \text{αν το } A \text{ είναι καλά διατάξιμο},\\ A, & \text{αλλιώς}, \end{cases} \tag{12-28}$$

και από δώ και πέρα θεωρούμε ότι ο τελεστής ανάθεσης πληθαρίθμου που σταθεροποιήσαμε στο **4.21** του Κεφαλαίου **3** είναι αυτός. Οι τιμές του $|A|$ για καλά διατάξιμα $A$ είναι οι **πληθάριθμοι του von Neumann**,

$$\mathrm{Card}_v(\kappa) \iff \text{για κάποιο καλά διατάξιμο } A, \kappa = |A|, \tag{12-29}$$

και εύκολα χαρακτηρίζονται ως **αρχικοί διατακτικοί αριθμοί**:

**12.26. Άσκηση.** $\mathrm{Card}_v(\kappa) \iff \mathrm{ON}(\kappa)\,\&\,(\forall\alpha < \kappa)[\kappa \neq_c \alpha]$, *και για κάθε* $\kappa \in \mathrm{Card}_v$, $|\kappa| = \kappa$.

Από το Λήμμα **9.11**,

$$\mathrm{Card}_v(\kappa) \Longrightarrow \mathrm{Card}_v(\kappa^+),$$

και από τα Λήμματα **9.18** και **9.20**, αν το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό σύνολο πληθαρίθμων, τότε

$$(\forall\kappa \in \mathcal{E})\mathrm{Card}_v(\kappa) \Longrightarrow \mathrm{Card}_v(\inf_c(\mathcal{E})) \text{ και } \mathrm{Card}_v(\sup_c(\mathcal{E}))\cdot$$

για την ακρίβεια, αμέσως από τη (12-19) και το **12.16**, αν το $\mathcal{E}$ είναι μη κενό σύνολο πληθαρίθμων von Neumann, τότε

$$\inf_c(\mathcal{E}) = \min(\mathcal{E}) = \bigcap\mathcal{E}, \quad \sup_c(\mathcal{E}) = \sup\mathcal{E} = \bigcup\mathcal{E}.$$

Η κατασκευή του von Neumann μας δίνει έναν ισχυρό τελεστή πληθικότητας (βλ. **4.21**) στην κλάση των καλά διατάξιμων συνόλων:

**12.27. Άσκηση.** *Αν τα $A$ και $B$ είναι καλά διατάξιμα, τότε*

$$A =_c |A|, \text{ και } A =_c B \iff |A| = |B|. \tag{12-30}$$

*Επιπλέον, για κάθε σύνολο $\mathcal{E}$ από σύνολα, η κλάση $\{|X| \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι σύνολο.*

Η πιό χρήσιμη ιδιότητα των πληθαρίθμων von Neumann είναι η απλούστατη:

$$\text{αν } \kappa, \lambda \in \mathrm{Card}_v, \text{ τότε } \kappa =_c \lambda \iff \kappa = \lambda\cdot$$

αυτό έπεται αμέσως από τις τελευταίες δύο ασκήσεις και μετατρέπει όλες τις ισοπληθικότητες πληθαρίθμων von Neumann σε εξισώσεις της πληθικής αριθμητικής. Επιτέλους, για καλά διατάξιμους πληθάριθμους, μπορούμε να γράφουμε

$$\kappa\cdot(\lambda+\mu) = \kappa\cdot\lambda + \kappa\cdot\mu, \quad \left(\kappa^\lambda\right)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu},$$

κ.λπ., χωρίς τον ενοχλητικό δείκτη $_c$.

**12.28. Πληθάριθμοι, Επιλογή και Αντικατάσταση**. Μπορεί κανείς να υποστηρίξει με κάποια σοβαροφάνεια ότι οι *μονάδες* του Cantor στη διαισθητική περιγραφή των πληθαρίθμων που αποσπάσαμε στο **4.19** απεικονίζονται πιστά από τους διατακτικούς αριθμούς του von Neumann, και η περικοπή

> ο $\overline{\overline{A}}$ αναπτύσσεται (ας το πούμε έτσι) από το $A$, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στοιχείο του $A$ να δημιουργεί μια ειδική μονάδα

περιγράφει ακριβώς την κατασκευή του $|A| = \mathrm{ord}(A) = \mathbf{v}[A]$ από κάποια άριστη διάταξη του $A$, Πρόβλημα **x12.28**. Όποια αξία κι αν έχει ή δεν έχει η αναλογία, σίγουρα η κατασκευή του von Neumann είναι πολύ χρήσιμη: μεταξύ άλλων, μετατρέπει το «λογισμό ισοπληθικότητας» που έχουμε αναπτύξει σε μια αυθεντική αριθμητική πληθαρίθμων — τουλάχιστον αν δεχτούμε το Αξίωμα Επιλογής, έτσι ώστε όλα τα σύνολα να έχουν von Neumann πληθαρίθμους.

Ήμασταν πολύ προσεκτικοί στη διατύπωση αποτελεσμάτων για πληθαρίθμους να αποφύγουμε το Αξίωμα Επιλογής όπου αυτό ήταν εφικτό, αλλά βέβαια το κύριο αποτέλεσμα ήταν να φανεί πεντακάθαρα πόσο φτωχή είναι η πληθική αριθμητική χωρίς επιλογές. Το κύριο εμπόδιο είναι η ισοδυναμία της συγκρισιμότητας πληθαρίθμων με το **AC**: δεν έχουμε ουσιαστική αριθμητική χωρίς συγκρισιμότητα, και δεν μπορούμε να έχουμε συγκρισιμότητα χωρίς να δεχτούμε (αναγκαστικά) το πλήρες Αξίωμα Επιλογής.

Αν δεχτούμε το **AC**, πόσο σημαντική είναι η ύπαρξη «αληθινών πληθικών αριθμών» που ικανοποιούν την (12-30), και που απαιτούν εκτός από το **AC** και το Αξίωμα Αντικατάστασης για την κατασκευή τους; Όχι και πολύ μεγάλη, παρά μόνο γι' αυτούς που έχουν αλλεργία στους δείκτες. Θα μπορούσε ίσως κανείς να θεωρήσει τη λύση του von Neumann στο Πρόβλημα Ανάθεσης Πληθαρίθμων κυρίως σαν άσκηση μαθηματικής κομψότητας, και υπάρχει κάποια δόση αλήθειας σε μια τέτοια άποψη. Δεν πρέπει όμως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το Αξίωμα Αντικατάστασης είναι ασήμαντο για την πληθική αριθμητική επειδή οι βασικές της ταυτότητες είναι θεωρήματα της **ZDC+AC**. Το κύριο πρόβλημα είναι ότι η **ZDC+AC** δεν μπορεί να αποδείξει την ύπαρξη πληθαρίθμων πάνω από την πρώτη, άπειρη ακολουθία

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots ,$$

και μάλιστα δεν μπορεί να αποδείξει καν ότι αυτή η ακολουθία $(n \mapsto \aleph_n)$ υπάρχει, Πρόβλημα **xB.10**. Ειδικότερα, η ύπαρξη ιδιαζόντων πληθαρίθμων δεν είναι θεώρημα της **ZDC+AC**, και επομένως ολόκληρη η θεωρία ομοτελικότητας παραμένει πιθανόν κενή περιεχομένου χωρίς Αντικατάσταση.

Το συμπέρασμα είναι ότι για τη δημιουργία άξιας πληθικής αριθμητικής πρέπει να δεχτούμε και τα δύο αξιώματα Επιλογής και Αντικατάστασης, δηλαδή να εργαστούμε στην **ZFDC+AC**, ή κάποια ακόμη ισχυρότερη αξιωματική συνολοθεωρία. Μερικοί ισχυρίζονται επίσης, ότι και η Αρχή Θεμελίωσης είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την πληθική αριθμητική, αλλά αυτό δεν είναι σωστό—αν και μερικές από τις πιο σημαντικές εφαρμογές των πληθαρίθμων είναι στη δομή του κόσμου $\mathcal{V}$ του von Neumann, των εδραιωμένων, αγνών συνόλων.

**12.29. Πρόταση (Τα «άλεφ»).** *Με αναδρομή στο διατακτικό αριθμό $\alpha \in \mathrm{ON}$, θέτουμε*

$$\begin{aligned} \aleph_0 &= |\mathbb{N}| = \omega, \\ \aleph_{\beta+1} &= \aleph_\beta^+, \\ \aleph_\lambda &= \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-31}$$

*Κάθε $\aleph_\alpha$ είναι πληθάριθμος του von Neumann,*

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\alpha <_c \aleph_\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathrm{ON}),$$

*και κάθε von Neumann πληθάριθμος είναι $\aleph_\alpha$ για κάποιο $\alpha$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για να δείξουμε ότι η $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ είναι γνησίως αύξουσα σε πληθικότητα, σταθεροποιούμε το $\alpha$ και (προς άτοπο) επιλέγουμε το ελάχιστο $\beta$ έτσι ώστε $\alpha < \beta$ και $\aleph_\alpha =_c \aleph_\beta$: τώρα $\beta \neq \alpha + 1$, μιας και $\aleph_\alpha <_c \aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$· $\beta = \gamma + 1$ για κάποιο $\gamma > \alpha$ άρα $\aleph_\alpha <_c \aleph_\gamma <_c \aleph_\beta$ (από την επιλογή του $\beta$), που είναι άτοπο· και αν το $\beta$ είναι οριακό, τότε $\alpha + 1 < \beta$, και έτσι $\aleph_\alpha <_c \aleph_{\alpha+1} <_c \aleph_\beta$, που είναι και πάλι άτοπο.

Έπεται ότι κάθε $\aleph_\alpha$ είναι πληθάριθμος von Neumann: αυτό είναι άμεσο για το 0 και τους επόμενους διατακτικούς· όσον αφορά το όριο $\lambda$, αν το $\aleph_\lambda$ δεν είναι πληθάριθμος, τότε $\aleph_\lambda \leq_c \aleph_\beta$ για κάποιο $\beta < \lambda$, που αντιτίθεται στο $\aleph_\beta <_c \aleph_\lambda$.

Τέλος, για να δείξουμε ότι κάθε πληθάριθμος von Neumann είναι κάποιο $\aleph_\alpha$, έστω (προς άτοπο) $\kappa$ το ελάχιστο αντιπαράδειγμα. Αμέσως από τον ορισμό, $\kappa \neq \omega$ και $\kappa \neq_c \lambda^+$ για οποιοδήποτε διατακτικό $\lambda < \kappa$, μιας και από αυτό έπεται ότι $\kappa = |\lambda|^+$, το $|\lambda|$ είναι κάποιο άλεφ από την επιλογή του $\kappa$, και έτσι το $\kappa$ είναι επίσης άλεφ. Έστω

$$\beta = \{\alpha \leq \kappa \mid \aleph_\alpha <_c \kappa\}.$$

Αυτό είναι διατακτικός, αφού είναι κλειστό για το $<$· είναι οριακός διατακτικός, επειδή $\aleph_\alpha < \kappa \Longrightarrow \aleph_{\alpha+1} < \kappa$· και από τον ορισμό του,

$$\alpha < \beta \Longrightarrow \aleph_\beta < \kappa.$$

Από την άλλη μεριά, αν ο $\lambda$ είναι πληθάριθμος και $\lambda < \kappa$, τότε $\lambda = \aleph_\alpha$ για κάποιο $\alpha < \beta$, από την επιλογή του $\kappa$, έτσι που τελικά

$$\kappa = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\} = \aleph_\beta. \qquad \dashv$$

Ο τελεστής $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$ προσφέρει ένα χρήσιμο συμβολισμό για την πληθική αριθμητική, ακόμη περισσότερο αν δεχτούμε το Αξίωμα Επιλογής.

**12.30. Άσκηση.** *Το Αξίωμα Επιλογής* **AC** *είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό ότι «κάθε άπειρος πληθάριθμος είναι άλεφ»,*

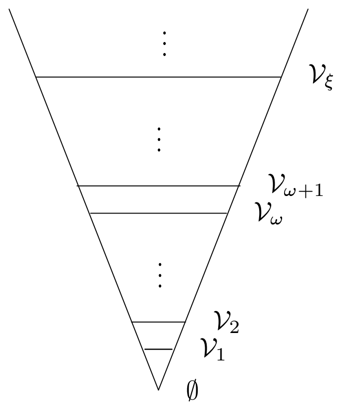
$$\mathbf{AC} \iff (\forall \text{ άπειρο } A)(\exists \alpha \in \mathrm{ON})[A =_c |A| = \aleph_\alpha].$$

**12.31. Άσκηση.** (**AC**) *Η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς είναι ισοδύναμη με την εξίσωση πληθικής αριθμητικής*

$$\mathbf{GCH} \iff 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad (\alpha \in \mathrm{ON}).$$

**12.32. Η Συσσωρευμένη Ιεραρχία των Αγνών, Εδραιωμένων Συνόλων** (Cumulative Hierarchy). Για κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha$ ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{V}_\alpha$ με την ακόλουθη αναδρομή στο ON:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 &= \emptyset, \\ \mathcal{V}_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha), \\ \mathcal{V}_\lambda &= \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{V}_\alpha, \quad \text{αν Limit}(\lambda). \end{aligned}$$




Διαγραμμα **12.3**. Λογαριθμική απόδοση των αγνών, εδραιωμένων συνόλων.

Ο **κόσμος του von Neumann** είναι η ένωση όλων των $\mathcal{V}_\alpha$,

$$\mathcal{V} =_{\text{ορ}} \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} \mathcal{V}_\alpha = \{x \mid \text{για κάποιο } \alpha \in \mathrm{ON}, x \in \mathcal{V}_\alpha\}, \tag{12-32}$$

και σε κάθε μέλος του $\mathcal{V}$ αντιστοιχίζουμε την **τάξη** του (rank) με τον τελεστή

$$\mathrm{Rank}(x) = (\mu\alpha \in \mathrm{ON})[x \in \mathcal{V}_{\alpha+1}] \quad (x \in \mathcal{V}). \tag{12-33}$$

Έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει το συμβολισμό $\mathcal{V}$ για την κλάση των αγνών εδραιωμένων συνόλων, επειδή ισχύει το εξής:

**12.33. Θεώρημα.** (1) *Κάθε $\mathcal{V}_\alpha$ είναι αγνό, μεταβατικό, εδραιωμένο σύνολο και*

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}_\beta.$$

(2) *Κάθε $\mathcal{V}_\lambda$ με οριακό $\lambda \geq \omega \cdot 2$ είναι κόσμος του Zermelo.*

(3) *Για κάθε αγνό $A$, $A \subseteq \mathcal{V} \Longrightarrow A \in \mathcal{V}$.*

(4) *Ο κόσμος $\mathcal{V}$ του von Neumann αποτελείται ακριβώς από τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα.*

Αποδειξη. Τα (1) και (2) αποδεικνύονται με τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για να δείξουμε τις ανάλογες ιδιότητες των βασικών κλειστοτήτων $M(I)$ για μεταβατικό $I$ στο Λήμμα **x9.6**, και δεν θα τα επαναλάβουμε.

(3) Έστω $A \subseteq \mathcal{V}$ και $\mathrm{Rank}[A] = \{\mathrm{Rank}(x) \mid x \in A\}$ η εικόνα του $A$ από τον τελεστή τάξης. Αυτό είναι σύνολο διατακτικών αριθμών, άρα υπάρχει διατακτικός αριθμός $\kappa$ γνήσια μεγαλύτερος απ' όλα τα μέλη του,

$$x \in A \Longrightarrow \mathrm{Rank}(x) < \kappa \Longrightarrow x \in \mathcal{V}_\kappa,$$

και (χρησιμοποιώντας την αγνότητα του $A$),

$$A = \{x \in \mathcal{V}_\kappa \mid x \in A\} \in \mathcal{V}_{\kappa+1}.$$

(4) Θα επικαλεστούμε το λεγόμενο «αντιθετοαντίστροφο» της συνεπαγωγής (3), την πρόταση δηλαδή ότι για κάθε αγνό $A$,

$$A \notin \mathcal{V} \Longrightarrow (\exists x \in A)[x \notin \mathcal{V}]. \tag{12-34}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι το $M$ είναι αγνό, μεταβατικό και εδραιωμένο σύνολο αλλά $M \notin \mathcal{V}$. Η μεταβατικότητα του $M$ και η (12-34) μας δίνουν την

$$(\forall x \in M \setminus \mathcal{V})(\exists y \in M \setminus \mathcal{V})[y \in x],$$

και το **DC** τώρα συνεπάγεται την ύπαρξη φθίνουσας $\in$-αλυσίδας, ενάντια στην υπόθεση ότι το $M$ είναι εδραιωμένο. Άρα κάθε αγνό, μεταβατικό, εδραιωμένο σύνολο ανήκει στον $\mathcal{V}$, επομένως, για κάθε αγνό, εδραιωμένο $A$, η μεταβατική κλειστότητα $\mathrm{TC}(A) \in \mathcal{V}$· και τελικά $A \in \mathcal{V}$, αφού $A \in \mathrm{TC}(A)$ και η $\mathcal{V}$ είναι μεταβατική. ⊣

Θυμίσου ότι από το Θεώρημα **11.34**, το $\mathcal{V}$ είναι **ZFDC**-κόσμος, και μάλιστα **ZFC**-κόσμος αν δεχτούμε το **AC**.

**12.34. Η διαισθητική έννοια του αγνού, εδραιωμένου συνόλου.** Σχολιάζοντας την Αρχή Θεμελίωσης στο **11.32**, ισχυριστήκαμε ότι ο ορισμός του ελάχιστου κόσμου $\mathcal{Z}$ του Zermelo και οι αποδείξεις των βασικών του ιδιοτήτων κατανοούνται άμεσα, απλά, όπως συνήθως καταλαβαίνουμε τα μαθηματικά, και προσφέρουν μια πειστική, διαισθητική περιορισμένη έννοια «συνόλου» που δικαιώνει τα αξιώματα της **ZDC+AC** και την Αρχή Θεμελίωσης. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η «κατασκευή» του κόσμου $\mathcal{V}$ του von Neumann στο **12.32** και στο Θεώρημα **12.33** κατανοείται άμεσα και απλά, ξέχωρα από τις λεπτομέρειες οποιασδήποτε συγκεκριμένης αξιωματοποίησης, και ότι προτείνει μια φυσική, διαισθητική έννοια «αγνού, εδραιωμένου συνόλου» που δικαιώνει τα αξιώματα της **ZFC**. Τα επιχειρήματα αυτά αξίζουν μια πιο προσεκτική εξέταση.

Η κατασκευή του $\mathcal{Z}$ ξεκινά με το άπειρο σύνολο

$$\mathbb{N}_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \dots\}$$

και επαναλαμβάνει τον τελεστή δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ άπειρα πολλές φορές. Εφόσον το «άπειρο» των επαναλήψεων δεν είναι ούτε περισσότερο ούτε λιγότερο από το «άπειρο» που περιέχεται στο αρχικό σύνολο $\mathbb{N}_0$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι *για να συλλάβουμε το $\mathcal{Z}$ πρέπει να συλλάβουμε δύο άπειρα πράγματα: το σύνολο* $\mathbb{N}_0$ (βασικά τους φυσικούς αριθμούς) *και τον τελεστή του δυναμοσυνόλου.*

Η κατασκευή του $\mathcal{V}$ αρχίζει με το τίποτα, το κενό, αλλά επαναλαμβάνει τον τελεστή του δυναμοσυνόλου $\mathcal{P}(A)$ σε όλους τους διατακτικούς αριθμούς. Με την ίδια ανάλυση, μπορούμε να πούμε ότι *για να συλλάβουμε το $\mathcal{V}$ πρέπει να συλλάβουμε την κλάση των διατακτικών αριθμών* ON *και τον τελεστή δυναμοσυνόλου.* Μπορούμε βέβαια να επιχειρήσουμε περαιτέρω «εύγλωττη» ανάλυση της έννοιας του «διατακτικού αριθμού» και να προσπαθήσουμε να τη «δικαιώσουμε», όπως μπορούμε επίσης να προσπαθήσουμε να δικαιώσουμε τις έννοιες των φυσικών και του δυναμοσυνόλου. Θα πρέπει να είναι καταφανές όμως ότι οι διατακτικοί αριθμοί αποτελούν μια διαφορετική, νέα πρώτη ύλη που είναι απαραίτητη για τη διαισθητική κατανόηση του $\mathcal{V}$, και που δεν μπορεί να αναχθεί στο $\mathbb{N}_0$ και τα δυναμοσύνολα. Απ' αυτή τη σκοπιά, η δικαίωση των αξιωμάτων της **ZFC** που προσφέρει αυτή η διαισθητική κατασκευή είναι σημαντικά ασθενέστερη της δικαίωσης της **ZDC**+**AC** από το $\mathcal{Z}$.

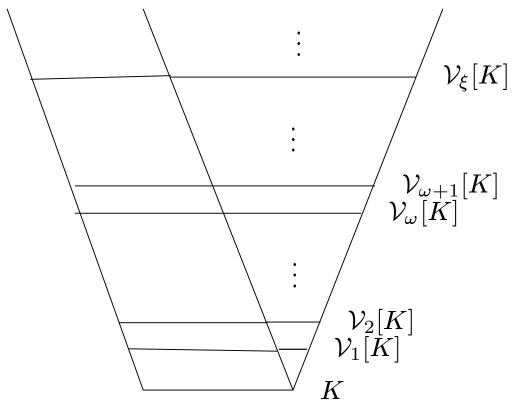
Στο Παράρτημα **B** θα εισαγάγουμε εναλλακτικούς κόσμους συνόλων, και σε πιο προχωρημένα βιβλία μπορεί κανείς να βρει μια πληθώρα από γοητευτικά πρότυπα της συνολοθεωρίας, κατασκευασμένα (κυρίως) με παραλλαγές και επεκτάσεις των μεθόδων κατασκευασιμότητας του Gödel και αναγκασμού του Cohen. Ένας από τους λόγους που εργαστήκαμε εδώ με τα σχετικά ασθενή αξιωματικά συστήματα **ZDC** και **ZFDC**, είναι για να βεβαιώσουμε ότι τα στοιχειώδη αποτελέσματα του κλάδου που καλύψαμε έχουν άμεση εφαρμογή σε όλα (σχεδόν) αυτά τα πρότυπα. Όμως όλα αυτά τα πρότυπα κατασκευάζονται με βάση κάποιο «δοσμένο» πρότυπο της **ZFC**, και δεν φαίνεται εφικτή η δημιουργία ξεχωριστών, διαισθητικών εννοιών του **τι είναι σύνολο** που να δικαιώνουν άμεσα τα αξιώματα τα οποία ικανοποιούν.

Φαίνεται ότι (τουλάχιστον μέχρι τώρα), η διαισθητική έννοια του **αγνού, εδραιωμένου συνόλου** που γεννιέται από τη μαθηματική ανάλυση των **12.32** και **12.33**, είναι οπωσδήποτε η πλέον φυσική εναλλακτική έννοια που έχουμε για την απεριόριστη (και αντιφατική) «συμπερίληψη σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων αντικειμένων» του Cantor.

**12.35. Σχετικά με άτομα και εφαρμογές.** Στο **3.25** υποστηρίξαμε (μαζί με το Zermelo) ότι είναι χρήσιμο να επιτρέψουμε άτομα στην αξιωματική συνολοθεωρία, έτσι που τα θεωρήματά μας να εφαρμόζονται κατευθείαν σε σύνολα από πλανήτες ή βατράχια, καθώς επίσης και στα αγνά, εδραιωμένα σύνολα που φτιάχνουμε από το τίποτα. Μπορεί η γενικά αποδεκτή, καθιερωμένη θεωρία **ZFC** που απαγορεύει την ύπαρξη ατόμων να δικαιολογίσει τις εφαρμογές της συνολοθεωρίας; Υπάρχουν δύο αξιόλογες απαντήσεις σε αυτό το ερώτημα.

Πρώτον, μπορούμε να *μοντελοποιήσουμε* τα φυσικά αντικείμενα και τις σχέσεις ανάμεσα τους με *δομές* από αγνά σύνολα, όπως μοντελοποιούμε (μέχρι ισομορφισμούς) τα διατεταγμένα ζεύγη, τις συναρτήσεις, τους φυσικούς αριθμούς, κ.λπ. Για παράδειγμα, για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος ουρανίων σωμάτων $P_1, \dots, P_k$ που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με τη βαρύτητα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε καθένα από αυτά με μια συνάρτηση $\overline{P}_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^7$, που αναθέτει σε κάθε πραγματικό αριθμό $t \in \mathbb{R}$ τη μάζα, τη θέση και την ταχύτητα του $P_i$, με κάποιο σταθερό σύστημα αναφοράς, αξώνων και μονάδων. Οι νόμοι της κίνησης θα καθορίσουν τις συναρτήσεις αυτές· και τον φυσικό δεν τον ενδιαφέρει αν τα συνολοθεωρητικά αντικείμενα που μοντελοποιούν τις συναρτήσεις $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_k$ είναι αγνά ή όχι—αυτό που τον νοιάζει είναι οι μεταξύ τους σχέσεις, που μπορούν τότε να ερμηνευτούν σαν σχέσεις ανάμεσα σε πλανήτες τις οποίες είναι σε θέση να ελέγξει με παρατηρήσεις και πειράματα.

Δεύτερον, αν μας ενδιαφέρει να μπορούμε να μιλάμε για πλανήτες κατευθείαν μέσα στη συνολοθεωρία, μπορούμε να επιτρέψουμε μια κλάση ατόμων $K$ και




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **12.4**. Απόδοση των εδραιωμένων συνόλων στο $K$.

να αντικαταστήσουμε το $\mathcal{V}$ με την κλάση $\mathcal{V}[K]$ των εδραιωμένων συνόλων που στηρίζονται από το $K$ όπως το ορίστηκε στο **11.38**. Αυτή η κλάση είναι **ZFDC**-κόσμος από το Πρόβλημα **x11.22**· ικανοποιεί το Αξίωμα Επιλογής· και, στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου το $K$ είναι σύνολο, μοιάζει πάρα πολύ με το $\mathcal{V}$ και έχει ουσιαστικά όλες τις ιδιότητές του, και μάλιστα με τις ίδιες αποδείξεις, βλ. **x12.32**. Μπορεί να κατασκευαστεί στη **ZFDC** με τη διατακτική αναδρομή

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_0[K] &= K,\\ \mathcal{V}_{\alpha+1}[K] &= \mathcal{P}(\mathcal{V}_\alpha[K]),\\ \mathcal{V}_\lambda[K] &= \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{V}_\alpha[K], \quad \text{αν Limit}(\lambda),\\ \mathcal{V}[K] &= \textstyle\bigcup_\alpha \mathcal{V}_\alpha[K].\end{aligned}$$

Το θέμα είναι ότι ο φυσικός δεν ενδιαφέρεται για τη διαφορά ανάμεσα στις δύο αυτές προσεγγίσεις, και πιθανότατα ούτε καν την αντιλαμβάνεται: γιατί το μόνο που έχει σημασία στη συγκεκριμένη εφαρμογή των μαθηματικών, είναι οι συναρτήσεις $\overline{P}_i$ που κωδικοποιούν τις ιδιότητες των πλανητών, όπως ακριβώς το μόνο που έχει σημασία για τους φυσικούς αριθμούς είναι ότι αποτελούν σύστημα Peano—το τι ακριβώς *είναι* δεν επηρεάζει τίποτα. Και έτσι, εν τέλει, είναι χρησιμότερο να «απαγορεύσουμε» τα άτομα και να δεχθούμε την απλούστερη **ZFC** σαν τη 'standard' αξιωματική συνολοθεωρία, που γίνεται σχεδόν χωρίς εξαίρεση σε προχωρημένο επίπεδο στη θεωρία συνόλων.

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο 12

**x12.1.** Δείξε το (1) του Θεωρήματος **12.15**.

**x12.2.** Δείξε το (2) του Θεωρήματος **12.15**.

**x12.3.** Δείξε το (3) του Θεωρήματος **12.15**.

* **x12.4. Χαρακτηρισμός των διατακτικών αριθμών του von Neumann.** Έστω οριστικός τελεστής $\phi(V)$ στους καλά διατεταγμένους χώρους που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

$$V =_o \phi(V),$$
$$U \leq_o V \Longrightarrow \phi(U) \sqsubseteq \phi(V),$$
$$\text{Field}(\phi(V)) = \{\text{Field}(\phi(U)) \mid U <_o V\}.$$

Δείξε ότι $\text{ord}(V) = \alpha \Longrightarrow \phi(V) = (\alpha, \leq_\alpha)$.

**x12.5.** Η κλάση ON δεν είναι σύνολο.

**x12.6.** Δικαιολόγησε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού στους διατακτικούς, του Θεωρήματος **12.19**.

**x12.7.** Για όλους τους διατακτικούς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,

$$0 + \alpha = \alpha, \text{ και } \omega \leq \alpha \Longrightarrow 1 + \alpha = \alpha,$$
$$0 < \beta \Longrightarrow \alpha < \alpha + \beta,$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \delta,$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

Δείξε επίσης ότι, γενικά,

$$\text{η } \alpha < \beta \text{ δεν συνεπάγεται την } \alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

**x12.8.** Έστω $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots$ μια αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών. Τότε το όριο $\lim_n \alpha_n$ είναι οριακός διατακτικός.

**x12.9.** Δώσε παραδείγματα ακολουθιών διατακτικών που να είναι αυστηρά αύξουσες και τέτοιες που

$$\lim_n(\alpha_n + \beta) \neq \lim_n \alpha_n + \beta,$$
$$\lim_n(\alpha_n + \beta_n) \neq \lim_n \alpha_n + \lim_n \beta_n.$$

**x12.10.** Για όλους τους διατακτικούς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,

$$0 \cdot \alpha = 0$$
$$0 < \alpha \,\&\, 1 < \beta \Longrightarrow \alpha < \alpha \cdot \beta$$
$$\alpha \leq \beta \,\&\, \gamma \leq \delta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \delta$$
$$0 < \alpha \leq \beta \,\&\, \gamma < \delta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta.$$

Δείξε ότι ακόμα κι αν $\gamma > 0$, γενικά,

$$\text{η } \alpha < \beta \text{ δεν συνεπάγεται την } \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

**x12.11** (Νόμοι απλοποίησης). Για όλους τους διατακτικούς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$,

$$\begin{aligned} \alpha+\beta<\alpha+\gamma &\Longrightarrow \beta<\gamma,\\ \alpha+\beta=\alpha+\gamma &\Longrightarrow \beta=\gamma,\\ \alpha\cdot\beta<\alpha\cdot\gamma &\Longrightarrow \beta<\gamma,\\ 0<\alpha\,\&\,\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma &\Longrightarrow \beta=\gamma. \end{aligned}$$

Δείξε επίσης ότι, γενικά,

$$\text{η } 0<\alpha\,\&\,\beta\cdot\alpha=\gamma\cdot\alpha \text{ δεν συνεπάγεται την } \beta=\gamma.$$

**x12.12.** Για όλα τα $\alpha\geq\omega$ και $n<\omega$,

$$\begin{aligned} &n+\alpha=\alpha,\\ &(\alpha+1)\cdot n=\alpha\cdot n+1 \quad (n>1),\\ &(\alpha+1)\cdot\omega=\alpha\cdot\omega. \end{aligned}$$

**x12.13.** Βρες τρεις διατακτικούς αριθμούς $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, με την ιδιότητα

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma\neq\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποίησε το προηγούμενο πρόβλημα.

**x12.14.** Αν $n<m$, τότε $\omega^n+\omega^m=\omega^m$.

**x12.15** (Αφαίρεση διατακτικών). Αν $\alpha\leq\gamma$, τότε υπάρχει μοναδικός διατακτικός $\beta$ τέτοιος που $\gamma=\alpha+\beta$.

**x12.16.** Κάθε διατακτικός αριθμός $\alpha<\omega^2$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$\alpha=\omega\cdot x+y \qquad (x,y<\omega).$$

***x12.17.** Για κάθε διατακτικό $\alpha<\omega^N$, υπάρχουν μοναδικά $n<N$, $x<\omega$, $\beta<\omega^n$ έτσι ώστε $\alpha=\omega^n\cdot x+\beta$. Υπόδειξη. Πάρε το μεγαλύτερο $n$ με $\omega^n\leq\alpha$, και το μεγαλύτερο $x$ με $\omega^n\cdot x\leq\alpha$.

**x12.18.** Αν $N>0$, κάθε $\alpha<\omega^N$ γράφεται μοναδικά στη μορφή

$$\alpha=\omega^{n_1}\cdot x_1+\omega^{n_2}\cdot x_2+\cdots+\omega^{n_s}\cdot x_s+x_{s+1}, \tag{12-35}$$

με $N>n_1>n_2>\cdots>n_s$ και $x_1,\ldots,x_{s+1}<\omega$. Υπόδειξη. Χρησιμοποίησε επαγωγή στο $N$ και το προηγούμενο πρόβλημα.

**12.36. Ορισμός** (Φυσιολογικοί τελεστές). Ο μονομελής, οριστικός τελεστής $F$ στους διατακτικούς είναι **φυσιολογικός** (normal), αν είναι αυστηρά αύξων,

$$\alpha<\beta\Longrightarrow F(\alpha)<F(\beta),$$

και συνεχής στους οριακούς διατακτικούς, δηλαδή

$$F(\lambda)=\sup\{F(\beta)\mid\beta<\lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda).$$

**x12.19.** Αν ο $F:\mathrm{ON}\to\mathrm{ON}$ είναι φυσιολογικός τελεστής, τότε για κάθε $\alpha$, $\alpha\leq F(\alpha)$, και για κάθε οριακό διατακτικό $\lambda$, το $F(\lambda)$ είναι οριακός διατακτικός.

**x12.20.** Για κάθε $\alpha$, οι τελεστές

$$S_\alpha(\beta) = \alpha + \beta, \quad P_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$$

του "προσθέτοντας στο" και "πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με το" $\alpha$ είναι φυσιολογικοί.

**x12.21.** Η σύνθεση $F(\alpha) = G(H(\alpha))$ φυσιολογικών τελεστών είναι φυσιολογικός τελεστής.

**x12.22.** Δώσε αυστηρό ορισμό της διατακτικής δύναμης (ordinal exponentation) $\alpha^\beta$ (για $\alpha > 1$), έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= 1, \\ \alpha^{S(\beta)} &= \alpha^\beta \cdot \alpha, \\ \alpha^\lambda &= \sup\{\alpha^\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned}$$

Δείξε τα ακόλουθα:

(1) Αν $\beta < \gamma$, τότε $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

(2) Για κάθε $\alpha > 1$, ο τελεστής $E_\alpha(\beta) = \alpha^\beta$ είναι φυσιολογικός.

(3) $\alpha^{(\beta+\gamma)} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$.

(4) $\left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

Υποδειξη. Οι Ασκήσεις **x12.20** και **x12.21** και το (2) απλοποιούν αρκετά τις αποδείξεις των (3) και (4).

***x12.23.** Αν $\alpha > 0$, τότε υπάρχει μέγιστο $\beta$ με $\omega^\beta \leq \alpha$, και για αυτό το $\beta$, $\alpha = \omega^\beta + \gamma$ με κάποιο $\gamma < \alpha$. Υποδειξη. Χρησιμοποίησε το Πρόβλημα **x12.15** για να βρεις το $\gamma$, και δείξε ότι $\gamma < \omega^{\beta+1}$, που αντιτίθεται στο $\gamma \geq \alpha$.

***x12.24.** (1) Αν $\beta < \gamma$, τότε $\omega^\beta + \omega^\gamma = \omega^\gamma$.

(2) Κάθε διατακτικός $\alpha > 0$ μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο στη μορφή $\alpha = \omega^\beta + \gamma$ με $\gamma < \alpha$.

***x12.25 (Η κανονική μορφή Cantor).** Κάθε διατακτικός $\alpha > 0$ μπορεί να γραφτεί μοναδικά σαν πεπερασμένο άθροισμα από φθίνουσες δυνάμεις του $\omega$, συμβολικά

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \cdots + \omega^{\beta_s} \quad (\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_s), \tag{12-36}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha = \omega^{\beta_1} \cdot n_1 + \omega^{\beta_2} \cdots n_2 + \cdot + \omega^{\beta_t} \cdot n_t$$
$$(\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_t, n_i < \omega, n_i \neq 0). \tag{12-37}$$

Υποδειξη. Για τη μοναδικότητα, δείξε πρώτα ότι

$$\text{αν } \beta \geq \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_s \text{ και } \gamma = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \cdots + \omega^{\beta_s},$$
$$\text{τότε } \gamma < \omega^\beta + \gamma,$$

με επαγωγή στο $s$.

Στην περίπτωση που το $\epsilon_0$ είναι το ελάχιστο σταθερό σημείο του φυσιολογικού τελεστή $(\alpha \mapsto \omega^\alpha)$, η κανονική μορφή Cantor του είναι η άχρηστη

$$\epsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}} = \cdots .$$

Όμως οι διατακτικοί που είναι μικρότεροι από τον $\varepsilon_0$ έχουν μη τετριμμένες κανονικές μορφές Cantor που δίνουν απλές και (μερικές φορές) χρήσιμες αναπαραστάσεις τους.

**x12.26.** Βρες τη κανονική μορφή Cantor του $\omega \cdot (\omega^\omega + 1) + (\omega^\omega + 1) \cdot \omega$.

* **x12.27.** Οι μόνοι διατακτικοί αριθμοί που ανήκουν στον ελάχιστο κόσμο του Zermelo $\mathcal{Z}$ είναι οι πεπερασμένοι.

**x12.28.** Αν $\eta \leq$ είναι άριστη διάταξη του $A$, τότε $|A| = \mathbf{v}_U[A]$, δηλαδή ο πληθάριθμος $|A|$ είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχίζεται στον καλά διατεταγμένο χώρο $(A, \leq)$ από τη von Neumann απεικόνισή του.

**x12.29.** Η κλάση $\mathrm{Card}_v$ των von Neumann πληθαρίθμων δεν είναι σύνολο.

**x12.30.** (**AC**) Ο οριστικός τελεστής $\beth_\alpha$ (το $\beth$ διαβάζεται «μπεθ») ορίζεται με την εξής αναδρομή στο ON:

$$\begin{aligned} \beth_0 &= \aleph_0 = |\mathbb{N}| = \omega, \\ \beth_{\beta+1} &= 2^{\beth_\beta}, \\ \beth_\lambda &= \sup\{\beth_\beta \mid \beta < \lambda\}, \text{ αν } \mathrm{Limit}(\lambda). \end{aligned} \tag{12-38}$$

Δείξε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha$,

$$|\mathcal{V}_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha.$$

**x12.31.** Για κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha$, $\mathrm{Rank}(\alpha) = \alpha$.

**x12.32.** Για κάθε σύνολο από άτομα $K$, η ιεραρχία $(\alpha \mapsto \mathcal{V}_\alpha[K])$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) Κάθε $\mathcal{V}_\alpha[K]$ είναι μεταβατικό και εδραιωμένο σύνολο, στηρίζεται από το $K$, και

$$\alpha \leq \beta \Longrightarrow \mathcal{V}_\alpha[K] \subseteq \mathcal{V}_\beta[K].$$

(2) Αν ο $\lambda$ είναι οριακός διατακτικός, $\lambda \geq \omega \cdot 2$, τότε το $\mathcal{V}_\lambda[K]$ είναι κόσμος του Zermelo.

(3) Για κάθε σύνολο $A$ που στηρίζεται από $K$, $A \subseteq \mathcal{V}[K] \Longrightarrow A \in \mathcal{V}[K]$.

(4) Ο κόσμος $\mathcal{V}[K]$ αποτελείται ακριβώς από τα εδραιωμένα σύνολα που στηρίζει το $K$.

**x12.33.** Για κάθε σύνολο ατόμων $K$ και κάθε διατακτικό αριθμό $\alpha$,

$$\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha[K] \cap \{x \mid \text{το } x \text{ είναι αγνό}\}.$$

* **x12.34.** Έστω $\pi : K \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow K$ μια μετάθεση κάποιου συνόλου ατόμων $K$. Δείξε ότι υπάρχει μοναδική επέκταση $\pi^* : \mathcal{V}[K] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{V}[K]$ της $\pi$, που να είναι **αυτομορφισμός** στο $\mathcal{V}[K]$, δηλαδή,

$$x \in y \iff \pi^*(x) \in \pi^*(y) \qquad (x, y \in \mathcal{V}[K]).$$

**12.37. Ορισμός** (Κλειστές μη φραγμένες κλάσεις)**.** Μια κλάση διατακτικών $M \subseteq$ ON είναι **μη φραγμένη** (unbounded) αν

$$(\forall \xi \in \mathrm{ON})(\exists \alpha \in \mathrm{ON})[\xi < \alpha \,\&\, \alpha \in M]\cdot$$

και **κλειστή** (closed) αν για κάθε σύνολο διατακτικών $A \neq \emptyset$,

$$A \subseteq M \Longrightarrow \sup A \in M.$$

**12.38. Άσκηση.** *Έστω $M$ μια κλειστή κλάση διατακτικών και*

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots \qquad (\alpha_n \in M)$$

*μια αυστηρά αύξουσα ακολουθία διατακτικών στη $M$. Δείξε ότι $\lim_n \alpha_n \in M$.*

* **x12.35.** Η τομή $M_1 \cap M_2$ δύο κλειστών και μη φραγμένων κλάσεων $M_1$ και $M_2$ είναι επίσης κλειστή και μη φραγμένη.

* **x12.36.** Κάθε φυσιολογικός τελεστής στους διατακτικούς έχει σταθερό σημείο, δηλαδή για κάποιο διατακτικό $\alpha$, $F(\alpha) = \alpha\cdot$ για την ακρίβεια, η κλάση

$$\mathrm{fp}(M) = \{\alpha \in \mathrm{ON} \mid F(\alpha) = \alpha\}$$

των σταθερών σημείων του $F$ είναι κλειστή και μη φραγμένη. Υπόδειξη. Για να βρεις ένα σταθερό σημείο, θέσε $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{n+1} = F(\alpha_n)$, και δείξε ότι $F(\lim_n \alpha_n) = \lim_n \alpha_n$.

**x12.37.** (1) Υπάρχει πληθάριθμος von Neumann $\kappa$, με

$$\kappa = \aleph_\kappa.$$

(2) (**AC**) Υπάρχει πληθάριθμος von Neumann $\lambda$, με

$$\lambda = \beth_\lambda.$$

**12.39. Ορισμός.** Υποθέτουμε ότι οι $\lambda \leq \kappa$ είναι άπειροι, οριακοί διατακτικοί αριθμοί. Μια συνάρτηση $f : \alpha \to \beta$ είναι **ομοτελική** (cofinal) αν

$$\sup\{f(\xi) \mid \xi < \alpha\} = \beta.$$

Για παράδειγμα, η ταυτοτική $(\xi \mapsto \xi)$ είναι ομοτελική συνάρτηση για κάθε οριακό διατακτικό αριθμό, αλλά και η $(n \mapsto \aleph_n)$ είναι ομοτελική, από τον $\omega$ στον $\aleph_\omega$.

Το επόμενο πρόβλημα μας δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό του τελεστή ομοτελικότητας (βλ. **9.23**), που σε πολλά βιβλία εισάγεται με αυτό τον τρόπο.

**x12.38.** Για κάθε πληθάριθμο von Neumann $\kappa$,

$$\mathrm{cf}(\kappa) = \min\{\alpha \mid \text{υπάρχει ομοτελική } f : \alpha \to \kappa\}.$$

**x12.39.** Δείξε ότι για όλους τους von Neumann πληθαρίθμους $\lambda \leq \kappa$, υπάρχει ομοτελική συνάρτηση $f : \lambda \to \kappa$ αν και μόνον αν $\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\kappa)$.

**x12.40.** Για κάθε κανονικό $\lambda$, $\mathrm{cf}(\aleph_\lambda) = \lambda$, και επομένως υπάρχουν πληθάριθμοι κάθε κανονικής ομοτελικότητας.

$^*$**x12.41.** Δείξε ότι υπάρχουν ιδιάζοντες, von Neumann πληθάριθμοι κάθε κανονικής ομοτελικότητας.

**x12.42.** Για κάθε von Neumann πληθάριθμο $\lambda$ με $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \aleph_1$, το σύνολο $\mathcal{V}_\lambda$ είναι κόσμος του Zermelo, που επιπλέον ικανοποιεί την εξής ειδική περίπτωση του Αξιώματος Αντικατάστασης: για κάθε μονομελή, οριστικό τελεστή $F$, αν $x \in \mathcal{V}_\lambda \Longrightarrow F(x) \in \mathcal{V}_\lambda$, τότε η εικόνα $F[A]$ κάθε απαριθμητού $A \in \mathcal{V}_\lambda$ επίσης ανήκει στο $\mathcal{V}_\lambda$.

**12.40. Ορισμός.** (**AC**) Ο αναπαρίθμητος πληθάριθμος $\kappa$ είναι **ισχυρά απρόσιτος** (strongly inaccessible) αν είναι κανονικός και

$$\lambda < \kappa \Longrightarrow 2^\lambda < \kappa.$$

$^*$**x12.43.** (**AC**) Αν ο $\kappa$ είναι ισχυρά απρόσιτος, τότε το $\mathcal{V}_\kappa$ είναι **ZFC**-κόσμος.

$^*$**x12.44.** (**AC**) Αν το αγνό και εδραιωμένο σύνολο $M$ είναι **ZFDC**-κόσμος, τότε $M = \mathcal{V}_\kappa$, για κάποιον ισχυρά απρόσιτο πληθάριθμο $\kappa$.

**12.41. Πληθάριθμοι κατά τον Frege**. Σύμφωνα με τον Cantor, τον οποίο έχουμε ακολουθήσει, η βασική ιδιότητα των πληθαρίθμων είναι ότι είναι σύνολα, και ότι για κάθε $A$,

$$A =_c |A|. \tag{12-39}$$

Υπάρχει και μια άλλη πρόσβαση στην έννοια του πληθαρίθμου, αυτή του Frege, με την οποία ο πληθάριθμος $|A|$ δεν είναι σύνολο «μονάδων» ισοπληθικό με το $A$, αλλά η αφηρημένη έννοια του «είναι ισοπληθικό με το $A$». Ο Frege, π.χ. θεωρεί τον αριθμό 1 ως την κοινή ιδιότητα όλων των μονοσυνόλων. Για να απεικονίσουμε στη συνολοθεωρία αυτή την έννοια, δεν είναι απαραίτητο να ορίσουμε τον $|A|$ έτσι που να είναι ισοπληθικός με το $A$, και μάλιστα δεν είναι καν απαραίτητο για τον $|A|$ να είναι σύνολο! Η μόνη σημαντική ιδιότητα πληθαρίθμων είναι η τελευταία,

$$A =_c B \iff |A| = |B|, \tag{12-40}$$

που (πρακτικά) απαιτεί να είναι ο τελεστής $|A|$ «προσδιοριστικός επιμορφισμός» της «συνθήκης ισοδυναμίας» $=_c$, και η κλάση των πληθαρίθμων να είναι το «πηλίκο» της $=_c$, με τη φυσική επέκταση της ορολογίας του **x4.5** σε συνθήκες. Ο Frege προσπάθησε να ορίσει αυστηρά αυτή την έννοια θέτοντας

$$|A| = \{X \mid X =_c A\}, \tag{12-41}$$

αλλά η κλάση $\{X \mid X =_c A\}$ δεν είναι σύνολο (αν $A \neq \emptyset$, εύκολα) και η (απαραίτητη για τη θεωρία) υπόθεση του Frege ότι είναι τον οδήγησε σε αντινομία.

Οι πληθάριθμοι του von Neumann έχουν και τις δύο βασικές ιδιότητες (12-39) και (12-40), και μ' αυτό τον τρόπο απεικονίζουν συγχρόνως τις διαισθήσεις του Cantor και του Frege, αλλά ο ορισμός τους στηρίζεται και στα δύο αξιώματα Επιλογής και Αντικατάστασης. Το Πρόβλημα **x12.46** υποδεικνύει μια εναλλακτική πρόσβαση στο θέμα, του Scott, που δίνει ικανοποιητικό ορισμό των *πληθαρίθμων κατά τον Frege* χωρίς επίκληση του Αξιώματος Επιλογής, αν και (ουσιαστικά) μόνο για τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα. Η κατασκευή του Scott είναι σημαντική, όχι τόσο επειδή «απαλλάσσει» την ιδέα του Frege από το **AC** (η πληθική αριθμητική χωρίς το Αξίωμα Επιλογής είναι πενιχρή), αλλά για την απλότητα και την κομψότητα της μεθόδου, που έχει πολλές εφαρμογές άσχετες με τους πληθαρίθμους. Εξηγούμε πρώτα τη γενική μέθοδο, και μετά την εφαρμογή της στους πληθαρίθμους Frege.

**12.42. Ορισμός.** **Συνθήκη ισοδυναμίας** (equivalence condition) σε μια κλάση $A$ είναι μια διμελής οριστική συνθήκη $\sim$ που έχει τις ιδιότητες σχέσης ισοδυναμίας, δηλαδή για όλα τα αντικείμενα $x, y, z \in A$

$$x \sim x,\ x \sim y \Longrightarrow y \sim x,\ x \sim y \,\&\, y \sim z \Longrightarrow x \sim z.$$

Ο μονομελής οριστικός τελεστής $F$ είναι **προσδιοριστικός για την** $\sim$, αν

$$x \sim y \iff F(x) = F(y) \quad (x, y \in A)\cdot$$

η κλάση τιμών του $F$ για τιμές της μεταβλητής του στην $A$ είναι η **κλάση πηλίκου** (το πηλίκο) της $A$ από τη συνθήκη $\sim$, που προσδιορίζεται από τον $F$

$$F[A] =_{\text{ορ}} \{F(x) \mid x \in A\}.$$

Π.χ. η συνθήκη ομοιότητας $=_o$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση των καλά διατεταγμένων χώρων, και ο τελεστής του von Neumann $\mathrm{ord}(U)$ είναι προσδιοριστικός γι' αυτήν, με πηλίκο την κλάση ON των διατακτικών αριθμών. Η ισοπληθικότητα $=_c$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση των καλά διατάξιμων συνόλων, και ο τελεστής του von Neumann $|A|$ είναι προσδιοριστικός γι' αυτήν, με πηλίκο την κλάση των von Neumann πληθαρίθμων.

Η πρόθεσή μας είναι να μελετήσουμε μια συνθήκη ισοδυναμίας $\sim$ στην κλάση $A$, σαν να ήταν η $A$ σύνολο και η $\sim\, \subseteq A \times A$ σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό. Δεν υπάρχει όμως εύκολος τρόπος να ορίσουμε προσδιοριστικό τελεστή για την $\sim$, επειδή η κλασική κατασκευή των κλάσεων ισοδυναμίας του **4.12** πράγματι οδηγεί σε «κλάσεις» σ' αυτή τη γενίκευση, κλάσεις που δεν είναι σύνολα: αυτό ακριβώς είναι το πρόβλημα με τον ορισμό του Frege για τον αριθμό 1 που παραθέσαμε πιο πάνω.

**x12.45.** (Scott) Έστω $\sim$ συνθήκη ισοδυναμίας σε μια κλάση $A$ αγνών, εδραιωμένων συνόλων, και για κάθε $x \in A$, έστω

$$\begin{aligned} \rho(x) &=_{\text{ορ}} (\mu\alpha \in \mathrm{ON})(\exists y \in \mathcal{V}_\alpha)[y \sim x], \\ F(x) &=_{\text{ορ}} \{y \in \mathcal{V}_{\rho(x)} \mid y \sim x\}. \end{aligned}$$

Δείξε ότι ο $F$ είναι προσδιοριστικός τελεστής για την $\sim$ στο $A$.

**x12.46.** (Scott) Δώσε ορισμό του **πληθαρίθμου Scott** $|A|_s$ για κάθε σύνολο $A$ που είναι ισοπληθικό με κάποιο αγνό, εδραιωμένο σύνολο, έτσι που για όλα τα σύνολα $A$ kai $B$ με αυτήν την ιδιότητα,

$$A =_c B \iff |A|_s = |B|_s.$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

# ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Σ' αυτό το παράρτημα θα δείξουμε ότι οι ρητοί και οι πραγματικοί αριθμοί μπορούν να απεικονιστούν πιστά στη συνολοθεωρία όπως και οι φυσικοί αριθμοί: δηλαδή θα διατυπώσουμε χαρακτηριστικές, συνολοθεωρητικές ιδιότητες αυτών των συστημάτων και θα αποδείξουμε από τα αξιώματα της **ZDC** την ύπαρξη και τη μοναδικότητα (μέχρι ισομορφισμού) δομημένων συνόλων με αυτές τις ιδιότητες. Οι αποδείξεις είναι σχετικά απλές όσον αφορά τη συνολοθεωρία, αλλά χρησιμοποιούν ιδέες από την άλγεβρα και την ανάλυση που θα τις εξηγήσουμε κάπως περιληπτικά.

Βασικό εργαλείο για τις αποδείξεις που θα δώσουμε είναι η κατασκευή του πηλίκου ενός συνόλου $A$ από μια σχέση ισοδυναμίας στο $A$ που περιγράψαμε στο Πρόβλημα **x4.5**. Με την ορολογία αυτού του προβλήματος, **προσδιορισμός** της $\sim$ στο $A$ είναι ένας επιμορφισμός

$$\pi : A \twoheadrightarrow B,$$

τέτοιος ώστε για όλα τα $x, y \in A$,

$$x \ \sim \ y \iff \pi(x) = \pi(y).$$

Όταν αυτό ισχύει, καλούμε το $B$ **πηλίκο του** $A$ από την $\sim$. Ο *κανονικός επιμορφισμός* (canonical surjection) της $\sim$ είναι η απεικόνιση

$$x \mapsto [x/{\sim}], \quad (x \in A)$$

με πηλίκο το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $[\![A/{\sim}]\!]$, αλλά συχνά υπάρχουν άλλα πηλίκα, πιο χρήσιμα για την κατανόηση του θέματος που μελετάμε, π.χ. αυτά στα Προβλήματα **x4.6**, **x4.7**, **x4.8**. Οι προσδιορισμοί είναι ειδικά χρήσιμοι στη μελέτη σχέσεων ομοιότητας.

**Α.1. Ορισμός.** Έστω σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο σύνολο $A$ και διμελής συνάρτηση

$$f : A \times A \to A$$

---

Αυτό το Παράρτημα μπορεί να διαβαστεί αμέσως μετά το Κεφάλαιο **10**, αλλά το υπόλοιπο αυτών των Σημειώσεων δεν αναφέρεται σ' αυτό. Η κατανόησή του απαιτεί κάποια θεωρητική γνώση του Λογισμού.

στο $A$. Καλούμε την $\sim$ **σχέση ομοιότητας** (congruence) για την $f$, αν για όλα τα $x, x', y, y' \in A$,

$$x \sim x' \;\&\; y \sim y' \Longrightarrow f(x,y) \sim f(x',y').$$

Με τον ίδιο τρόπο, η $\sim$ είναι **σχέση ομοιότητας** για μια διμελή σχέση $P \subseteq A \times A$, αν για όλα τα $x, x', y, y'$,

$$x \sim x' \;\&\; y \sim y' \Longrightarrow [xPy \iff x'Py].$$

Είναι προφανές πώς γενικεύεται η έννοια σε σχέσεις ομοιότητας για συναρτήσεις και σχέσεις οσονδήποτε μεταβλητών.

Η κατασκευή στο επόμενο θεώρημα είναι από τις πλέον βασικές της άλγεβρας.

**A.2. Θεώρημα.** *Έστω προσδιορισμός $\pi : A \twoheadrightarrow B$ της σχέσης ισοδυναμίας $\sim$, έτσι που για όλα τα $x, y$ στο $A$, $x \sim y \iff \pi(x) = \pi(y)$.*

*(1) Αν η $\sim$ είναι σχέση ομοιότητας για μια συνάρτηση $f : A \times A \to A$, τότε υπάρχει ακριβώς μία συνάρτηση $f^\pi : B \times B \to B$ στο πηλίκο $B$ που ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$f^\pi(\pi(x), \pi(y)) = \pi(f(x,y)), \quad (x, y \in A).$$

*(2) Αν η $\sim$ είναι σχέση ομοιότητας για μια σχέση $P \subseteq A \times A$, τότε υπάρχει ακριβώς μία σχέση $P^\pi \subseteq B \times B$ στο πηλίκο $B$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$\pi(x) P^\pi \pi(y) \iff xPy, \quad (x, y \in A).$$

Απόδειξη. . Το πολύ μία συνάρτηση ικανοποιεί την **A.2**, προφανώς από τη μορφή της, έτσι ώστε αρκεί να κατασκευάσουμε μία λύση. Θέτουμε

$$f^\pi =_{\text{ορ}} \{((\pi(x), \pi(y)), \pi(z)) \mid x, y, z \in A \;\&\; f(x,y) = z\}.$$

Για να δείξουμε ότι το σύνολο ζευγών $f^\pi$ είναι συνάρτηση, πρέπει να επαληθεύσουμε την

$$((u,v),w), ((u,v),w') \in f^\pi \Longrightarrow w = w'.$$

Από την υπόθεση της **A.2** και τον ορισμό της $f^\pi$, υπάρχουν $x, y, z \in A$ τέτοια ώστε

$$u = \pi(x), v = \pi(y), w = \pi(z), f(x,y) = z$$

και επίσης $x', y', z' \in A$, τέτοια ώστε

$$u = \pi(x'), v = \pi(y'), w' = \pi(z'), f(x',y') = z'.$$

Προκύπτει ότι

$$\pi(x) = \pi(x'), \pi(y) = \pi(y'), \pi(f(x,y)) = \pi(f(x',y'))$$

αφού η $\sim$ προσδιορίζεται από την $\pi$ και είναι σχέση ομοιότητας για την $f$, και η τελευταία απ' αυτές τις εξισώσεις μας δίνει την $w = w'$ που θέλουμε.

Η χαρακτηριστική ιδιότητα **A.2** της $f^\pi$ ακολουθεί αμέσως από τον ορισμό της και η απόδειξη του μέρους (2) είναι παρόμοια. $\dashv$

**A.3. Άσκηση.** *Δείξτε το μέρος* (2) *του* **A.2**.

Οι αξιωματικοί χαρακτηρισμοί των ρητών και των πραγματικών αριθμών στηρίζονται στη έννοια του *διατεταγμένου σώματος*, που κωδικοποιεί τις βασικές ιδιότητες της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της διάταξης σ' αυτά τα αριθμητικά συστήματα.

**Α.4. Ορισμός. Σώμα** (field) είναι ένα δομημένο σύνολο

$$(F, 0, 1, +, \cdot)$$

με τις εξής ιδιότητες.

(F1) $0, 1 \in F$, $0 \neq 1$, και οι $+$, $\cdot$ είναι διμελείς συναρτήσεις (πράξεις) στο $F$.

(F2) Η πρόσθεση $+$ ικανοποιεί τις ταυτότητες

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
2. $x + y = y + x$,
3. $x + 0 = x$,

και επιπλέον, για κάθε $x$ υπάρχει κάποιο $x'$ τέτοιο ώστε $x + x' = 0$.

(F3) Ο πολλαπλασιασμός $\cdot$ ικανοποιεί τις ταυτότητες

1. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
2. $x \cdot y = y \cdot x$,
3. $x \cdot 1 = x$,

και επιπλέον, για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει κάποιο $x''$ τέτοιο ώστε $x \cdot x'' = 1$.

(F4) Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μαζί ικανοποιούν την ταυτότητα

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

**Α.5. Λήμμα.** *Κάθε σώμα $F$ ικανοποιεί τα εξής.*

(1) *Για κάθε $x$ υπάρχει ακριβώς ένα $x'$ τέτοιο ώστε $x+x' = 0$, και το καλούμε $-x$. Επίσης, για κάθε $x \neq 0$ υπάρχει ακριβώς ένα $x''$ τέτοιο ώστε $x \cdot x'' = 1$ και το καλούμε $x^{-1}$.*

(2) $x \cdot 0 = 0$.

(3) $x \cdot y = 0 \Longrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

(4) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$.

Αποδειξη. . (1) Αν $x + x' = 0$ και $x + y = 0$, τότε από τα αξιώματα,

$$\begin{aligned} y = y + 0 = 0 + y &= (x + x') + y = x + (x' + y) \\ &= x + (y + x') = (x + y) + x' \\ &= 0 + x' = x' + 0 = x'. \end{aligned}$$

Η απόδειξη για το $x^{-1}$ είναι παρόμοια.

(2) $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, και επομένως

$$\begin{aligned} 0 = x \cdot 0 + -(x \cdot 0) &= (x \cdot 0 + x \cdot 0) + -(x \cdot 0) \\ &= x \cdot 0 + ((x \cdot 0) + -(x \cdot 0)) = x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0. \end{aligned}$$

(3) Αν $y \neq 0$, τότε υπάρχει $y^{-1}$ τέτοιο ώστε $y \cdot y^{-1} = 1$, και επομένως

$$x = x \cdot 1 = x \cdot (y \cdot y^{-1}) = (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0 \cdot y^{-1} = y^{-1} \cdot 0 = 0.$$

(4) $x \cdot y + (-x) \cdot y = y \cdot x + y \cdot (-x) = y \cdot (x + (-x)) = y \cdot 0 = 0$, και από το (1) συνάγεται ότι $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. ⊣

Αυτή την απόδειξη τη δώσαμε για παράδειγμα, τελείως αναλυτικά, στηρίζοντας το κάθε βήμα σε ένα από τα αξιώματα του σώματος. Στο μέλλον θα δίνουμε αποδείξεις απλών ταυτοτήτων σ' ένα σώμα πολύ συνοπτικά ή (πιο συχνά) θα χρησιμοποιούμε ταυτότητες που προφανώς ισχύουν σ' όλα τα σώματα χωρίς απόδειξη ή ιδιαίτερη μνεία.

**A.6. Άσκηση.** *Κάθε σώμα $F$ ικανοποιεί την ταυτότητα*

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

*όπου* $2 = 1 + 1$. (Δώστε λεπτομερή απόδειξη.)

**A.7. Άσκηση.** *Το δισύνολο $\{0,1\}$ των δύο πρώτων φυσικών αριθμών είναι σώμα, με τις προφανείς πράξεις, και σ' αυτό το σώμα $1+1=0$.* (Άρα τα αξιώματα του σώματος δεν συνεπάγονται ότι $1+1 \neq 0$ και συνεπώς πρέπει να είμαστε προσεχτικοί!)

**A.8. Ορισμός. Διατεταγμένο σώμα** (ordered field) είναι ένα δομημένο σύνολο

$$(F, 0, 1, +, \cdot, \leq)$$

όπου το $(F, 0, 1, +, \cdot)$ είναι σώμα, η διμελής σχέση $\leq$ είναι γραμμική διάταξη του $F$ και οι εξής συνθήκες ισχύουν για όλα τα $x, y, z \in F$:

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z$$
$$z > 0 \;\&\; x \leq y \implies z \cdot x \leq z \cdot y,$$

όπου βέβαια $z > 0$ είναι συντόμευση του $0 \leq z \;\&\; z \neq 0$.

**A.9. Άσκηση.** *Σε κάθε διατεταγμένο σώμα,*

$$z > 0 \;\&\; x < y \Longrightarrow z \cdot x < z \cdot y.$$

**A.10. Λήμμα.** *Κάθε στοιχείο $x$ διατεταγμένου σώματος $F$ ικανοποιεί την ανισότητα $x \cdot x = x^2 \geq 0$, άρα $0 < 1$ και για κάθε $x$, $x > 0 \Longrightarrow x + 1 > 0$.*

Απόδειξη. . Αν $x = 0$, τότε $x^2 = 0 \geq 0$, και αν $x > 0$, τότε $x \cdot x \geq x \cdot 0 = 0$, έτσι ώστε η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $x < 0$. Προσθέτοντας το $-x$ και στα δύο μέλη αυτής της ανισότητας έχουμε $0 < -x$, έτσι που μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε την $x < 0$ με το $-x$ και έχουμε $(-x) \cdot x < (-x) \cdot 0$, δηλαδή $-(x^2) < 0$ από το προηγούμενο Λήμμα, και προσθέτοντας $x^2$ σ' αυτή την ανισότητα έχουμε $0 < x^2$. Το συμπέρασμα $0 < 1$ ακολουθεί επειδή $0 \neq 1$ και $1 = 1^2$, και η τελευταία πρόταση ισχύει επειδή $0 < x \Longrightarrow 1 < x + 1$ και επομένως $0 < x + 1$ από τη μεταβατικότητα της $\leq$. ⊣

Το Λήμμα διευκρινίζει ότι στα διατεταγμένα σώματα δεν θα βρούμε την ανωμαλία $1 + 1 = 0$ της Άσκησης **A.7**. Πράγματι αληθεύει κάτι ισχυρότερο.

**A.11. Λήμμα.** *Αν το $F$ είναι διατεταγμένο σώμα και*

$$N_F = \bigcap \{X \subseteq F \mid 0 \in X \;\&\; (\forall x)[x \in X \Longrightarrow x + 1 \in X]\},$$

*τότε το δομημένο σύνολο $(N_F, 0, (x \mapsto x+1))$ είναι σύστημα φυσικών αριθμών.* Τα μέλη του $N_F$ είναι οι **φυσικοί αριθμοί του** $F$.

Αποδειξη. . Με $(x \mapsto x+1)$ εννοούμε βέβαια τη συνάρτηση $S$ που αντιστοιχίζει σε κάθε $x \in N_F$ το στοιχείο $x+1$ που κι αυτό ανήκει στο $N_F$ από τον ορισμό. Τα πρώτα τρία αξιώματα του Peano είναι προφανή και το τέταρτο $(x+1 \neq 0)$ ισχύει επειδή από τον ορισμό,

$$N_F \subseteq \{x \in F \mid 0 \leq x\}$$

και από το Λήμμα $x \geq 0 \Longrightarrow x+1 \geq 1 > 0$. Το Αξίωμα Επαγωγής προκύπτει αμέσως από τον ορισμό του $N_F$ ως τομή. ⊣

**A.12. Άσκηση.** *Έστω $F$ διατεταγμένο σώμα, $N = N_F$ το σύνολο των φυσικών αριθμών του $F$ και $+_N$, $\cdot_N$, $\leq_N$ η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός και η καλή διάταξη στο $N$ όπως τις ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Δείξτε ότι αυτές οι συναρτήσεις και η σχέση $\leq_N$ συμφωνούν με τα αντίστοιχα αντικείμενα του σώματος, π.χ.*

$$(\forall x, y \in N)[x +_N y = x + y].$$

Η βασική ιδέα για τον αξιωματικό χαρακτηρισμό των ρητών αριθμών είναι ότι αποτελούν διατεταγμένο σώμα και ότι κάθε κλάσμα είναι πηλίκο ακεραίων,

$$\frac{u-v}{m} = m^{-1} \cdot (u-v),$$

όπου οι $m, u, v$ είναι φυσικοί αριθμοί και $m \neq 0$. Η απλή αυτή παρατήρηση θα μας δώσει όχι μόνο τα αξιώματα για τους ρητούς αριθμούς, αλλά επίσης και τις αποδείξεις της μοναδικότητας και της ύπαρξής τους.

**A.13. Ορισμός. Σύστημα ρητών αριθμών** είναι ένα διατεταγμένο σώμα $F$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(\forall x)(\exists m, u, v \in N_F)[m \neq 0 \;\&\; x = m^{-1} \cdot (u-v)].$$

**A.14. Θεώρημα. Μοναδικότητα των ρητών αριθμών.** *Για δύο συστήματα ρητών αριθμών $F^1$, $F^2$ υπάρχει ακριβώς μία αντιστοιχία*

$$\pi : F^1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F^2$$

*που είναι ισομορφισμός, δηλαδή:*

1. $\pi(0^1) = 0^2$, $\pi(1^1) = 1^2$.
2. $\pi(x +^1 y) = \pi(x) +^2 \pi(y)$, $\pi(x \cdot^1 y) = \pi(x) \cdot^2 \pi(y)$.
3. $x \leq^1 y \iff \pi(x) \leq^2 \pi(y)$.

Στη διατύπωση του θεωρήματος διακοσμήσαμε τα διάφορα αντικείμενα των σωμάτων με τους εκθέτες 0 ή 1 για να ξεκαθαρίσουμε σε ποιο σώμα ανήκουν, π.χ. $+^1$ είναι η πρόσθεση στο $F^1$ και $0^2$ είναι το μηδέν του $F^2$. Αυτό είναι άβολο και όχι απαραίτητο, επειδή είναι πάντα προφανές ποιος εκθέτης χρειάζεται: π.χ. η εξίσωση $\pi(0) = 0$ δεν μπορεί να σημαίνει τίποτε άλλο από το $\pi(0^1) = 0^2$, αφού η $\pi$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $F^1$ και πεδίο τιμών το $F^2$. Στην απόδειξη και στη συνέχεια, θα ακολουθήσουμε την καθιερωμένη τακτική της άλγεβρας, όπου τα μηδενικά όλων των σωμάτων συμβολίζονται με

0, όλες οι προσθετικές πράξεις συμβολίζονται με + κ.λπ. Επίσης θα αρχίσουμε να παραλείπουμε συστηματικά το · του πολλαπλασιασμού,

$$xy =_{\text{op}} x \cdot y.$$

Αποδειξη. . Από τη μοναδικότητα των φυσικών αριθμών και το **A.11** ξέρουμε ότι υπάρχει ένας «κανονικός» ισομορφισμός

$$\rho : N^1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow N^2,$$

όπου $N^1$ και $N^2$ είναι τα σύνολα φυσικών των δύο σωμάτων $F^1$, $F^2$. Θέτουμε

$$\pi = \{(m^{-1}(u-v), \rho(m)^{-1}(\rho(u)-\rho(v))) \mid m, u, v \in N^1, m \neq 0\},$$

έτσι ώστε $\pi \subseteq (F^1 \times F^2)$, και αρκεί να αποδείξουμε πρώτα ότι η $\pi$ είναι συνάρτηση, μετά ότι είναι (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία, και τελικά ότι είναι ισομορφισμός, όπως αυτός ορίζεται στη διατύπωση του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε πρώτα ότι η $\pi$ είναι συνάρτηση, δεχόμαστε ότι

$$m_1^{-1}(u_1 - v_1) = m_2^{-1}(u_2 - v_2),$$

και πρέπει να δείξουμε ότι

$$\rho(m_1)^{-1}(\rho(u_1) - \rho(v_1)) = \rho(m_2)^{-1}(\rho(u_2) - \rho(v_2)).$$

Τα αξιώματα του σώματος συνεπάγονται εύκολα ότι οι **A.14**, **A.14** είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις

$$m_2u_1 + m_1v_2 = m_1u_2 + m_2v_1,$$
$$\rho(m_2)\rho(u_1) + \rho(m_1)\rho(v_2) = \rho(m_1)\rho(u_2) + \rho(m_2)\rho(v_1),$$

η πρώτη από αυτές μας δίνει αμέσως

$$\rho(m_2u_1 + m_1v_2) = \rho(m_1u_2 + m_2v_1),$$

και αυτή με τη σειρά της συνεπάγεται τη δεύτερη επειδή η $\rho$ είναι ισομορφισμός του $N^1$ με το $N^2$ και σέβεται την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό, Πρόβλημα **x5.4**.

Η κατάφανη ιδέα αυτής της απόδειξης δίνει εξίσου εύκολα τα επιπρόσθετα συμπεράσματα, ότι η $\pi$ είναι μονομορφισμός, μετά επιμορφισμός και επομένως ισομορφισμός. ⊣

**A.15. Άσκηση.** *Κατεργαστείτε τις λεπτομέρειες των αποδείξεων ότι*

$$\pi(x+y) = \pi(x) + \pi(y),$$
$$x \leq y \iff \pi(x) \leq \pi(y).$$

**A.16. Θεώρημα. Ύπαρξη των ρητών αριθμών.** *Υπάρχει ένα σύστημα ρητών αριθμών.*

Αποδειξη. . Αν έχουμε τους ρητούς αριθμούς, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο τριάδων φυσικών αριθμών

$$A = \{(m, u, v) \mid m, u, v \in N \ \&\ m \neq 0\}$$

και σ' αυτό τη σχέση

$$(m, u, v) \sim (m', u', v') \iff_{\text{ορ}} m'u + mv' = mu' + m'v,$$

από τα οποία συνάγεται (εύκολα) ότι

$$(m, u, v) \sim (m', u', v') \iff \frac{u - v}{m} = \frac{u' - v'}{m'}.$$

Συνεπώς η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A$ που προσδιορίζεται από τον επιμορφισμό

$$\pi : A \twoheadrightarrow Q, \quad \pi(m, u, v) = \frac{u - v}{m}.$$

Τους ρητούς αριθμούς δεν τους έχουμε ακόμη, αλλά έχουμε το $A$ και την $\sim$: η ιδέα της απόδειξης είναι να τους ορίσουμε ως πηλίκο του $A$ από την $\sim$, έτσι που να ισχύει η **A.16**. Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι

(1) *η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.* Για παράδειγμα, επαληθεύουμε ότι η $\sim$ είναι μεταβατική. Από τον ορισμό, αν

$$(m_1, u_1, v_1) \sim (m_2, u_2, v_2) \;\&\; (m_2, u_2, v_2) \sim (m_3, u_3, v_3),$$

τότε ισχύουν στους φυσικούς αριθμούς οι ισότητες

$$\begin{aligned} m_2u_1 + m_1v_2 &= m_1u_2 + m_2v_1 \\ m_3u_2 + m_2v_3 &= m_2u_3 + m_3v_2, \end{aligned}$$

και αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη απ' αυτές με το $m_3$ και τη δεύτερη με το $m_1$ και μετά τις προσθέσουμε, έχουμε την

$$\begin{aligned} &m_3m_2u_1 + m_3m_1v_2 + m_1m_3u_2 + m_1m_2v_3 \\ &\qquad = m_3m_1u_2 + m_3m_2v_1 + m_1m_2u_3 + m_1m_3v_2. \end{aligned}$$

Τώρα αφαιρούμε τα $m_3m_1v_2$ και $m_1m_3u_2$ από τις δύο πλευρές και μετά διαιρούμε με το $m_2$, που μας δίνει

$$m_3u_1 + m_1v_3 = m_1u_3 + m_3v_1,$$

δηλαδή $(m_1, u_1, v_1) \sim (m_3, u_3, v_3)$. Οι επαληθεύσεις των άλλων ιδιοτήτων σχέσης ισοδυναμίας είναι παρόμοιες.

(2) *Ορισμός των ρητών.* Αφού η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, υπάρχει επιμορφισμός

$$\pi : A \twoheadrightarrow Q$$

σε κάποιο σύνολο $Q$ που προσδιορίζει την $\sim$, δηλαδή:

$$(m_1, u_1, v_1) \sim (m_2, u_2, v_2) \iff \pi(m_1, u_1, v_1) = \pi(m_2, u_2, v_2).$$

Αυτό το $Q$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών στο σύστημα που κατασκευάζουμε, και απομένει μόνο να ορίσουμε τα 0 και 1, μια πρόσθεση, έναν πολλαπλασιασμό και μια διάταξη στο $Q$, και να αποδείξουμε ότι το όλο κατασκεύασμα ικανοποιεί τα αξιώματα συστήματος ρητών αριθμών. Για να βοηθήσουμε την κατανόηση της κατασκευής θα αρχίσουμε αμέσως να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\frac{u-v}{m} =_{\text{ορ}} \pi(m,u,v)$$

συμβατικά, χωρίς δηλαδή να ορίσουμε ξεχωριστά την «αφαίρεση» ή τη «διαίρεση».

Το μηδέν και το ένα ορίζονται με τους προφανείς τύπους

$$0 = \frac{0-0}{1} =_{\text{ορ}} \pi(1,0,0), \quad 1 = \frac{1-0}{1} =_{\text{ορ}} \pi(1,1,0).$$

(3) *Πρόσθεση ρητών αριθμών.* Με την απεικόνιση των ρητών αριθμών ως πηλίκα διαφοράς φυσικών με φυσικό αριθμό που χρησιμοποιούμε, ο κλασικός τύπος για την πρόσθεση παίρνει τη μορφή

$$\frac{u_1-v_1}{m_1} + \frac{u_2-v_2}{m_2} = \frac{(m_2u_1+m_1u_2)-(m_2v_1+m_1v_2)}{m_1m_2}.$$

Ορίζουμε λοιπόν πρώτα στο σύνολο $A$ τη διμελή συνάρτηση $f_+$ που αντιστοιχεί σ' αυτό τον τύπο,

$$f_+((m_1,u_1,v_1),(m_2,u_2,v_2)) = (m_1m_2,(m_2u_1+m_1u_2),(m_2v_1+m_1v_2)).$$

Με λίγη αριθμητική μπορούμε να αποδείξουμε ότι για όλα τα $x,y,x',y' \in A$,

$$x \sim x' \ \&\ y \sim y' \Longrightarrow f_+(x,y) \sim f_+(x',y'),$$

δηλαδή *η $\sim$ είναι σχέση ομοιότητας για την $f_+$*. Συνεπώς, από το **A.2**, υπάρχει (ακριβώς) μία συνάρτηση

$$+ : Q \times Q \to Q$$

που ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\pi(x)+\pi(y) = \pi(f_+(x,y)), \quad (\pi(x),\pi(y) \in Q).$$

Τα αξιώματα (F2) για την πρόσθεση χρειάζονται ακόμη λίγη αριθμητική, π.χ. η συνθήκη για το 0 επαληθεύεται με τον υπολογισμό

$$\pi(m,u,v)+\pi(1,0,0) = \pi(m\cdot 1, 1\cdot u + m\cdot 0, 1\cdot v + m\cdot 0) = \pi(m,u,v).$$

(4) *Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών.* Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε πρώτα τη συνάρτηση $f_\cdot : A \times A \to A$ που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό όταν απεικονίζουμε τους ρητούς αριθμούς με τριάδες φυσικών αριθμών,

$$f_\cdot((m_1,u_1,v_1),(m_2,u_2,v_2)) =_{\text{ορ}} (m_1m_2, u_1u_2+v_1v_2, u_1v_2+u_2v_1),$$

επαληθεύουμε μετά ότι η $\sim$ είναι σχέση ομοιότητας για την $f_\cdot$ και ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό $\cdot$ με το **A.2** έτσι ώστε να ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\pi(x)\cdot\pi(y) = \pi(f_\cdot(x,y)), \quad (\pi(x),\pi(y) \in Q).$$

Τα αξιώματα (F3) και (F4) ακολουθούν εύκολα.

(5) *Διάταξη ρητών αριθμών.* Η σημαντική ισοδυναμία γι' αυτή την περίπτωση είναι η

$$\frac{u_1-v_1}{m_1} \le \frac{u_2-v_2}{m_2} \iff m_1v_2+m_2u_1 \le m_2v_1+m_1u_2.$$

Ορίζουμε λοιπόν πρώτα τη σχέση $P \subseteq A \times A$ με τον τύπο

$$(m_1, u_1, v_1)\, P\, (m_2, u_2, v_2) \iff_{\text{ορ}} m_1 v_2 + m_2 u_1 \leq m_2 v_1 + m_1 u_2,$$

βεβαιώνουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ομοιότητας για την $P$, και από το **Α.2** ορίζουμε την $\leq$ στο πηλίκο $Q$ έτσι ώστε

$$\pi(x) \leq \pi(y) \iff x P y, \quad (\pi(x), \pi(y) \in Q).$$

Το πως η $\leq$ είναι γραμμική διάταξη και το

$$(Q, 0, 1, +, \cdot, \leq)$$

είναι διατεταγμένο σώμα ακολουθούν εύκολα.

Το μόνο που μένει είναι να επαληθεύσουμε ότι το $Q$ είναι σύστημα ρητών αριθμών.

**Λήμμα**. Για κάθε φυσικό αριθμό $k$, $\pi(1, k, 0) \in N_Q$, δηλαδή ο ρητός αριθμός $\pi(1, k, 0)$ ανήκει στους φυσικούς αριθμούς του διατεταγμένου σώματος $Q$.

**Απόδειξη**. Με επαγωγή στο $k$, $\pi(1, 0, 0) = 0$ (εξ ορισμού) και από τον ορισμό της ρητής πρόσθεσης (εύκολα),

$$\pi(1, Sk, 0) = \pi(1, k, 0) + 1,$$

έτσι ώστε $\pi(1, k, 0) \in N_Q \Longrightarrow \pi(1, Sk, 0) \in N_Q$.

**Λήμμα**. Για κάθε $(m, u, v) \in A$,

$$\pi(m, u, v) = \pi(1, m, 0)^{-1}(\pi(1, u, 0) - \pi(1, v, 0)),$$

όπου βέβαια οι πράξεις $^{-1}$ και $-$ είναι αυτές του σώματος $Q$.

**Απόδειξη**. Έχοντας ήδη αποδείξει ότι το $Q$ είναι σώμα, ξέρουμε ότι η **Α-0** είναι ισοδύναμη με την

$$\pi(1, m, 0)\pi(m, u, v) + \pi(1, v, 0) = \pi(1, u, 0),$$

και αυτή η τελευταία εξίσωση βεβαιώνεται με έναν ακόμη απλό υπολογισμό.

Τα δύο Λήμματα μαζί δείχνουν ότι το δομημένο σύνολο $(Q, 0, 1, +, \cdot, \leq)$ ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα συστήματος ρητών αριθμών και τελειώνουν την απόδειξη. $\dashv$

Όπως κάναμε και με τους φυσικούς αριθμούς, καθορίζουμε τώρα κάποιο συγκεκριμένο σύστημα ρητών αριθμών

$$(Q, 0, 1, +, \cdot, \leq)$$

τα μέλη του οποίου θα καλούμε απλά **ρητούς αριθμούς**. Αυτό βολεύει, για να μην είμαστε αναγκασμένοι να λέμε συνεχώς «τυχόν σύστημα ρητών αριθμών» και άλλα τέτοια. Προσέξτε όμως ότι το σημαντικό μαθηματικό γεγονός είναι η ύπαρξη και η μοναδικότητα μέχρις ισομορφισμού ενός τέτοιου συστήματος: ακριβώς αυτά τα μαθηματικά γεγονότα για τους φυσικούς αριθμούς χρειαστήκαμε στις αποδείξεις αυτού του κεφαλαίου, όχι τη συγκεκριμένη επιλογή «φυσικών αριθμών».

**Α.17. Άσκηση.** *Το σύνολο $Q$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμο.*

**A.18. Άσκηση.** *Στην απόδειξη του μέρους (1) του θεωρήματος «αφαιρέσαμε» τον ίδιο φυσικό από μιαν ισότητα, και μετά «διαιρέσαμε» μιαν ισότητα με τον ίδιο φυσικό. Δικαιολογήστε αυτά τα βήματα αποδείχνοντας τις εξής δύο ιδιότητες των φυσικών αριθμών:*

$$x + y = x + z \Longrightarrow y = z,$$
$$c \cdot x = c \cdot y \;\&\; c \neq 0 \Longrightarrow x = y.$$

**A.19. Άσκηση.** *Για κάθε διατεταγμένο σώμα $F$ υπάρχει ακριβώς μία* **εμφύτευση** *των ρητών αριθμών στο $F$, δηλαδή ένας μονομορφισμός*

$$\pi : Q \rightarrowtail F$$

*που ικανοποιεί τις ταυτότητες*

$$\pi(0) = 0,\ \pi(1) = 1,$$
$$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y),\ \pi(xy) = \pi(x)\pi(y),$$
$$x \leq y \iff \pi(x) \leq \pi(y).$$

*Απ' αυτά προκύπτει ότι η εικόνα $\pi[Q] \subseteq F$ της $\pi$ είναι σύστημα ρητών αριθμών (με το 0 και το 1 του $F$ και τους περιορισμούς των πράξεων και της διάταξης του $F$).*

Ο Cantor απέδειξε έναν ωραιότατο χαρακτηρισμό της διάταξης των ρητών αριθμών ανεξάρτητα από την αλγεβρική τους δομή. Χρειαζόμαστε μερικούς ορισμούς για τη διατύπωσή του.

**A.20. Ορισμός.** Έστω γραμμική διάταξη $\leq$ στο σύνολο $A$ και $B \subseteq A$. Το $B$ είναι **πυκνό στο** $A$ (dense) αν

$$(\forall x, y \in A)[x < y \Longrightarrow (\exists b \in B)[x < b \;\&\; b < y]].$$

Η γραμμική διάταξη $\leq$ του $A$ είναι **πυκνή στον εαυτό της** αν το $A$ είναι πυκνό στο $A$.

**A.21. Άσκηση.** *Η διάταξη κάθε διατεταγμένου σώματος είναι πυκνή στον εαυτό της και δεν έχει ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο.*

**A.22. Θεώρημα.** (Cantor) *Κάθε γραμμική, πυκνή στον εαυτό της διάταξη $\leq_A$ χωρίς ελάχιστο ή μέγιστο σημείο σε ένα αριθμήσιμο σύνολο $A$, είναι* **όμοια** *με τη διάταξη $\leq_Q$ των ρητών αριθμών, δηλαδή υπάρχει μονοτονική (ένα-προς-ένα) αντιστοιχία $f : Q \twoheadrightarrow A$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Από την υπόθεση και το γεγονός ότι το $Q$ είναι αριθμήσιμο, υπάρχουν απαριθμήσεις χωρίς επαναλήψεις

$$Q = \{r_0, r_1, \dots,\}, \quad A = \{a_0, a_1, \dots\}$$

του $Q$ και του $A$. Θα ορίσουμε αναδρομικά μιαν ακολουθία

$$f_0, f_1, \dots,$$

με τις εξής ιδιότητες, για κάθε $n \in N$.

1. Η $f_n$ είναι *πεπερασμένη, μερική συνάρτηση* από το $Q$ στο $A$, δηλαδή $Function(f_n)$ & $f_n \subseteq Q \times A$ και η $f_n$ είναι πεπερασμένη σαν σύνολο ζευγών.
2. Η $f_n$ είναι μονοτονική και ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή:
$$x, y \in Domain(f_n) \ \& \ x <_Q y \Longrightarrow f_n(x) <_A f_n(y).$$
3. $f_n \subseteq f_{n+1}$.
4. $\{r_0, r_1, \dots, r_n\} \subseteq Domain(f_n)$.
5. $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq Image(f_n)$.

Αν επιτύχουμε σ' αυτό, τότε η ένωση $f =_{\text{ορ}} \bigcup_{n=0}^{n=\infty} f_n$ είναι (εύκολα) συνάρτηση από το (3), είναι ένα-προς-ένα και μονοτονική από το (2) και
$$Domain(f) = Q, \quad Image(f) = A$$
από τα (4), (5).

Στη βάση του αναδρομικού ορισμού ξεκινάμε με την
$$p_0 = \{(r_0, a_0)\},$$
όπου όλες οι συνθήκες ισχύουν τετριμμένα.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε ήδη ορίσει την $f_n$ και απαριθμούμε το πεπερασμένο πεδίο ορισμού της και το επίσης πεπερασμένο πεδίο τιμών της σε αύξουσες ακολουθίες:
$$D_n = \{x_0 <_Q x_1 <_Q \cdots <_Q x_m\},$$
$$I_n = \{y_0 <_A y_1 <_A \cdots <_A y_m\}.$$
Επειδή η $f_n$ είναι μονοτονική, έχουμε
$$f_n(x_i) = y_i, \quad (i = 0, \dots, m).$$
Κατασκευάζουμε την επόμενη $f_{n+1}$ σε δύο βήματα, δηλαδή πρώτα θα ορίσουμε μία $f'_{n+1} \supseteq f_n$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (1)-(4) και μετά την $f_{n+1} \supseteq f'_{n+1}$ που ικανοποιεί όλες τις συνθήκες (1) - (5).

Βημα 1. Αν $r_{n+1} \in Domain(f_n)$, θέτουμε $f'_{n+1} = f_n$. Αλλιώς προκύπτουν τρεις περιπτώσεις.

Περιπτωση 1. $r_{n+1} <_Q x_0$. Σ' αυτή την περίπτωση βρίσκουμε κάποιο $y' \in A$ τέτοιο ώστε $y' <_A y_0$ (που υπάρχει επειδή το $A$ δεν έχει ελάχιστο σημείο) και θέτουμε
$$f'_{n+1} = f_n \cup \{(r_{n+1}, y')\}.$$

Περιπτωση 2. $r_{n+1} >_Q x_m$. Σ' αυτή την περίπτωση βρίσκουμε κάποιο $y' \in A$ τέτοιο ώστε $y' >_A y_m$ (που υπάρχει επειδή το $A$ δεν έχει μέγιστο σημείο) και θέτουμε
$$f'_{n+1} = f_n \cup \{(r_{n+1}, y')\}.$$

Περιπτωση 3. Για κάποιο $i$, $x_i <_Q r_{n+1} <_Q x_{i+1}$. Σ' αυτή την περίπτωση βρίσκουμε κάποιο $y' \in A$ τέτοιο ώστε $y_i <_A y' <_A y_{i+1}$ (που υπάρχει επειδή το $A$ είναι πυκνό στον εαυτό του) και θέτουμε
$$f'_{n+1} = f_n \cup \{(r_{n+1}, y')\}.$$

Σ' όλες τις περιπτώσεις, η απόδειξη ότι η $f'_{n+1}$ ικανοποιεί τις συνθήκες (1) - (4) είναι απλή.

Στο δεύτερο βήμα της κατασκευής θεωρούμε το στοιχείο $a_{n+1}$ του $A$ και ξεχωρίζουμε πάλι περιπτώσεις: πρώτα αν $a_{n+1} \in Image(f'_{n+1})$ (οπότε θέτουμε $f_{n+1} = f'_{n+1}$) και αν όχι τρεις περιπτώσεις, συμμετρικά με την κατασκευή στο πρώτο βήμα. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. ⊣

Η θεμελιακή διαίσθηση για τους πραγματικούς αριθμούς είναι ότι από τη μια μεριά αποτελούν διατεταγμένο σώμα, έτσι που η αριθμητική τους να υπακούει τους ίδιους νόμους με την αριθμητική των ρητών αριθμών, και από την άλλη βρίσκονται σε ένα-προς-ένα αντιστοιχία με τα σημεία της «πλήρους» γεωμετρικής ευθείας, έτσι που να μην υπάρχουν «κενά» ανάμεσά τους. Στη συνολοθεωρητική διατύπωση της πληρότητας ακολουθούμε τον Dedekind.

**A.23. Ορισμός.** Η γραμμική διάταξη $\leq$ στο σύνολο $A$ είναι **πλήρης** αν κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $A$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

**Σύστημα πραγματικών αριθμών** είναι ένα **πλήρες διατεταγμένο σώμα**, δηλαδή διατεταγμένο σώμα του οποίου η διάταξη είναι πλήρης.

**A.24. Άσκηση.** *Η διάταξη των ρητών αριθμών δεν είναι πλήρης, επειδή το σύνολο*

$$X = \{r \mid r^2 < 2\}$$

*είναι άνω φραγμένο αλλά δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

**A.25. Λήμμα.** *Κάθε πλήρες διατεταγμένο σώμα $F$ έχει την* **ιδιότητα του Αρχιμήδη**

$$(\forall x \in F)(\exists n \in N)[x < n],$$

*δηλαδή το σύνολο $N = N_F$ των φυσικών αριθμών στο $F$ δεν έχει άνω φράγμα.*

Απόδειξη. . Υποθέτουμε ότι το σύνολο $N$ είναι άνω φραγμένο, οπότε έχει ελάχιστο άνω φράγμα $x = \sup N$. Το στοιχείο $x - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $N$ αφού $x - 1 < x$, επομένως υπάρχει κάποιο $n \in N$ τέτοιο ώστε $x - 1 < n$: αλλά αυτό συνεπάγεται $x < n + 1$, που αντιτίθεται στην υπόθεση ότι το $x$ είναι άνω φράγμα του $N$. ⊣

**A.26. Άσκηση.** *Σε κάθε πλήρες διατεταγμένο σώμα $F$,*

$$\epsilon > 0 \Longrightarrow (\exists n \in N)[\frac{1}{n+1} < \epsilon].$$

**A.27. Άσκηση.** *Σε κάθε πλήρες διατεταγμένο σώμα $F$,*

$$x < y \Longrightarrow (\exists r \in Q)[x < r \;\&\; r < y],$$

*όπου $Q = Q_F$ είναι το σύνολο των ρητών αριθμών στο $F$. (Πυκνότητα των ρητών αριθμών.)*

Ο κύριος επόμενος στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι *υπάρχει ένα —και μέχρι ισομορφισμού μόνο ένα— πλήρες διατεταγμένο σώμα.* Επειδή η ιδιότητα της πληρότητας είναι γεωμετρική (ή «τοπολογική»), οι αποδείξεις της ύπαρξης και της μοναδικότητας συστήματος πραγματικών αριθμών στηρίζονται σε γεωμετρικές ιδέες. Συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε μερικούς βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα από τη *θεωρία ορίων*, γνωστά σε πολλούς από το λογισμό. Αυτά θα τα ανασκοπήσουμε εδώ κάπως συνοπτικά, αλλά χωρίς να περιοριστούμε σ' έναν ελάχιστο κατάλογο των αποτελεσμάτων που είναι απολύτως απαραίτητα για τις αποδείξεις της ύπαρξης και της μοναδικότητας: πολλά από τα Λήμματα και τις Ασκήσεις έχουν συμπεριληφθεί εδώ επειδή μαρτυρούν ότι η έννοια του πλήρους, διατεταγμένου σώματος απεικονίζει πιστά τις γεωμετρικές μας διαισθήσεις για τους πραγματικούς αριθμούς.

Για τους πολλούς υπολογισμούς που πρέπει να κάνουμε με άπειρες ακολουθίες, θα χρησιμοποιήσουμε τον απλοποιημένο συμβολισμό της ανάλυσης, που αποφεύγει την εισαγωγή διαφορετικού ονόματος για κάθε ακολουθία και τοποθετεί τη μεταβλητή ως δείκτη, έτσι ώστε η ακολουθία $(n \mapsto a_n)$ να συμβολίζεται με $\langle a_n \rangle$ ή $\langle a_0, a_1, \dots \rangle$,. Π.χ. η ακολουθία

$$\langle \frac{1}{n+1} \rangle = \langle \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$$

είναι η συνάρτηση $f : N \to Q$ που ορίζεται με τον τύπο

$$f(n) = \frac{1}{n+1}.$$

Η συνάρτηση της **απόλυτης τιμής** ορίζεται σε κάθε διατεταγμένο σώμα με τον συνηθισμένο τρόπο,

$$|x| =_{\text{ορ}} max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0, \\ -x & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

**A.28. Ορισμός.** Έστω διατεταγμένο σώμα $(F, 0, 1, +, \cdot, \leq)$.

(1) Η ακολουθία $\langle x_n \rangle$ στοιχείων του $F$ **συγκλίνει στο** $x \in F$ ή **έχει το όριο** $x$, αν

$$(\forall \epsilon \in F, \epsilon > 0)(\exists K \in N)(\forall n \in N)[n \geq K \Longrightarrow |x - x_n| < \epsilon].$$

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$x_n \to x \iff_{\text{ορ}} \text{ η } \langle x_n \rangle \text{ συγκλίνει στο } x.$$

(2) Η ακολουθία $\langle x_n \rangle$ έχει την ιδιότητα Cauchy ή (απλούστερα) **είναι Cauchy** αν

$$(\forall \epsilon \in F, \epsilon > 0)(\exists K \in N)(\forall n, m \in N)[n, m \geq K \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon].$$

**A.29. Ορισμός.** Για όλα τα σημεία $a < b$ διατεταγμένου σώματος $F$, το σύνολο

$$(a, b) =_{\text{ορ}} \{x \in F \mid a < x < b\}$$

είναι το **ανοικτό διάστημα** με άκρα $a, b$. Το σύνολο $G \subseteq F$ είναι **ανοικτό** αν είναι (πιθανά κενή) ένωση ανοικτών διαστημάτων, δηλαδή αν

$$x \in G \Longrightarrow (\exists a < b)[x \in (a, b) \subseteq G].$$

Θα χρησιμοποιούμε επίσης τους συνηθισμένους συμβολισμούς για τα κλειστά και ημίκλειστα διαστήματα, π.χ.

$$(a,b] = \{x \in F \mid a < x \leq b\}.$$

**A.30. Άσκηση.** *Δείξτε ότι η οικογένεια ανοικτών συνόλων σε ένα διατεταγμένο σώμα είναι τοπολογία, και ότι ο ορισμός ορίων για ακολουθίες στο* **A.28** *είναι ισοδύναμος με τον τοπολογικό ορισμό ορίων του* **10.42**.

Οι ορισμοί αυτοί είναι διαβόητοι για τη δυσκολία τους στην κατανόηση και στη χρήση. Τονίζουμε πάλι ότι εδώ τους μελετάμε στο πλαίσιο κάποιου διατεταγμένου σώματος που πιθανόν να μην είναι πλήρες, όπως οι ρητοί αριθμοί. Θα το βρούμε χρήσιμο να διατυπώσουμε έννοιες ισοδύναμες με τη σύγκλιση και την ιδιότητα Cauchy, με βάση την εξής ορισμό.

**A.31. Ορισμός.** Η ακολουθία $\langle x_n \rangle$ **καταλήγει** (settles) στο ανοικτό διάστημα $(a,b)$, αν μετά από κάποιο στάδιο όλα της τα στοιχεία ανήκουν σε κάποιο κλειστό διάστημα $[a', b'] \subseteq (a,b)$:

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b) \iff_{\text{ορ}} (\exists K, a', b')(\forall n \geq K)[a < a' \leq x_n \leq b' < b].$$

Παρατηρούμε ότι αν $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$, τότε όλα τα στοιχεία της $\langle x_n \rangle$ μετά από κάποιο στάδιο ανήκουν στο $(a,b)$,

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b) \Longrightarrow (\exists K)(\forall n \geq K)[a < x_n < b]\cdot$$

σε πολλές εφαρμογές χρησιμοποιούμε μόνον αυτό το ασθενές πόρισμα του ορισμού της συνθήκης $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$.

**A.32. Άσκηση.** *$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$ τότε και μόνον αν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $a+\delta < b-\delta$ και το σύνολο $\{n \in N \mid x_n \notin [a+\delta, b-\delta]\}$ είναι πεπερασμένο.*

**A.33. Άσκηση.** *Για όλα τα ανοικτά διαστήματα $I, J$, $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow I \;\&\; I \subseteq J \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow J$.*

**A.34. Άσκηση.** *Για όλα τα ανοικτά διαστήματα $I, J$,*

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow I \;\&\; \langle x_n \rangle \rightsquigarrow J \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow I \cap J \Longrightarrow I \cap J \neq \emptyset.$$

**A.35. Άσκηση.** *Αν η $\langle x_n \rangle$ καταλήγει σ' ένα ανοικτό διάστημα $(a,b)$ τότε η $\langle x_n \rangle$ είναι* **φραγμένη**, *δηλαδή*

$$(\exists w)(\forall n)[x_n \leq w].$$

Το επόμενο Λήμμα θα μας επιτρέψει σε πολλές περιπτώσεις να αποφύγουμε τη λεγόμενη «εψιλονική» μέθοδο, της οποίας τυπικό παράδειγμα είναι ακριβώς η απόδειξη αυτού του Λήμματος.

**A.36. Λήμμα.** *Για κάθε ακολουθία σε τυχόν διατεταγμένο σώμα $F$:*

(1) *Η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει στο $x$ τότε και μόνον αν η $\langle x_n \rangle$ καταλήγει σε κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x$:*

$$x_n \to x \iff (\forall a, b \in F)[a < x < b \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)].$$

(2) *Η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy τότε και μόνον αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ανοικτό διάστημα $(a, b)$ με $(b - a) \leq \epsilon$, τέτοιο ώστε η $\langle x_n \rangle$ να καταλήγει στο $(a, b)$:*

$$\langle x_n \rangle \text{ is Cauchy} \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists a, b)[a < b \leq a + \epsilon \;\&\; \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b)]$$

Αποδειξη. . (1) Αν $x_n \to x$ και $a < x < b$, τότε ο ορισμός της σύγκλισης με

$$\epsilon = \frac{min(x - a, b - x)}{2}$$

μας δίνει ένα $K$ τέτοιο ώστε

$$n \geq K \Longrightarrow |x - x_n| < \frac{min(x - a, b - x)}{2},$$

από το οποίο προκύπτει (με λίγη εργασία) ότι

$$n \geq K \Longrightarrow a < a' = \frac{a + x}{2} < x_n < \frac{x + b}{2} = b' < b,$$

άρα $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b)$. Για την άλλη κατεύθυνση, για κάθε $\epsilon > 0$, $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (x - \epsilon, x + \epsilon)$, και επομένως υπάρχει κάποιο $K$, τέτοιο ώστε

$$n \geq K \Longrightarrow |x - x_n| < \epsilon.$$

(2) Αν η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $K$ τέτοιο ώστε $n, m \geq K \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{4}$, από το οποίο προκύπτει εύκολα ότι $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (x_K - \frac{\epsilon}{2}, x_K + \frac{\epsilon}{2})$, και αυτό το διάστημα έχει μήκος $\epsilon$. Για την αντίθετη κατεύθυνση, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $(a, b)$ με $(b - a) \leq \epsilon$, έτσι που $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b)$, άρα για κάποιο $K$,

$$n, m \geq K \Longrightarrow [a < x_n < b \;\&\; a < x_m < b \Longrightarrow |x_n - x_m| < b - a \leq \epsilon],$$

κι επομένως η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy. ⊣

**A.37. Πόρισμα.** *Αν η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει σε κάποιο $x$, τότε είναι Cauchy.*

Αποδειξη. . Για κάθε $\epsilon > 0$, $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (x - \frac{\epsilon}{2}, x + \frac{\epsilon}{2})$ από το (1) του **A.36**, άρα η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy από το (2) του **A.36**. ⊣

**A.38. Άσκηση.** $x_n \to x \;\&\; x_n \to y \Longrightarrow x = y$. *Αυτό μας επιτρέπει να εισαγάγουμε τον κλασικό συμβολισμό*

$$x = \lim_n x_n \iff_{\text{ορ}} x_n \to x.$$

**A.39. Λήμμα.** *Αν η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy σε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα $F$, τότε η $\langle x_n \rangle$ έχει όριο, δηλαδή $x_n \to x$ για κάποιο $x$.*

Αποδειξη. . Ορίζουμε το σύνολο

$$X =_{\text{ορ}} \{u \in F \mid (\exists v)[u < v \;\&\; \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (u, v)]\}.$$

Εφόσον η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, υπάρχει κάποιο $(c, d)$ τέτοιο ώστε $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (c, d)$, και επομένως

$$u \in X \Longrightarrow u \leq d,$$

επειδή $d < u \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (c,d) \cap (u,v) = \emptyset$ που είναι άτοπο. Άρα το $X$ είναι άνω φραγμένο και έχει ελάχιστο άνω φράγμα

$$x = \sup X.$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$a < x < b \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$$

που συνεπάγεται $x_n \to x$ από το **A.36**. Από την υπόθεση $a < x < b$ και ότι η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, βρίσκουμε πρώτα κάποιο $(u,v)$ τέτοιο ώστε

$$v - u < min(x-a, b-x), \quad \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (u,v).$$

Από τον ορισμό $u \in X$, και επομένως (a) $u \leq x$ επειδή το $x$ είναι άνω φράγμα του $X$. Από την άλλη μεριά, το $v$ είναι επίσης άνω φράγμα του $X$ (επειδή η υπόθεση $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (u',v')$ με $v < u'$ συνεπάγεται ότι η $\langle x_n \rangle$ καταλήγει σε δύο ξένα διαστήματα), και επομένως (b) $x \leq v$, αφού το $x$ είναι ελάχιστο άνω φράγμα του $X$. Οι (a) και (b) μαζί δίνουν (c) $u \leq x \leq v$, που μαζί με την **A.39** συνεπάγεται $a < u \leq x \leq v < b$, έτσι ώστε $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$. ⊣

Τα επόμενα δύο βασικά θεωρήματα συνδέουν την πληρότητα όπως την ορίσαμε (κατά Dedekind) με την έννοια πληρότητας ιστορικά συνδεδεμένη με το όνομα του Cantor.

**A.40. Θεώρημα. Αρχή του Κιβωτισμού.** *Υποθέτουμε ότι κάθε Cauchy ακολουθία στο διατεταγμένο σώμα $F$ συγκλίνει, και ότι η*

$$[x_0, y_0] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \cdots$$

*είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων, τέτοια ώστε*

$$\lim_n (y_n - x_n) = 0\cdot$$

*προκύπτει ότι η τομή $\bigcap_n [x_n, y_n]$ είναι μονοσύνολο*

$$\bigcap\nolimits_n [x_n, y_n] = \{w\},$$

*και το μοναδικό της μέλος είναι κοινό όριο των ακολουθιών $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle$,*

$$w = \lim_n x_n = \lim_n y_n.$$

Αποδειξη. . Η βασική παρατήρηση είναι ότι $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow [x_K - \delta, y_K + \delta]$ για κάθε φυσικό αριθμό $K$ και κάθε $\delta > 0$, από την **A.40**. Άρα από την **A.40**, η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, και επομένως $x_n \to x$ για κάποιο $x$, από την υπόθεση. Επιπλέον $x < x_K \Longrightarrow \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (x-1, x_K)$ από το **A.36**, που αντιτίθεται στις βασικές ιδιότητες της σχέσης $\rightsquigarrow$, επειδή $(x-1, x_K) \cap [x_K, y_K] = \emptyset$, άρα $x_K \leq x$, για κάθε $K$. Με ανάλογο συλλογισμό, $x \leq y_K$, για κάθε $K$, έτσι που τελικά $x \in \bigcap_n [x_n, y_n]$. Συμμετρικά, η $\langle y_n \rangle$ συγκλίνει, $y = \lim_n y_n \in \bigcap_n [x_n, y_n]$, και για κάθε $n$, $|x - y| \leq (y_n - x_n)$ που συνεπάγεται ότι $x = y$ από την **A.40** και τελειώνει την απόδειξη. ⊣

**A.41. Θεώρημα.** *Ένα διατεταγμένο σώμα $F$ είναι πλήρες τότε και μόνον αν έχει την ιδιότητα του Αρχιμήδη (**A.25**) και κάθε Cauchy ακολουθία στο $F$ έχει όριο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Η μια κατεύθυνση είναι ήδη γνωστή από τα Λήμματα **Α.25** και **Α.39**, και αρκεί να δείξουμε ότι αν το $F$ έχει την ιδιότητα του Αρχιμήδη και κάθε Cauchy ακολουθία στο $F$ έχει όριο, τότε το $F$ είναι πλήρες.

Έστω $X$ μη κενό, άνω φραγμένο σύνολο στο $F$, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και κάποιο άνω φράγμα $y_0$ του $X$. Ξεκινώντας με το $[x_0, y_0]$, ορίζουμε αναδρομικά μιαν ακολουθία κλειστών διαστημάτων $[x_n, y_n]$ που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

1. $x_n \leq x_{n+1} < y_{n+1} \leq y_n$,
2. $(y_n - x_n) = 2^{-n}(y_0 - x_0)$,
3. $[x_n, y_n] \cap X \neq \emptyset$,
4. $(\forall x \in X)[x \leq y_n]$.

Συγκεκριμένα, για να ορίσουμε το $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις: αν το $w = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$ είναι άνω φράγμα του $X$ θέτουμε $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [x_n, w]$, αλλιώς $[x_{n+1}, y_{n+1}] = [w, y_{n+1}]$. Η απόδειξη ότι το $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ ικανοποιεί τις (1) - (4) είναι τετριμμένη.

**Λήμμα**. $\lim_n (y_n - x_n) = 0$.

**Απόδειξη**. Η ιδιότητα του Αρχιμήδη συνεπάγεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός $K > 0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{y_0 - x_0}{\epsilon} < K \leq 2^K,$$

όπου η ανισότητα $K \leq 2^K$ επαληθεύεται εύκολα (με επαγωγή!). Προκύπτει ότι για κάθε $n \geq K$,

$$(y_n - x_n) = 2^{-n}(y_0 - x_0) \leq 2^{-K}(y_0 - x_0) < \epsilon,$$

που τελειώνει την απόδειξη του Λήμματος.

Το **Α.40** συνεπάγεται τώρα ότι

$$\bigcap [x_n, y_n] = \{w\}$$

όπου $w = \lim_n x_n = \lim_n y_n$, και αρκεί να επαληθεύσουμε ότι αυτό το κοινό όριο $w$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $X$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} w < t &\implies \langle y_n \rangle \rightsquigarrow (w-1, t) && \text{επειδ } \lim_n y_n = w \\ &\implies y_n < t && \text{για κποιο } n \\ &\implies t \notin X && \text{επειδ το } y_n \text{ εναι} \\ & && \quad \text{νω φργμα του } X, \end{aligned}$$

και επομένως το $w$ είναι άνω φράγμα του $X$. Επίσης:

$$\begin{aligned} t < w &\implies \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (t, w+1) && \text{επειδ } \lim_n x_n = w \\ &\implies t < x_n && \text{για κποιο } n \\ &\implies (\exists x \in X)[t < x] && \text{απ τον ορισμ των } x_n, \end{aligned}$$

άρα δεν υπάρχει άνω φράγμα του $X$ μικρότερο του $w$. ⊣

Είναι αξιοσημείωτο ότι υπάρχουν διατεταγμένα σώματα που είναι *πλήρη κατά τον Cauvhy* αλλά δεν έχουν την ιδιότητα του Αρχιμήδη, Πρόβλημα **xA.2**.

Ακολουθώντας (μέχρις ενός σημείου) τον Cantor, θα κατασκευάσουμε ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα ως πηλίκο του συνόλου των ακολουθιών Cauchy στους ρητούς αριθμούς με την εξής φυσική σχέση ισοδυναμίας.

**A.42. Ορισμός.** Δύο ακολουθίες $\langle x_n \rangle$ και $\langle y_n \rangle$ είναι **ασυμπτωτικά ισοδύναμες** αν η διαφορά τους συγκλίνει στο 0, συμβολικά

$$\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle \iff_{\text{ορ}} (x_n - y_n) \to 0.$$

**A.43. Θεώρημα.** (1) *Δύο Cauchy ακολουθίες $\langle x_n \rangle$ και $\langle y_n \rangle$ είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες τότε και μόνον αν καταλήγουν στα ίδια ανοικτά διαστήματα:*

$$\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle \iff (\forall a < b)[\langle x_n, \rangle \rightsquigarrow (a,b) \iff \langle y_n, \rangle \rightsquigarrow (a,b)].$$

(2) *Αν οι $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$ είναι Cauchy, τότε*

$$\begin{aligned}\langle x_n \rangle \not\approx \langle y_n \rangle \implies & (\text{υπρχουν ανοικτ διαστματα } I, J) \\ & [I \cap J = \emptyset \ \& \ \langle x_n \rangle \rightsquigarrow I \ \& \ \langle y_n \rangle \rightsquigarrow J].\end{aligned}$$

(3) *Η σχέση $\approx$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο*

$$\mathcal{C}(F) =_{\text{ορ}} \{\langle x_n \rangle \mid \ \text{η } \langle x_n \rangle \text{ εναι Cauchy στο } F\}.$$

Απόδειξη. . (1) Υποθέτουμε πρώτα ότι $\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle$ και $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$, και επομένως υπάρχει κάποιος $K_0$ και κάποιο $\delta > 0$, τέτοια ώστε

$$n \geq K_0 \Longrightarrow a + \delta \leq x_n \leq b - \delta.$$

Επειδή $\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle$, υπάρχει επίσης $K_1$ τέτοιος ώστε

$$\begin{aligned} n \geq K_1 &\implies |x_n - y_n| < \frac{\delta}{2} \\ &\implies x_n + \frac{\delta}{2} < y_n < x_n + \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

και απ' αυτές τις δύο συνεπαγωγές προκύπτει εύκολα ότι

$$n \geq max(K_0, K_1) \Longrightarrow a + \frac{\delta}{2} \leq y_n \leq b - \frac{\delta}{2},$$

έτσι που $\langle y_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$. Για την άλλη κατεύθυνση, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διάστημα $(a,b)$ με $b - a \leq \epsilon$ και τέτοιο ώστε $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$ από το (2) του **A.36**· επομένως, από την υπόθεση, επίσης $\langle y_n \rangle \rightsquigarrow (a,b)$· άρα, για κάποιο $K$,

$$n \geq K \Longrightarrow [a < x_n < b \ \& \ a < y_n < b] \Longrightarrow |y_n - x_n| < \epsilon].$$

(2) Κατευθείαν από τον ορισμό της σύγκλισης,

$$\neg[(x_n - y_n) \to 0] \Longrightarrow (\exists \epsilon > 0)(\forall K)(\exists n, m \geq K)[|x_n - y_m| \geq \epsilon].$$

Από το **A.36** υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I$, $J$ μήκους $< \frac{\epsilon}{2}$ (γι' αυτό το $\epsilon$) τέτοια ώστε $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow I$ και $\langle y_n \rangle \rightsquigarrow J$. Αν υπήρχε κάποιο $z \in I \cap J$, τότε για $K$ αρκετά μεγάλο έτσι που να ικανοποιείται η

$$n, m \geq K \Longrightarrow x_n \in I \ \& \ y_m \in J,$$

θα είχαμε

$$n, m \geq K \Longrightarrow |x_n - y_m| \leq |x_n - z| + |z - y_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

που αντιτίθεται στην **Α-0**.

(3) Η αυτοπάθεια και η συμμετρικότητα της $\approx$ είναι τετριμμένες. Για τη μεταβατικότητα, από την υπόθεση και το (3) του Λήμματος **Α.36**, για κάθε $(a, b)$,

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b) \iff \langle y_n \rangle \rightsquigarrow (a, b) \iff \langle z_n \rangle \rightsquigarrow (a, b),$$

έτσι ώστε από το (1), $\langle x_n \rangle \approx \langle z_n \rangle$. ⊣

**Α.44. Άσκηση.** *Αν οι $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$ είναι Cauchy και $x_n \to x$, τότε*

$$\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle \iff y_n \to x.$$

Θα μπορούσαμε τώρα να επικαλεστούμε την ύπαρξη *κάποιου πηλίκου* $B$ του συνόλου

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(Q) =_{\text{oρ}} \{\langle r_n \rangle \mid \text{ η } \langle r_n \rangle \text{ είναι Cauchy στο σώμα των ρητών αριθμών}\}$$

με την $\approx$ και να ορίσουμε τις απαραίτητες πράξεις και κάποια διάταξη στο $B$ έτσι που να γίνει πλήρες, διατεταγμένο σώμα. Αυτή είναι μία από τις κλασικές αποδείξεις της ύπαρξης των πραγματικών αριθμών συνδεδεμένη με το όνομα του Cantor. Αντ' αυτού θα κατασκευάσουμε ένα *συγκεκριμένο πηλίκο* του $\mathcal{C}$ με την $\approx$ που απλοποιεί κάπως την απόδειξη και (το κυριότερο) συνδέει αυτή την κατασκευή με την άλλη κλασική απόδειξη ύπαρξης των πραγματικών αριθμών, κατά τον Dedekind. Η βασική ιδέα του Dedekind ήταν ότι ένας πραγματικός αριθμός $x$ καθορίζεται από το σύνολο

$$(-\infty, x) \cap Q =_{\text{oρ}} \{r \in Q \mid r < x\}$$

των μικρότερών του ρητών αριθμών, και επομένως μπορεί να «ταυτιστεί» με αυτό το σύνολο· επιπλέον, τα σύνολα της μορφής $(-\infty, x) \cap Q$ χαρακτηρίζονται εύκολα με τρεις απλές συνθήκες.

**Α.45. Ορισμός. Τομή Dedekind** είναι ένα σύνολο ρητών $X$ που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες.

1. $X \neq \emptyset$, $(Q \setminus X) \neq \emptyset$.
2. $r < q \ \&\ q \in X \Longrightarrow r \in X$.
3. $q \in X \Longrightarrow (\exists r)[q < r \ \&\ r \in X]$.

Θέτουμε

$$\mathcal{D} =_{\text{oρ}} \{X \subseteq Q \mid X \text{ εναι τομ Dedekind}\}.$$

**Α.46. Άσκηση.** *Ένα σύνολο $X \subseteq Q$ είναι τομή Dedekind τότε και μόνον αν είναι μη κενό, άνω φραγμένο, χωρίς μέγιστο μέλος και «κλειστό προς τα κάτω», δηλαδή $r < q \ \&\ q \in X \Longrightarrow r \in X$.*

Το επόμενο θεώρημα είναι βασικό για την απόδειξη της ύπαρξης των πραγματικών αριθμών.

**A.47. Θεώρημα.** *Σε κάθε ακολουθία Cauchy $\langle x_n \rangle$ ρητών αριθμών αντιστοιχίζουμε το σύνολο*

$$\pi(\langle x_n \rangle) =_{\text{ορ}} \{a \in Q \mid (\exists b)[a < b \;\&\; \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b)]\}\cdot$$

*προκύπτει ότι κάθε τιμή $\pi(\langle x_n \rangle)$ είναι τομή Dedekind, και ότι η συνάρτηση*

$$\pi : \mathcal{C} \twoheadrightarrow \mathcal{D}$$

*είναι επιμορφισμός που προσδιορίζει τη σχέση ισοδυναμίας $\approx$, δηλαδή το $\mathcal{D}$ είναι πηλίκο του $\mathcal{C}$.*

Απόδειξη. . Το πως κάθε $\pi(\langle x_n \rangle)$ είναι τομή Dedekind είναι σχετικά εύκολο, από τους ορισμούς και τις γενικές ιδιότητες της σχέσης $\rightsquigarrow$, και η ισοδυναμία

$$\langle x_n \rangle \approx \langle y_n \rangle \iff \pi(\langle x_n \rangle) = \pi(\langle y_n \rangle)$$

είναι άμεσο πόρισμα του **A.43**. Το μόνο που δεν είναι τελείως προφανές είναι ότι για κάθε τομή Dedekind $X$ υπάρχει κάποια ακολουθία Cauchy $\langle x_n \rangle \in \mathcal{C}$ στους ρητούς αριθμούς τέτοια ώστε $\pi(\langle x_n \rangle) = X$. Γι' αυτό κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων *στους ρητούς αριθμούς*

$$[x_0, y_0] \supseteq [x_1, y_1] \supseteq \cdots$$

ακριβώς όπως στην απόδειξη του **A.41**, ξεκινώντας με κάποιο $x_0 \in X$ και κάποιο $y_0 \notin X$, έτσι που το $y_0$ είναι και άνω φράγμα του $X$. Με τη μέθοδο της απόδειξης του **A.41**, δείχνουμε ότι η μη φθίνουσα ακολουθία $\langle x_n \rangle$ έχει την ιδιότητα Cauchy, και επιπλέον, για κάθε $n$,

$$x_n \in X \;\&\; y_n \notin X,$$

επειδή το $X$ είναι κλειστό προς τα κάτω και δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} a \in \pi(\langle x_n \rangle) &\implies (\exists b)[a < b \;\&\; \langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b)] \\ &\implies (\exists n)[a < x_n] \\ &\implies a \in X \text{ επειδ } x_n \in X. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι $X \subseteq \pi(\langle x_n \rangle)$, παρατηρούμε ότι αν $a \in X$, τότε πρέπει να υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός $K$ τέτοιος ώστε $a < x_K$, επειδή η αντίθετη υπόθεση $(\forall n)[x_n \leq a]$ οδηγεί (εύκολα) στο άτοπο συμπέρασμα ότι το $a$ είναι το μέγιστο στοιχείο του $X$. Προκύπτει ότι για κάθε $n \geq K$, $x_K \leq x_n \leq y_K$, άρα $\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (x_K, y_K + 1)$ και τελικά $a \in \pi(\langle x_n \rangle)$. ⊣

**A.48. Θεώρημα. Ύπαρξη των πραγματικών αριθμών.** *Υπάρχει διατεταγμένο σώμα που είναι πλήρες.*

Απόδειξη. . Ως σύνολο στοιχείων παίρνουμε το σύνολο $\mathcal{D}$ των τομών Dedekind και για το 0 και το 1 δίνουμε τους προφανείς ορισμούς:

$$\begin{aligned} 0 &=_{\text{ορ}} \{r \in Q \mid r < 0\} = \pi(\langle 0 \rangle), \\ 1 &=_{\text{ορ}} \{r \in Q \mid r < 1\} = \pi(\langle 1 \rangle). \end{aligned}$$

Για να ορίσουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό στο $\mathcal{D}$ χρειαζόμαστε τα εξής δύο Λήμματα, όπου όλες οι ακολουθίες είναι Cauchy στους ρητούς αριθμούς.

$$\langle x_n \rangle \approx \langle x_n' \rangle \;\&\; \langle y_n \rangle \approx \langle y_n' \rangle \qquad \text{(A-1)}$$
$$\Longrightarrow \langle x_n + y_n \rangle \approx \langle x_n' + y_n' \rangle$$
$$\langle x_n \rangle \approx \langle x_n' \rangle \;\&\; \langle y_n \rangle \approx \langle y_n' \rangle \qquad \text{(A-2)}$$
$$\Longrightarrow \langle x_n \cdot y_n \rangle \approx \langle x_n' \cdot y_n' \rangle$$

Αυτές είναι οι κατάλληλες ερμηνείες των κλασικών θεωρημάτων από την θεωρία ορίων

$$\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n,$$
$$\lim_n (x_n \cdot y_n) = \lim_n x_n \cdot \lim_n y_n,$$

στην προκειμένη περίπτωση όπου τα όρια μπορεί να μην υπάρχουν αφού οι ακολουθίες είναι στο μη πλήρες σώμα των ρητών αριθμών. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχτούν έπειτα απ' όλη την προεργασία που έχουμε κάνει και θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες. Από τις **A-1**, **A-2** συνάγεται ότι η ισοδυναμία $\approx$ είναι σχέση ομοιότητας στο $\mathcal{C}$ για τις συναρτήσεις

$$(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) \mapsto \langle x_n + y_n \rangle,$$
$$(\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle) \mapsto \langle x_n \cdot y_n \rangle,$$

έτσι ώστε από το **A.2** υπάρχουν αντίστοιχες συναρτήσεις $+$ και $\cdot$ στο πηλίκο $\mathcal{D}$ που ικανοποιούν τις ταυτότητες:

$$\pi(\langle x_n \rangle) + \pi(\langle y_n \rangle) = \pi(\langle x_n + y_n \rangle),$$
$$\pi(\langle x_n \rangle) \cdot \pi(\langle y_n \rangle) = \pi(\langle x_n \cdot y_n \rangle).$$

Δεχόμαστε αυτές τις $+, \cdot$ για πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού στο $\mathcal{D}$.

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι το $(\mathcal{D}, 0, 1, +, \cdot)$ είναι σώμα, αλλά σ' αυτό το σημείο η απόδειξη είναι τετριμμένη, αν και κάπως κουραστική στις λεπτομέρειές τις (που θα τις παραλείψουμε). Η ύπαρξη αντίστροφου για την πρόσθεση π.χ. ακολουθεί από το προφανές

$$\pi(\langle x_n \rangle) + \pi(\langle -x_n \rangle) = \pi(\langle x_n + (-x_n) \rangle) = \pi(\langle 0 \rangle) = 0,$$

όπου το μόνο «λεπτό» σημείο είναι η παρατήρηση ότι αν η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy, επίσης Cauchy είναι και η $\langle -x_n \rangle$. Για να αποδείξουμε την αντίστοιχη ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό, θέτουμε για κάθε $\langle x_n \rangle \not\approx \langle 0 \rangle$

$$y_n =_{\text{ορ}} \begin{cases} 1/x_n, & \text{αν } x_n \neq 0, \\ 1, & \text{αν } x_n = 0, \end{cases}$$

επαληθεύουμε πρώτα ότι η $\langle y_n \rangle$ είναι Cauchy και τελειώνουμε με τον υπολογισμό

$$\pi(\langle x_n \rangle) \cdot \pi(\langle y_n \rangle) = \pi(\langle x_n \cdot y_n \rangle) = \pi(\langle 1 \rangle) = 1.$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι (από το (2) του **A.43**)

$$\begin{aligned}\langle x_n\rangle \not\approx \langle 0\rangle &\implies (\exists\delta>0)[\langle x_n\rangle \not\rightsquigarrow (-\delta,\delta)]\\ &\implies (\exists\delta>0,K)(\forall n\geq K)|x_n|\geq\delta\end{aligned}$$

με την οποία αρχίζουμε την απόδειξη ότι η $\langle y_n\rangle$ είναι Cauchy, αλλά τουλάχιστον λίγα εψιλονικά είναι εδώ απαραίτητα. Το αντίστοιχο θεώρημα από τη θεωρία ορίων είναι το

$$\lim_n x_n \neq 0 \Longrightarrow \lim_n(\frac{1}{x_n}) = \frac{1}{\lim_n x_n},$$

παραδοσιακά γνωστό ως ένα από τα πρώτα δύσκολα θεωρήματα του Λογισμού όταν αυτός διδάσκεται θεωρητικά.

Ορίζουμε τώρα στο $\mathcal{D}$ τη σχέση

$$X\leq Y \iff_{\text{ορ}} X\subseteq Y,$$

που είναι καταρχήν μερική διάταξη επειδή η $\subseteq$ είναι μερική διάταξη σε κάθε οικογένεια συνόλων. Η γραμμικότητα της $\leq$ συνάγεται από την παρατήρηση ότι για κάθε δύο τομές Dedekind $X$, $Y$, κατευθείαν από τον ορισμό,

$$\begin{aligned}r\in(Y\setminus X) &\implies (\forall q\in X)[q<r]\ \&\ (\forall q<r)[q\in Y]\\ &\implies X\subseteq Y,\end{aligned}$$

και βέβαια, $X\neq Y \Longrightarrow (\exists r)[r\in(X\setminus Y)]\vee[r\in(Y\setminus X)]$. Επίσης μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα από τον ορισμό των τομών Dedekind ότι

$$I\subseteq\mathcal{D}\Longrightarrow\bigcup I = Q\vee\bigcup I\in\mathcal{D}.$$

(Π.χ. αν το $r$ ήταν μέγιστο σημείο της ένωσης $\bigcup I$, τότε $r\in X$ για κάποιο $X\in I$ και βέβαια το $r$ θα ήταν μέγιστο στο $X\subseteq I$, που δεν έχει μέγιστο.) Από την **A-2** συμπεραίνουμε αμέσως ότι κάθε άνω φραγμένο $I\subseteq\mathcal{D}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα, επειδή

$$(\forall X\in I)[X\leq Z]\Longrightarrow\bigcup I\subseteq Z\subsetneq Q\Longrightarrow\bigcup I\in\mathcal{D},$$

και η $\bigcup I$ είναι προφανώς το ελάχιστο άνω φράγμα του $I$ στη σχέση $\leq\ =\ \subseteq$.

Παραμένει μόνο να επαληθεύσουμε ότι για όλα τα $X,Y,Z\in\mathcal{D}$

$$X<Y \implies X+Z<Y+Z, \tag{A-3}$$

$$[Z>0\ \&\ X<Y] \implies Z\cdot X<Z\cdot Y, \tag{A-4}$$

από τις οποίες προκύπτουν αμέσως οι αντίστοιχες ιδιότητες της $\leq$. Για την πιο δύσκολη **A-4**, π.χ., επιλέγουμε πρώτα ακολουθίες Cauchy τέτοιες ώστε

$$\pi(\langle z_n\rangle)=Z,\ \pi(\langle x_n\rangle)=X,\ \pi(\langle y_n\rangle)=Y,$$

και βεβαιώνουμε εύκολα από τους ορισμούς (και το **A.43**) ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί

$$x^0<x^1<y^0<y^1$$

τέτοιοι ώστε

$$\langle x_n\rangle\rightsquigarrow(x^0,x^1),\quad\langle y_n\rangle\rightsquigarrow(y^0,y^1),$$

και ότι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ρητούς αριθμούς $z^0, z^1$ τέτοιους ώστε

$$0 < z^0 < z^1, \quad (z^1 - z^0) < \epsilon, \quad \langle z_n \rangle \rightsquigarrow (z^0, z^1).$$

Επομένως

$$\langle z_n \cdot x_n \rangle \rightsquigarrow (z^0 \cdot x^0, z^1 \cdot x^1), \quad \langle z_n \cdot y_n \rangle \rightsquigarrow (z^0 \cdot y^0, z^1 \cdot y^1),$$

και θα έχουμε (εύκολα) το συμπέρασμα $Z \cdot X < Z \cdot Y$ αν μπορέσουμε να διαλέξουμε τα $z^0, z^1$ έτσι ώστε

$$z^1 x^1 < z^0 y^0,$$

ή ισοδύναμα,

$$x^1(z^1 - z^0) < z^0(y^0 - x^1).$$

Η **A-4** είναι προφανής αν $x^1 \leq 0$, επειδή τότε $x^1(z^1 - z^0) \leq 0$ ενώ $z^0(y^0 - x^1) > 0$. Αν $x^1 > 0$, βρίσκουμε πρώτα κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\langle z_n \rangle \rightsquigarrow (\delta, \infty)$ και μετά κάποιο $z^0, z^1$ τέτοιο ώστε

$$0 < \delta < z^0 < z^1, \quad \langle z_n \rangle \rightsquigarrow (z^0, z^1), \quad (z^1 - z^0) < \frac{\delta(y^0 - x^1)}{x^1}$$

τα οποία συνεπάγονται την **A-4**:

$$x^1(z^1 - z^0) < x^1 \frac{\delta(y^0 - x^1)}{x^1} \leq z^0(y^0 - x^1).$$

Η επαλήθευση της **A-3** είναι σημαντικά ευκολότερη και τελειώνει την απόδειξη του θεωρήματος. ⊣

**A.49. Άσκηση.** *Δείξτε ότι για όλες τις τομές Dedekind $X$, $Y$, $Z$:*

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

*(Χρησιμοποιήστε τον τυπικό ορισμό των + και · που δώσαμε στην απόδειξη του* **A.48**.*)*

**A.50. Άσκηση.** *Δείξτε τις* **A-1** *και* **A-2**.

**A.51. Άσκηση.** *Δείξτε ότι αν η $\langle x_n \rangle$ είναι Cauchy σε ένα διατεταγμένο σώμα και $\langle x_n \rangle \not\approx \langle 0 \rangle$, τότε η ακολουθία $\langle y_n \rangle$ ορισμένη από την* **A-2** *είναι Cauchy και $\langle x_n y_n \rangle \approx \langle 1 \rangle$.*

**A.52. Θεώρημα. Μοναδικότητα των πραγματικών αριθμών.** *Αν $F^1$ και $F^2$ είναι πλήρη διατεταγμένα σώματα, τότε υπάρχει ακριβώς μία αντιστοιχία*

$$\pi^* : F^1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow F^2$$

*που είναι ισομορφισμός, δηλαδή:*

1. $\pi^*(0) = 0, \quad \pi^*(1) = 1.$
2. $\pi^*(x + y) = \pi^*(x) + \pi^*(y), \quad \pi^*(xy) = \pi^*(x)\pi^*(y).$
3. $x \leq y \iff \pi^*(x) \leq \pi^*(y).$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Από τη μοναδικότητα των ρητών αριθμών **A.14**, υπάρχει (ακριβώς ένας) ισομορφισμός

$$\pi : Q^1 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow Q^2,$$

όπου $Q^1$, $Q^2$ τα σύνολα των ρητών αριθμών στα δύο σώματα $F^1$, $F^2$, και το πρόβλημα είναι να επεκτείνουμε την $\pi$ σ' ολόκληρο το $F^1$.

**Λήμμα 1**. Για κάθε $x \in F^1$, υπάρχει ακολουθία $\langle x_n \rangle$ ρητών στο $F^1$, τέτοια ώστε $\lim_n x_n = x$.

**Απόδειξη**. Από την πυκνότητα των ρητών αριθμών (Άσκηση **A.27**) προκύπτει ότι για κάθε $n \in N$, υπάρχει κάποιος ρητός αριθμός $x_n \in Q^1$ τέτοιος ώστε $|x - x_n| < 1/(n+1)$, και απ' αυτό (εύκολα, χρησιμοποιώντας την Άσκηση **A.26**), $\lim_n x_n = x$.

**Λήμμα 2**. Για κάθε ακολουθία $\langle x_n \rangle$ ρητών αριθμών στο $F^1$,

$$(\exists x \in F^1)[\lim_n = x] \Longrightarrow (\exists x^* \in F^2)[\lim_n \pi(x_n) = x^*].$$

**Απόδειξη**. Προφανώς

$$u < v \iff \pi(u) < \pi(v), \quad (u, v \in Q^1)$$

επειδή η $\pi$ είναι ισομορφισμός και επομένως, για κάθε $a, b \in Q^1$, $a < b$:

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b) \iff \langle \pi(x_n) \rangle \rightsquigarrow (\pi(a), \pi(b)).$$

Αν η $\langle x_n \rangle$ συγκλίνει, τότε είναι Cauchy, οπότε και η $\langle \pi(x_n) \rangle$ είναι Cauchy από την **A.52** και το **A.36** (χρησιμοποιώντας πάλι την **A.26**), άρα και η $\langle \pi(x_n) \rangle$ συγκλίνει αφού το $F^2$ είναι πλήρες.

Με τον ίδιο απλό τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε και το τρίτο βασικό γεγονός που χρειαζόμαστε:

**Λήμμα 3**. Για δύο Cauchy ακολουθίες στους ρητούς αριθμούς του $F^1$,

$$[\lim_n x_n = \lim_n y_n] \Longrightarrow \lim_n \pi(x_n) = \lim_n \pi(y_n).$$

Από τα Λήμματα συνάγεται ότι μπορούμε να ορίσουμε για κάθε $x \in F^1$, χωρίς σύγχυση,

$$\pi^*(x) =_{\text{ορ}} \lim_n \pi(x_n), \qquad \text{που } \lim_n x_n = x, \text{ με } x_n \in Q^1.$$

Για κάθε ρητό αριθμό $x \in Q^1$, $\lim_n x = x$, άρα

$$\pi^*(x) = \lim_n \pi(x) = \pi(x),$$

άρα η $\pi^*$ είναι επέκταση της $\pi$. Απομένει μόνο να δείξουμε ότι η $\pi^*$ είναι ισομορφισμός του $F^1$ με το $F^2$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$x = \lim_n x_n, \quad y = \lim_n y_n, \quad x_n, y_n \in Q^1, \quad x < y,$$

που συνεπάγεται αμέσως από το **A.36** ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί $a, b, c, d$ έτσι ώστε

$$\langle x_n \rangle \rightsquigarrow (a, b), \quad \langle y_n \rangle \rightsquigarrow (c, d), \quad b < c,$$

και επομένως από την **A.52**

$$\langle \pi(x_n)\rangle \rightsquigarrow (\pi(a),\pi(b)), \quad \langle \pi(y_n)\rangle \rightsquigarrow (\pi(c),\pi(d)).$$

Προκύπτει ότι

$$\pi^*(x) = \lim_n \pi(x_n) < \lim_n \pi(y_n) = \pi^*(y)$$

αφού $\pi(b) < \pi(c)$, και έχουμε δείξει ότι η $\pi^*$ σέβεται τη σχέση $<$:

$$x < y \Longrightarrow \pi^*(x) < \pi^*(y).$$

Αυτό συνεπάγεται αμέσως ότι η $\pi^*$ είναι μονομορφισμός και σέβεται τη διάταξη,

$$x \le y \iff \pi^*(x) \le \pi^*(y).$$

Τα υπόλοιπα είναι τετριμμένα (αν και κάπως κουραστικά) και στηρίζονται κυρίως στα *θεωρήματα ορίων* του Λογισμού που ισχύουν σε κάθε πλήρες διατεταγμένο σώμα — και επαληθεύονται εύκολα με το μηχανισμό που έχουμε δημιουργήσει. Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
\pi^*(x+y) &=_{\text{ορ}} \lim_n \pi(x_n + y_n), \qquad \text{που } x_n \to x, y_n \to y, x_n, y_n \in Q^1,\\
&= \lim_n [\pi(x_n) + \pi(y_n)]\\
&= \lim_n \pi(x_n) + \lim_n \pi(y_n)\\
&= \pi^*(x) + \pi^*(y).
\end{aligned}$$

Το κρίσιμο βήμα σ' αυτό τον υπολογισμό είναι το

$$\lim_n [\pi(x_n) + \pi(y_n)] = \lim_n \pi(x_n) + \lim_n \pi(y_n).$$

Θα παραλείψουμε τις λεπτομέρειες. ⊣

**A.53. Άσκηση.** *Κατεργαστείτε τις λεπτομέρειες της απόδειξης του*

$$\pi^*(x+y) = \pi^*(x) + \pi^*(y).$$

**A.54.** Οι πραγματικοί αριθμοί. Όπως κάναμε με τους φυσικούς και τους ρητούς αριθμούς, καθορίζουμε τώρα κάποιο πλήρες, διατεταγμένο σώμα

$$(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, \le),$$

τα μέλη του οποίου θα καλούμε **πραγματικούς αριθμούς**. Τονίζουμε και πάλι ότι η συγκεκριμένη επιλογή του $\mathbb{R}$ είναι άνευ σημασίας: το θεμελιακό, μαθηματικό γεγονός για την κλασική ανάλυση είναι ότι υπάρχει ένα —και μέχρι ισομορφισμού— μόνο ένα πλήρες διατεταγμένο σώμα.

**A.55. Άσκηση.** *Δείξτε το Πόρισμα* **2.14** *του Κεφαλαίου* **2** *από τα αξιώματα.*

Τα ανοικτά σύνολα πραγματικών αριθμών που ορίσαμε στο **A.29** είναι τοπολογία από την εύκολη Άσκηση **A.30**, έτσι ώστε έχουμε φυσικές έννοιες συνόλων Borel πραγματικών αριθμών και Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων από τους πραγματικούς αριθμούς σε άλλους τοπολογικούς χώρους και τανάπαλιν από τα **10.25**, **10.39**. Στο **10.40** ορίσαμε τη βασική έννοια του Borel ισομορφισμού ανάμεσα σε δύο τοπολογικούς χώρους. Το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει να μεταφέρουμε αποτελέσματα από το χώρο του Baire στους πραγματικούς αριθμούς, και είναι το βασικό εργαλείο για την ανάλυση των συνολοθεωρητικών ιδιοτήτων του $\mathbb{R}$. Θα παραλείψουμε την απόδειξη που επικαλείται τα Προβλήματα **x10.12**, **x10.13**, και είναι σχετικά απλή.

**A.56. Θεώρημα.** *Ως τοπολογικός χώρος, ο $\mathbb{R}$ είναι Borel ισομορφικός με το χώρο του Baire $\mathcal{N}$.*

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο A

* **xA.1.** Έστω $F$ το σύνολο των ρητών συναρτήσεων με ακέραιους συντελεστές στο $\mathbb{R}$ (δηλαδή των συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς που είναι πηλίκα πολυωνύμων με ακέραιους συντελεστές) και δείξε ότι είναι σώμα με τις προφανείς πράξεις. Δείξε ότι η σχέση

$$f \leq g \iff_{\text{ορ}} (\exists x)(\forall y \geq x)[f(y) \leq g(y)]$$

είναι διάταξη του $F$, τέτοια ώστε το $F$ να είναι διατεταγμένο σώμα χωρίς την ιδιότητα του Αρχιμήδη.

* **xA.2.** Δείξε ότι υπάρχει διατεταγμένο σώμα που δεν είναι πλήρες, αλλά στο οποίο κάθε Cauchy ακολουθία έχει όριο. Υπόδειξη. Δείξε ότι κάθε διατεταγμένο σώμα επιδέχεται *Cauchy πλήρωση.*

**xA.3.** Κάθε ανοικτό σύνολο πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ανοικτών διαστημάτων.

**xA.4.** Κάθε κλειστό διάστημα πραγματικών αριθμών $[a, b]$ είναι συμπαγές, με τον τοπολογικό ορισμό **10.43**.

**xA.5.** Κάθε κλειστό σύνολο πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων.

**xA.6.** Κάθε κλειστό σύνολο πραγματικών αριθμών διασπάται με έναν μόνο τρόπο ως ξένη ένωση ενός τέλειου και ενός απαριθμητού συνόλου.

* **xA.7.** Δείξε το Θεώρημα **A.56**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

# ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΑ

Για τη συστηματική μελέτη γενικών *προτύπων* της αξιωματικής συνολοθεωρίας χρειάζονται μέθοδοι της *μαθηματικής λογικής*, που είναι έξω από το πλαίσιο αυτών των Σημειώσεων.[32] Εδώ θα περιοριστούμε στους Κοσμους Συνολων, γενικεύσεις των Zermelo και Z-F κόσμων του Κεφαλαίου **11**, τους οποίους μπορούμε να μελετήσουμε με κλασικές, μαθηματικές μεθόδους, όπως μελετάμε σώματα ή τοπολογικούς χώρους. Θα δείξουμε πρώτα ότι καθε Zermelo κοσμος ειναι προτυπο της **ZDC**, και καθε Z-F κοσμος ειναι προτυπο της **ZFDC**. Αυτό το αποτέλεσμα θα μας δώσει μια καλύτερη κατανόηση αυτών των κόσμων, και μερικά, απλά Θεωρηματα Συνεπειας και Ανεξαρτησιας για τις αξιωματικές θεωρίες **ZDC** και **ZFDC**. Στο κύριο μέρος του Παραρτήματος θα κατασκευάσουμε μερικούς νέους κόσμους με πολύ διαφορετικές ιδιότητες, και ιδιαίτερα τον Αντιθεμελιωμενο Κοσμο του Aczel, που περιέχει μια πλούσια συλλογή μη εδραιωμένων συνόλων. Θα συμπεράνουμε πάλι μερικά αποτελέσματα συνέπειας και ανεξαρτησίας, αλλά ο κύριος στόχος μας είναι να διερευνήσουμε διάφορες, εναλλακτικές έννοιες συνολου και να τις συγκρίνουμε με την κλασική έννοια των αγνων, εδραιωμενων συνολων του **12.34**.

Αρχίζουμε μ' ένα αποτέλεσμα για τον ελάχιστο κόσμο του Zermelo $\mathcal{Z}$ που είναι κάπως απροσδόκητο, ιδιαίτερα μετά από την επιχειρηματολογία στο **11.25** ότι δήθεν ο $\mathcal{Z}$ περιέχει όλα τα αντικείμενα μελέτης των κλασικών μαθηματικών.

**Β.1. Θεώρημα.** *Το σύνολο $V_\omega$ των αγνών, εδραιωμένων συνόλων δεν ανήκει στο $\mathcal{Z}$, και μάλιστα δεν υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{Z}$ τέτοιο ώστε*

$$\emptyset \in A \ \& \ (\forall X)[X \in A \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \in A].$$

[32] Γι' αυτούς που ξέρουν λογική, παρατηρούμε ότι η πιο φυσική τυποποίηση των αξιωματικών συστημάτων αυτών των Σημειώσεων είναι σε σύστημα *πρωτοβάθμιας λογικής με πολλά είδη και ταυτότητα*, που να έχει ξεχωριστές μεταβλητές για αντικείμενα, οριστικές συνθήκες και οριστικούς τελεστές οσονδήποτε μεταβλητών, και τις πρωτόγονες σχέσεις *Set* and $\in$. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν συμπεριλάβαμε στο **3.18** αξιώματα έκτασης για συνθήκες και τελεστές, και ποτέ δεν χρησιμοποιήσαμε τέτοια αξιώματα. Αυτό σημαίνει ότι για να φτάσουμε στην κλασική θεωρία *Gödel-Bernays* από την **ZFC** του **11.31**, πρέπει να προσθέσουμε *αξιώματα έκτασης για συνθήκες*. Από την άλλη μεριά, ακριβώς επειδή δεν απαιτήσαμε αξιώματα έκτασης για συνθήκες, μπορούμε να θεωρήσουμε την **ZFC** του **11.31** ως *ακριβώς* (εκτός από το συμβολισμό) την κλασική θεωρία *Zermelo-Fraenkel Theory*, ερμηνεύοντας τις «συνθήκες» ως «τύπους», με παραμέτρους.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Για κάθε $x \in \mathcal{Z}$, θέτουμε

$$level(x) = \text{το ελάχιστο } n \text{ τέτοιο ώστε } x \in \mathcal{Z}_n,$$

έτσι που τα μέλη του $N_0$ έχουν *επίπεδο* (level) 0, αλλά

$$level(x) > 0 \Longrightarrow level(\{x\}) = level(x) + 1\cdot$$

επειδή $x \in \mathcal{Z}_n \Longrightarrow \{x\} \in \mathcal{Z}_{n+1}$, κι αν $\{x\} \in \mathcal{Z}_n$ για κάποιο $n > 0$, τότε $\{x\} \subseteq \mathcal{Z}_{n-1}$ από την **11-20**, και επομένως $x \in \mathcal{Z}_{n-1}$. Με αναδρομή στο $n$ ορίζουμε τα σύνολα

$$A_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad A_{n+1} = \{A_n\}.$$

Προφανώς $A_n \in V_\omega$, $level(A_0) = 1$, αφού $A_0 \subseteq N_0$ αλλά $A_0 \notin N_0$, και επαγωγικά, $level(A_n) = n + 1$.

Προς απαγωγή σε άτοπο, έστω $A \in \mathcal{Z}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η **B.1**. Παρατηρούμε ότι $A_0 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \in A$, και απ' αυτό, επαγωγικά, για κάθε $n$, $A_n \in A$. Αν $A \in \mathcal{Z}_m$, τότε κάθε $A_n \in \mathcal{Z}_m$ επειδή το $\mathcal{Z}_m$ είναι μεταβατικό, άρα $level(A_n) \leq m$ για κάθε $n$, κι αυτό αντιτίθεται στο συμπέρασμα της αμέσως προηγούμενης παραγράφου. ⊣

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν τα Καρτεσιανά γινόμενα οριστούν με βάση το ζεύγος Kuratowski, τότε $\bigcup_{n=2}^{\infty} \{N_0\}^n \notin \mathcal{Z}$, Πρόβλημα **xB.2**. Πράγματι, πολλά απλά σύνολα δεν ανήκουν στον κόσμο $\mathcal{Z}$, αλλά το γεγονός ότι $V_\omega \notin \mathcal{Z}$ είναι η πιο δραματική ένδειξη της ανεπάρκειάς του ως κόσμου μαθηματικών αντικειμένων. Η κατασκευή του $V_\omega$ είναι τόσο πειστική, δικαιολογείται με τόση φυσικότητα από τις πιο βασικές μας διαισθήσεις για τα σύνολα, που είναι δύσκολο να πιστέψουμε ότι δημιουργήσαμε όλη αυτή τη συνολοθεωρία στα Κεφάλαια **3** - **10** και το Παράρτημα **A** με βάση αξιώματα που δεν εγγυώνται την ύπαρξή του. Μπορεί βέβαια κανείς να παραβλέψει το φαινόμενο σαν παραδρομή του Zermelo και να προσθέσει στα αξιώματα κάτι ελάχιστο που να αρκεί για την απόδειξη της ύπαρξης του $V_\omega$, αλλά αυτό δεν είναι η σωστή επιλογή. Αφενός ξέρουμε τη σωστή επιλογή, είναι η πρόσθεση του Αξιώματος Αντικατάστασης που δικαιολογείται με επιχειρήματα φιλοσοφικά αδιαχώριστα απ' αυτά με τα οποία στηρίξαμε το Αξίωμα Διαχωρισμού. Και αφετέρου, η ιδιαίτερη αξία της **ZAC** είναι ακριβώς ότι έχει αυτά τα δύο αντικρουόμενα χαρακτηριστικά, να αποδείχνει τόσο μεγάλο μέρος από τα κλασικά μαθηματικά και συγχρόνως να επιδέχεται ερμηνεία σε τόσο απλά, εύκολα στη σύλληψη πρότυπα όπως το $\mathcal{Z}$. Οποιεσδήποτε απωθημένες αμφιβολίες για την ορθότητα της συνολοθεωρίας ίσως παρέμειναν από τα παράδοξα, θα πρέπει τουλάχιστον να μετριαστούν από το σθένος της **ZAC** και την ευκολία ερμηνείας της.

Μέχρι τώρα δεν έχουμε ακόμη δώσει αυστηρό ορισμό της έννοιας με την οποία το $\mathcal{Z}$ είναι «πρότυπο» της **ZDC**. Ίσως η απλούστερη πρόσβαση στο πρόβλημα να είναι η εξής ερμηνεία του **B.1**, ως θεωρήματος ανεξαρτησίας.

**B.2.** Θεώρημα; Δεν είναι δυνατό να αποδείξουμε από τα αξιώματα της **ZDC** ότι υπάρχει σύνολο $A$, τέτοιο που να περιέχει το κενό και να είναι κλειστό για τον τελεστή του δυναμοσυνόλου.

Αποδειξη. . Συμβολικά, η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε ανεξάρτητη της **ZDC** είναι η εξής:

$$\phi \iff_{\text{ορ}} (\exists A)[\emptyset \in A \ \&\ (\forall X)[X \in A \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \in A]].$$

Ας δεχτούμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η $\phi$ είναι θεώρημα της **ZDC**. Επειδή το ελάχιστο πρότυπο του Zermelo $\mathcal{Z}$ έχει όλες τις ιδιότητες κλειστότητας που απαιτούν τα αξιώματα της **ZDC**, κάθε απόδειξη της $\phi$ απ' αυτά τα αξιώματα μεταφράζεται σε απόδειξη της ερμηνείας της $\phi$ στο $\mathcal{Z}$, που είναι

$$\phi^{(\mathcal{Z})} \iff (\exists A \in \mathcal{Z})[\emptyset \in A \ \&\ (\forall X \in \mathcal{Z})[X \in A \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \in A]].$$

Άρα η $\phi^{(\mathcal{Z})}$ αληθεύει, δηλαδή υπάρχει σύνολο $A \in \mathcal{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\emptyset \in A \ \&\ (\forall X \in \mathcal{Z})[X \in A \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \in A],$$

που εξαιτίας της μεταβατικότητας του $\mathcal{Z}$ είναι ισοδύναμο με την

$$\emptyset \in A \ \&\ (\forall X)[X \in A \Longrightarrow \mathcal{P}(X) \in A]\cdot$$

αλλά το **B.1** εγγυάται ακριβώς ότι κανένα $A \in \mathcal{Z}$ δεν ικανοποιεί την **B.2**, και φτάσαμε σε άτοπο. $\dashv$

Το επιχείρημα έχει κάπως παράξενη υφή, εκτός αν ξέρεις Λογική, και οπωσδήποτε δεν είναι πλήρες, μόνο σκιαγραφία. Αυτό που μας λείπει είναι αυστηρός ορισμός της ερμηνείας μιας πρότασης στο $\mathcal{Z}$ που επικαλεστήκαμε στην κίνηση από την $\phi$ στην $\phi^{(\mathcal{Z})}$, και καλό είναι να ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει κάποιον παραδοσιακό, κλασικό μαθηματικό, ίσως έναν αναλύστα της παλιάς σχολής που δεν ενδιαφέρεται για τη γενική συνολοθεωρία· έχει διαβάσει τα Κεφάλαια **3** - **10** και το Παράρτημα **A** και έχει πειστεί ότι όλα τα αντικείμενα που χρειάζεται για τη δουλειά του ζουν στο $\mathcal{Z}$. Σε μια προσπάθεια να απλοποιήσει τον κόσμο του, βγάζει δημόσια ανακοίνωση ότι από δω και μπρος, όταν λέει «αντικείμενο» θα εννοεί «μέλος του $\mathcal{Z}$», το $\mathcal{Z}$ είναι ο κόσμος του. Ας υποθέσουμε επίσης ότι αυτό το πρόσωπο τώρα απαγγέλλει το Αξίωμα Δυναμοσυνόλου και δηλώνει ότι το πιστεύει. *Τι ακριβώς εννοεί;* Όπως το εκφράσαμε στο Κεφάλαιο **3**, το αξίωμα λέει το εξής:

(**IV**) : *Για κάθε αντικείμενο $A$, υπάρχει σύνολο $B$, τέτοιο ώστε για κάθε $X$,*

$$X \in B \iff Set(X) \ \&\ (\forall t)[t \in X \Longrightarrow t \in A].$$

Αν αντικαταστήσουμε «*αντικείμενο*» με «*μέλος του $\mathcal{Z}$*» σ' αυτή την πρόταση, έχουμε κάτι διαφορετικό:

$(\mathbf{IV})^{(\mathcal{Z})}$ : *Για κάθε $A \in \mathcal{Z}$, υπάρχει σύνολο $B \in \mathcal{Z}$, τέτοιο ώστε για κάθε $X \in \mathcal{Z}$,*

$$X \in B \iff Set(X) \ \&\ (\forall t \in \mathcal{Z})[t \in X \Longrightarrow t \in A].$$

Αυτό είναι που ο φίλος μας εννοεί όταν ισχυρίζεται ότι κάθε σύνολο έχει δυναμοσύνολο, και διαφέρει αρκετά από το Αξίωμα Δυναμοσυνόλου ώστε να μην είναι αμέσως προφανές. Για να το αποδείξουμε, για κάθε $A \in \mathcal{Z}$, φυσικά επιλέγουμε $B = \mathcal{P}(A)$, που είναι επίσης μέλος του $\mathcal{Z}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $X \in \mathcal{Z}$,

$$(\forall t \in \mathcal{Z})[t \in X \Longrightarrow t \in A] \iff (\forall t)[t \in X \Longrightarrow t \in A],$$

εύκολα, από τη μεταβατικότητα του $\mathcal{Z}$. Άρα η $\mathbf{B}$ είναι ισοδύναμη με την

$$X \in B \iff Set(X) \ \& \ (\forall t)[t \in X \Longrightarrow t \in A],$$

που ισχύει για κάθε $X$, και επομένως (ειδικότερα) για κάθε $X \in \mathcal{Z}$.

Πράγματι, όλα τα αξιώματα της **ZAC** αποφέρουν αληθείς προτάσεις αν αντικαταστήσουμε σ' αυτά *«αντικείμενο»* με *«μέλος του $\mathcal{Z}$»* μ' αυτό τον τρόπο. Συνεπώς όλα τα θεωρήματα που συνάγονται από τα αξιώματα της **ZAC** *μόνο με τη λογική* αποφέρουν αληθείς προτάσεις όταν τα ερμηνεύσουμε στο $\mathcal{Z}$ με τον ίδιο τρόπο και ο κλασικός αναλύστας της φαντασίας μας μπορεί να εργαστεί στην **ZAC** με ασφάλεια, και με τη σιγουριά ότι αποδείχνει προτάσεις που αληθεύουν στον κόσμο του. Αυτό το όχι τόσο τετριμμένο αποτέλεσμα εκφράζει το γεγονός ότι το $\mathcal{Z}$ είναι «πρότυπο» της **ZAC**, που ορίζεται αυστηρά ως εξής.

**B.3.** Κόσμος συνόλων (set universe) $\mathcal{M}$ είναι τριάδα $M, S, E$, μιας κλάσης (ίσως συνόλου) $M$, μιας «υποκλάσης» $S \subseteq M$ και μιας διμελούς, οριστικής συνθήκης $E$ τέτοιας ώστε $E(x, y) \Longrightarrow x, y \in M$ και για κάθε $x \in M$,

$$\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x) =_{\text{ορ}} \{t \mid tEx\} \text{ είναι σύνολο,}$$

που σημαίνει ότι για κάποιο σύνολο $X$ και κάθε $t$,

$$t \in X \iff E(t, x).$$

Χρησιμοποιούμε συνώνυμα τους συμβολισμούς

$$tEx \iff E(t, x)$$

για τη συνθήκη $E$ που ερμηνεύει τη συνθήκη $\in$ στο $\mathcal{M}$, και καλούμε το σύνολο $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x)$, **σώμα** του $x$, για κάθε $x \in M$. Τα $\mathcal{M}$-**αντικείμενα** είναι τα μέλη του $M$ και τα $\mathcal{M}$-**σύνολα** είναι τα μέλη του $S$. Μια $n$-αδική οριστική συνθήκη είναι $\mathcal{M}$-**συνθήκη** αν ισχύει μόνο για αντικείμενα του $M$, δηλαδή

$$P(x_1, \ldots, x_n) \Longrightarrow x_1, \ldots, x_n \in M\cdot$$

και ένας τελεστής $F$ $n$ μεταβλητών είναι $\mathcal{M}$-**τελεστής**, αν αντιστοιχίζει $\mathcal{M}$-αντικείμενα σε $\mathcal{M}$-αντικείμενα, δηλαδή

$$x_1, \ldots, x_n \in M \Longrightarrow F(x_1, \ldots, x_n) \in M.$$

Ο κόσμος $\mathcal{M}$ είναι **φυσικός** (natural) αν η κλάση $M$ είναι μεταβατική και οι $S$, $E$ είναι οι συνήθεις συνθήκες του «είναι σύνολο» και «ανήκειν», δηλαδή

$$\begin{aligned} X \in M &\implies X \subseteq M, \\ x \in S &\iff x \in M \ \& \ Set(x), \\ xEy &\iff x, y \in M \ \& \ x \in y. \end{aligned}$$

Ένας φυσικός κόσμος $\mathcal{M}$ καθορίζεται από τη μεταβατική κλάση $M$ των αντικειμένων του και θα τον ταυτίσουμε μ' αυτή την κλάση, δηλαδή όταν αναφερόμαστε στον *κόσμο* $M$ για μια μεταβατική κλάση $M$, θα εννοούμε τον φυσικό κόσμο με αντικείμενα τα μέλη της $M$. Το σώμα αντικειμένου σ' ένα φυσικό κόσμο είναι το σύνολο των μελών του,

$$\mathbf{b}_M(x) = \{t \mid t \in x\}, \quad (x \in M)\cdot$$

έτσι $\mathbf{b}_M(x) = x$, αν το $x$ είναι σύνολο, αλλά $\mathbf{b}_M(x) = \emptyset$ αν το $x$ είναι άτομο.

Η **σχετικοποίηση** (relativization) σ' έναν κόσμο $\mathcal{M}$ μιας πρότασης $\theta$ είναι η πρόταση $\theta^{(\mathcal{M})}$ που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στην $\theta$ «αντικείμενο» με «$\mathcal{M}$-αντικείμενο», «σύνολο» με «$\mathcal{M}$-σύνολο», «$x \in y$» με «$xEy$», «συνθήκη» με «$\mathcal{M}$-συνθήκη» και «τελεστής» με «$\mathcal{M}$-τελεστής», με συνέπεια, σε όλες τις εμφανίσεις αυτών των εκφράσεων στην $\theta$. Αν η πρόταση $\theta^{(\mathcal{M})}$ αληθεύει, λέμε ότι **η $\theta$ αληθεύει στον κόσμο** $\mathcal{M}$ ή ότι **ο κόσμος** $\mathcal{M}$ **ικανοποιεί την $\theta$.**

Ο κόσμος $\mathcal{M}$ είναι **πρότυπο** ή **μοντέλο** (model) ενός αξιωματικού συστήματος $\mathbf{T}$, αν κάθε αξίωμα του $\mathbf{T}$ αληθεύει στον $\mathcal{M}$, δηλαδή αν η σχετικοποίηση $\theta^{(\mathcal{M})}$ κάθε αξιώματος $\theta$ του $\mathbf{T}$ είναι αληθινή πρόταση. Σ' αυτή την περίπτωση καλούμε επίσης τον $\mathcal{M}$ **κόσμο του T** ή απλούστερα **T-κόσμο**.

**B.4.** Προτάσεις και σχετικοποιήσεις. *Πρόταση* (proposition) είναι μια οριστική, μαθηματική δήλωση, ένας λεκτικός ισχυρισμός όπως τα αξιώματα, θεωρήματα και εικασίες τα οποία μελετάμε. Αυτός δεν είναι βέβαια αυστηρός ορισμός, και δεν μπορεί να είναι, εφόσον η καθημερινή γλώσσα των μαθηματικών δεν είναι αυστηρά προσδιορισμένη. Στην ουσία δεχόμαστε ότι για όλα τα αντικείμενα $x$, $y$, οι εκφράσεις $x = y$, $x \in y$ και $Set(x)$ είναι προτάσεις· ότι για κάθε οριστική συνθήκη $P$ και όλα τα αντικείμενα $x_1, \ldots, x_n$, η έκφραση $P(x_1, \ldots, x_n)$ είναι πρόταση· και ότι οι προτάσεις συνενώνονται με τις θεμελιακές πράξεις της λογικής $\neg, \vee, \exists$ κ.λπ. Η σχετικοποίηση[33] μιας πρότασης σ' έναν κόσμο συνόλων $\mathcal{M}$ υπολογίζεται με το φυσικό τρόπο, π.χ.

$$\begin{aligned}
(x = y)^{(\mathcal{M})} &: x = y,\\
Set(x)^{(\mathcal{M})} &: x \in S,\\
(x \in y)^{(\mathcal{M})} &: xEy,\\
P(x_1, \ldots, x_n)^{(\mathcal{M})} &: P(x_1, \ldots, x_n),\\
(\neg\theta)^{(\mathcal{M})} &: \neg(\theta^{(\mathcal{M})}),\\
(\phi \ \&\ \psi)^{(\mathcal{M})} &: \phi^{(\mathcal{M})} \ \&\ \psi^{(\mathcal{M})},\\
((\forall x)\phi)^{(\mathcal{M})} &: (\forall x \in M)\phi^{(\mathcal{M})},\\
((\forall P)\phi)^{(\mathcal{M})} &: (\forall P)[(\forall x, y)[P(x, y) \Longrightarrow x, y \in M] \Longrightarrow \phi^{(\mathcal{M})}],
\end{aligned}$$

[33]Οι γνώστες τυπικής λογικής ίσως εικάσουν ότι ο τελείως ακριβής (συντακτικός) μετασχηματισμός σχετικοποίησης *τύπων* είναι ευκολότερος στην κατανόηση απ' αυτόν που χρησιμοποιούμε, που ορίζεται κατευθείαν σε προτάσεις της «μαθηματικής, κοινής γλώσσας». Αλλά πριν εφαρμόσουμε τον τυπικό μετασχηματισμό σχετικοποίησης, πρέπει να «τυποποιήσουμε» τις προτάσεις της καθημερινής γλώσσας που σε τελευταία ανάλυση μας ενδιαφέρουν, και λίγη σκέψη πείθει ότι ο *μετασχηματισμός τυποποίησης* είναι ακριβώς τόσο «ασαφής» όσο και ο διαισθητικός μετασχηματισμός σχετικοποίησης που δεχόμαστε εδώ. Μπορεί κανείς να υποστηρίξει την ιδέα, ότι καταλαβαίνουμε πώς να τυποποιήσουμε μια πρόταση τότε και μόνον αν γνωρίζουμε πώς να την ερμηνεύσουμε σε κάθε δομή, δηλαδή ακριβώς αν καταλαβαίνουμε τις διαισθητικές της σχετικοποιήσεις.

όπου η $P$ είναι διμελής, οριστική συνθήκη κ.λπ. Στις αποδείξεις που ακολουθούν θα διατυπώσουμε σχολαστικά τη σχετικοποίηση κάθε πρότασης με την οποία θα ασχοληθούμε: αυτό θα μας δώσει πολλά παραδείγματα που είναι χρήσιμα για την κατανόηση της έννοιας, αλλά επίσης θα μας εξασφαλίσει ότι τα συγκεκριμένα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν είναι αυστηρά διατυπωμένα και αποδειγμένα. Η σημασία όμως των αποτελεσμάτων στηρίζεται στην εξής, γενική αρχή, που λέει απλώς ότι λογικά επακόλουθα αληθών (στο $M$) προτάσεων επίσης αληθεύουν (στο $M$), και ισχύει βέβαια για όλα τα πρότυπα οποιασδήποτε αξιωματικής θεωρίας, όχι μόνο κόσμους συνόλων.

**B.5.** Αρχή Ορθότητας Λογικής Συνέπειας. Αν μια πρόταση $\theta$ είναι θεώρημα αξιωματικού συστήματος $\mathbf{T}$ (δηλαδή αποδείχνεται από τα αξιώματα του $\mathbf{T}$ μόνο με τη λογική), τότε κάθε κόσμος της $\mathbf{T}$ ικανοποιεί την $\theta$.

**B.6.** Κόσμοι και γενικά πρότυπα. Σύμφωνα με την ανάλυση στο **8.22**, για να ορίσουμε πρότυπο αξιωματικής συνολοθεωρίας πρέπει να καθορίσουμε ένα πεδίο αντικειμένων, να ορίσουμε σ' αυτό τις βασικές συνθήκες του «να είναι σύνολο» και «να ανήκει», και επίσης να καθορίσουμε ποιες συνθήκες και ποιοι τελεστές στο πεδίο θα δεχτούμε ως οριστικούς. Οι κόσμοι συνόλων είναι ειδικά πρότυπα για δύο σημαντικούς λόγους.

(1) Όταν θεωρούμε έναν κόσμο συνόλων $\mathcal{M}$ ως πρότυπο κάποιας αξιωματικής συνολοθεωρίας, δεχόμαστε ως *οριστικές συνθήκες* του $\mathcal{M}$ όλες τις οριστικές συνθήκες του βασικού μας κόσμου $\mathcal{W}$, και δεχόμαστε ως *οριστικούς τελεστές* του $\mathcal{M}$ όλους τους $\mathcal{M}$-τελεστές, δηλαδή τους οριστικούς τελεστές του $\mathcal{W}$ που αντιστοιχίζουν $\mathcal{M}$-αντικείμενα σε $\mathcal{M}$-αντικείμενα.[34] Είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι όλα τα αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές που απαριθμήσαμε στο **3.18** ισχύουν μ' αυτή την ερμηνεία, Πρόβλημα **xB.1**: επομένως, για να δείξουμε ότι ένας κόσμος συνόλων $\mathcal{M}$ είναι πρότυπο (ας πούμε) της **ZFDC**, αρκεί να αποδείξουμε τις σχετικοποιήσεις στον $\mathcal{M}$ των αξιωμάτων (**I**) - (**VIII**).

(2) Επειδή δεχόμαστε εξ ορισμού ότι για κάθε $x \in M$, το σώμα $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x)$ είναι σύνολο, τα $\mathcal{M}$-σύνολα δεν είναι «μεγαλύτερα» από τα αληθινά σύνολα στο $\mathcal{W}$, π.χ. δεν μπορεί να υπάρχει $\mathcal{M}$-σύνολο $x$ τέτοιο ώστε για κάθε $t$, $tEx$.

Οι φυσικοί κόσμοι είναι ακόμη ειδικότεροι, αφού περιορίζουν μόνο το πεδίο αντικειμένων σε κάποια μεταβατική κλάση — και αυτό διευκολύνει σημαντικά την κατανόηση της σχετικοποίησης γι' αυτούς. Από τη μαθηματική σκοπιά, οι φυσικοί κόσμοι είναι *υποκόσμοι* του $\mathcal{W}$ και «κληρονομούν» τη δομή τους από τον $\mathcal{W}$, όπως οι υποομάδες, μερικά διατεταγμένοι υποχώροι, τοπολογικοί υποχώροι, κ.λπ. καθορίζονται από κάποιο υποσύνολο δοσμένου χώρου και κληρονομούν απ' αυτόν την ανάλογη δομή. Η επιπρόσθετη λεπτότητα στην προκειμένη περίπτωση είναι ότι πρέπει να ερμηνεύσουμε (να σχετικοποιήσουμε) σ' αυτούς τους υποκόσμους(!) προτάσεις που είναι λογικά περίπλοκες, πολύ πιο περίπλοκες από

[34] Με σχολαστικότητα, οι οριστικές συνθήκες του $\mathcal{M}$ είναι οι περιορισμοί στην κλάση $M$ των οριστικών συνθηκών του $\mathcal{W}$, και ανάλογα για τους τελεστές.

τις απλές εξισώσεις ή συμπεριλήψεις που τυπικά μελετάμε στην Άλγεβρα ή την Τοπολογία.

Αρχίζουμε με την επαλήθευση αξιωμάτων που έχουμε ήδη μελετήσει, σε κόσμους που έχουμε ήδη εισαγάγει, όπου οι έννοιες είναι οικείες.

**B.7. Λήμμα.** *Κάθε μεταβατική κλάση ικανοποιεί το Αξίωμα Έκτασης.*

Αποδειξη. . Η σχετικοποίηση στο $M$ του Αξιώματος Έκτασης είναι η εξής: $(\mathbf{I})^{(M)}$ : *Για όλα τα σύνολα* $A, B \in M$,

$$A = B \iff (\forall x \in M)[x \in A \iff x \in B].$$

Αν $A = B$, τότε τα $A$ και $B$ έχουν τα ίδια μέλη, ώστε σίγουρα έχουν τα ίδια μέλη στο $M$. Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, πρέπει να δείξουμε ότι αν $A \neq B$, τότε υπάρχει κάποιο $x \in M$, τέτοιο ώστε είτε $x \in A \setminus B$ ή $x \in B \setminus A$· αλλά αν $A \neq B$, τότε σίγουρα υπάρχει κάποιο

$$x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B,$$

και $A, B \subseteq M$ επειδή το $M$ είναι μεταβατική κλάση, άρα αυτό το $x$ είναι επίσης μέλος του $M$. ⊣

**B.8. Λήμμα.** *Κάθε κόσμος του Zermelo είναι φυσικός κόσμος των αξιωμάτων* $(\mathbf{I})$ - $(\mathbf{VI})$.

Αποδειξη. . Θεωρούμε στη σειρά καθένα από τα αξιώματα $(\mathbf{I})$ - $(\mathbf{VI})$, εκτός από το $(\mathbf{I})$ (που μόλις δείξαμε) και το $(\mathbf{IV})$ για το οποίο δώσαμε την απόδειξη στο παράδειγμα πιο πάνω. Ο σοβαρός μαθητής πρέπει να συγκρίνει τη σχετικοποίηση κάθε αξιώματος στο $M$ που πρέπει να αποδείξουμε με την αρχική διατύπωση του ίδιου αξιώματος στο Κεφάλαιο **3**.

$(\mathbf{II})^{(M)}$ : Κενό σύνολο και ζεύγος. (a) *Υπάρχει κάποιο ειδικό αντικείμενο* $y \in M$ *που είναι σύνολο αλλά δεν έχει μέλη στο* $M$. (b) *Για όλα τα αντικείμενα* $x, y \in M$, *υπάρχει σύνολο* $z \in M$ *τέτοιο ώστε*

$$(\forall t \in M)[t \in z \iff t = x \vee t = y].$$

(a) $\emptyset \in M$ από την υπόθεση, δεν έχει κανένα μέλος, και επομένως δεν έχει κανένα μέλος στο $M$. (b) Αν $x, y \in M$, τότε $z = \{x, y\} \in M$ από την υπόθεση, και προφανώς αυτό το $z$ ικανοποιεί την **B.8**, εφόσον ικανοποιεί την ισχυρότερη

$$(\forall t)[t \in z \iff [t = x \vee t = y].$$

$(\mathbf{III})^{(M)}$ : Αξίωμα Διαχωρισμού. *Για κάθε* $A \in M$ *και κάθε μονομελή, οριστική συνθήκη* $P$, *υπάρχει σύνολο* $B \in M$ *που ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$(\forall x \in M)[x \in B \iff x \in A \ \& \ P(x)].$$

Έστω $A \in M$. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού υπάρχει κάποιο $B$ που ικανοποιεί την

$$(\forall x)[x \in B \iff x \in A \ \& \ P(x)].$$

Προφανώς $B \subseteq A$, άρα $B \in \mathcal{P}(A) \in M$, άρα $B \in M$, αφού το $M$ είναι μεταβατικό, και η **B.8** συνεπάγεται την ασθενέστερη **B.8**.

$(\mathbf{V})^{(M)}$ : Αξίωμα Ένωσης. *Για κάθε $\mathcal{E} \in M$, υπάρχει σύνολο $B \in M$ που ικανοποιεί την ισοδυναμία*

$$(\forall t \in M)[t \in B \iff (\exists X \in M)[X \in \mathcal{E} \;\&\; t \in X]].$$

Θέτουμε $B = \bigcup \mathcal{E}$, που είναι μέλος του $M$ από την υπόθεση και ικανοποιεί την ισοδυναμία

$$(\forall t)[t \in B \iff (\exists X)[X \in \mathcal{E} \;\&\; t \in X]].$$

Από τη μεταβατικότητα του $M$ για μια ακόμη φορά, για κάθε $t$,

$$(\exists X)[X \in \mathcal{E} \;\&\; t \in X] \iff (\exists X \in M)[X \in \mathcal{E} \;\&\; t \in X]],$$

άρα η **B.8** είναι ισοδύναμη με την

$$(\forall t \in M)[t \in B \iff (\exists X)[X \in \mathcal{E} \;\&\; t \in X]$$

που έπεται από την ισχυρότερη **B.8**.

$(\mathbf{VI})^{(\mathcal{Z})}$ : Αξίωμα Απείρου. *Υπάρχει σύνολο $I \in \mathcal{Z}$ τέτοιο ώστε*

$$\emptyset \in I \;\&\; (\forall x \in \mathcal{Z})[x \in I \Longrightarrow \{x\} \in I].$$

Αυτό είναι απλό, παίρνοντας $I = N_0 \in M$. ⊣

**B.9. Θεώρημα.** (1) *Κάθε κόσμος του Zermelo είναι φυσικός κόσμος της* **ZDC**, *και κάθε Z-F κόσμος είναι φυσικός κόσμος της* **ZFDC**.

(2) (**AC**) *Κάθε Zermelo κόσμος είναι φυσικός κόσμος της* **ZAC**, *και κάθε Z-F κόσμος είναι φυσικός κόσμος της* **ZFAC**.

*Ειδικότερα, το $\mathcal{Z}$ και κάθε $M(I)$ τέτοιο ώστε $N_0 \subseteq I$ είναι φυσικοί κόσμοι της* **ZDC** *ή της* **ZAC**, *αν δεχτούμε το* **AC**.

(3) (von Neumann) (**AC**) *Ο κόσμος του von Neumann $\mathcal{V}$ είναι φυσικός κόσμος της* **ZFC**.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Οι σχετικοποιήσεις των **DC** και **AC** αποδείχτηκαν στο **11.23**, και η σχετικοποίηση του Αξιώματος Αντικατάστασης είναι ακριβώς αυτό που απαιτήσαμε από τους Z-F κόσμους στον ορισμό τους **11.33**. Για το (3) έχουμε ήδη δείξει ότι η κλάση $\mathcal{V}$ είναι Z-F κόσμος στο **11.34**, έτσι που απομένει μόνο να επαληθεύσουμε τις σχετικοποιήσεις στην $\mathcal{V}$ των Αρχών Αγνότητας **3.25** και Θεμελίωσης, **11.29**. Η πρώτη απ' αυτές είναι

*Αγντητα*$^{(\mathcal{V})}$ : *Για κάθε $x \in \mathcal{V}$, $Set(x)$,*

και αληθεύει απλώς επειδή κάθε αντικείμενο στην $\mathcal{V}$ είναι σύνολο, και η ερμηνεία του «να είναι σύνολο» στον $\mathcal{V}$ είναι αυτή του $\mathcal{W}$. Για την Αρχή Θεμελίωσης είναι ευκολότερο να σχετικοποιήσουμε την απλή της εκδοχή του **11.30**.

*Θεμελωση*$^{(\mathcal{V})}$ : *Κάθε σύνολο $X \in \mathcal{V}$ έχει κάποιο μέλος $m \in X$ τέτοιο ώστε η τομή $m \cap X$ να είναι κενή στο $\mathcal{V}$, δηλαδή*

$$(\forall t \in \mathcal{V})[t \notin m \vee t \notin X].$$

Το αντίθετο αυτής της πρότασης μας δίνει κάποια $X \in \mathcal{V}$ και $a \in X$, τέτοια ώστε

$$(\forall m \in X)(\exists t \in X)[t \in m],$$

που από το **DC** (όπως και στην απόδειξη του **11.30**) συνεπάγεται ότι το $X$ δεν είναι εδραιωμένο, γεγονός που αντιτίθεται στην υπόθεση ότι $X \in \mathcal{V}$. $\dashv$

Από την Ορθότητα Λογικής Συνέπειας **B.5** και το **B.9** προκύπτουν εύκολα πολλά απλά αλλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα ανεξαρτησίας για τις θεωρίες **ZDC** και **ZAC**: για να δείξουμε π.χ. ότι μια πρόταση $\theta$ δεν είναι θεώρημα της **ZDC**, αρκεί να βρούμε κάποιο $I \supseteq N_0$, τέτοιο ώστε η $\theta^{(M(I))}$ να μην αληθεύει. Ακριβώς μ' αυτή τη μέθοδο αποδείξαμε το **B.2**, κάπως αδέξια χωρίς τους αυστηρούς ορισμούς. Τα προβλήματα διερευνούν μερικά παραδείγματα τέτοιων αποτελεσμάτων.

Με τον ίδιο τρόπο συλλογισμού, από το (3) του Θεωρήματος **B.9** συμπεραίνουμε ότι *οι Αρχές Αγνότητας και Θεμελίωσης δεν διαψεύδονται από τη θεωρία* **ZFAC**, επειδή ο κόσμος $\mathcal{V}$ είναι πρότυπο της **ZFAC** που ικανοποιεί επιπλέον αυτές τις αρχές. Θα έπρεπε να είναι εξίσου προφανές ότι κι αυτές οι αρχές δεν είναι θεωρήματα της **ZFAC**, αλλά για να το αποδείξουμε αυτό αυστηρά πρέπει να κατασκευάσουμε κόσμους της **ZFAC** που δεν είναι φυσικοί. Το βασικό εργαλείο για τέτοιες κατασκευές είναι η εξής απλή έννοια.

**B.10. Ορισμός.** Ένας κόσμος συνόλων $\mathcal{M} = M, S, E$, είναι **κόσμος του Rieger** αν για κάθε σύνολο $Y \subseteq M$, υπάρχει ακριβώς ένα $\mathcal{M}$-σύνολο $X$ τέτοιο ώστε $Y = \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(X)$. Για κάθε $Y \subseteq M$ θέτουμε

$$\rho_{\mathcal{M}}(Y) =_{\text{ορ}} \text{το μοναδικό } X \in S \text{ τέτοιο ώστε } \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(X) = Y,$$

έτσι που ο $\rho_{\mathcal{M}}$ να είναι οριστικός τελεστής, και εξ ορισμού, για κάθε $Y \subseteq M$,

$$X = \rho_{\mathcal{M}}(Y) \iff X \in S \;\&\; \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(X) = Y, \tag{B-1}$$

$$tE\rho_{\mathcal{M}}(Y) \iff t \in Y. \tag{B-2}$$

**B.11.** Θεώρημα του Rieger. Κάθε κόσμος του Rieger είναι κόσμος της **ZFDC**.

Αποδειξη. . Έστω $\mathcal{M} = M, S, E$ κόσμος συνόλων με την ιδιότητα του Rieger, και έστω $\mathbf{b}(x) = \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(x)$, παραλείποντας τον δείκτη εφόσον θα αναφερθούμε μόνο στον $\mathcal{M}$. Επαληθεύουμε στη σειρά τις σχετικοποιήσεις όλων των αξιωμάτων της **ZFDC**.

$(\mathbf{I})^{(\mathcal{M})}$ Αξίωμα Έκτασης : *Για όλα τα* $A, B \in M$, αν $S(A)$ και $S(B)$, τότε

$$A = B \iff (\forall x \in M)[xEA \iff xEB].$$

Αν $A = B$, τότε βέβαια, για κάθε $x$, $xEA \iff xEB$. Αντιστρόφως, αν για κάθε $x \in M$, $xEA \iff xEB$, τότε $\mathbf{b}(A) = \mathbf{b}(B)$· από την ιδιότητα του Rieger, υπάρχει ακριβώς ένα $C \in S$ τέτοιο ώστε $\mathbf{b}(A) = \mathbf{b}(C)$, άρα $C = A$ και επίσης $C = B$, άρα $A = B$.

$(\mathbf{II})^{(\mathcal{M})}$ Αξίωμα του Κενού και του Ζεύγους: (a) *Υπάρχει ένα ειδικό αντικείμενο* $y \in S$ *τέτοιο ώστε* $(\forall t \in M)\neg tEy$. (b) *Για όλα τα* $x, y \in M$, *υπάρχει κάποιο* $z \in S$ *τέτοιο ώστε*

$$(\forall t \in M)[tEz \iff t = x \vee t = y].$$

Από την ιδιότητα του Rieger, για το (a), έστω $y$ τέτοιο ώστε $y \in S$ και $\mathbf{b}(y) = \emptyset$, και για το (b), έστω $z \in S$ τέτοιο ώστε $\mathbf{b}(z) = \{x, y\}$. Για την περίπτωση (b) π.χ., υπολογίζουμε:

$$tEz \iff t \in \mathbf{b}(z) \iff [t = x \vee t = y].$$

$(\mathbf{IV})^{(\mathcal{M})}$ Αξίωμα Δυναμοσυνόλου : *Για κάθε $A \in M$, υπάρχει $B \in S$, τέτοιο ώστε για κάθε $X \in M$,*

$$XEB \iff X \in S \;\&\; (\forall t \in M)[tEX \Longrightarrow tEA].$$

Έστω $A \in M$. Από την ιδιότητα Rieger, υπάρχει κάποιο $B \in S$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{b}(B) = \{\rho(Y) \mid Y \subseteq \mathbf{b}(A)\},$$

όπου $\rho(Y) = \rho_{\mathcal{M}}(Y)$ είμαι ο τελεστής του Rieger για τον κόσμο $\mathcal{M}$ που υπάρχει από το **B.10**. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
XEB &\iff X \in \mathbf{b}(B). \\
&\iff (\exists Y)[Y \subseteq \mathbf{b}(A) \;\&\; X = \rho(Y)], \\
&\iff (\exists Y)[Y \subseteq \mathbf{b}(A) \;\&\; [X \in S \;\&\; \mathbf{b}(X) = Y]], \text{από την } \mathbf{B-1}, \\
&\iff X \in S \;\&\; \mathbf{b}(X) \subseteq \mathbf{b}(A) \\
&\iff X \in S \;\&\; (\forall t \in M)[tEX \Longrightarrow tEA].
\end{aligned}$$

Οι αποδείξεις των υπόλοιπων αξιωμάτων στον $\mathcal{M}$ είναι παρόμοιες, ακολουθώντας τις ιδέες της απόδειξης του Θεωρήματος **B.9**. Τις αφήνουμε για ασκήσεις. ⊣

**B.12. Άσκηση.** *Δείξτε ότι ένας κόσμος συνόλων $\mathcal{M} = M, S, E$ είναι κόσμος του Rieger τότε και μόνον αν (1) ο $\mathcal{M}$ ικανοποιεί το Αξίωμα Έκτασης, και (2) για κάθε $Y \subseteq M$, υπάρχει $X \in S$ τέτοιο ώστε $\mathbf{b}_{\mathcal{M}}(X) = Y$.*

**B.13. Άσκηση.** *Κάθε κόσμος του Rieger είναι πρότυπο των Αξιωμάτων Διαχωρισμού* (**III**) *και Αντικατάστασης* (**VIII**).

**B.14. Άσκηση.** (**AC**) *Κάθε κόσμος του Rieger είναι πρότυπο της* **ZFAC**.

**B.15.** Σχετικοποίηση «πιστά απεικονισμένων» εννοιών. Οι αυστηρές διατυπώσεις των Αρχών Επιλογής **DC** και **AC** χρησιμοποιούν τις έννοιες της «συνάρτησης», που ορίσαμε στο Κεφάλαιο **4** με αναφορά σε κάποιον «καθορισμένο» τελεστή διατεταγμένου ζεύγους **4.1**, και του «συστήματος φυσικών αριθμών», που επίσης είναι «καθορισμένο» δομημένο σύνολο με συγκεκριμένες ιδιότητες, **5.9**. Η σχετικοποίηση τέτοιων «πιστά απεικονισμένων» εννοιών δεν είναι τελείως προφανής, εφόσον (π.χ.) ο δοσμένος κόσμος $\mathcal{M}$ μπορεί να μην είναι καν κλειστός για τον καθορισμένο τελεστή ζεύγους. Στα **11.23** και **B.9** αποφύγαμε το πρόβλημα απαιτώντας από τον καθορισμένο τελεστή ζεύγους να είναι αυτός του Kuratowski, για τον οποίο κάθε κόσμος που ικανοποιεί τα (**I**)- (**VI**) είναι κλειστός, αλλά ίσως κάποια αβεβαιότητα να έχει παραμείνει για το πώς (και αν) μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα σε όλη του τη γενικότητα. Για τους κόσμους του Rieger, υπάρχει μια απλή λύση, που σκιαγραφούμε στα Προβλήματα **xB.13**, **xB.14**. Όταν αναφερόμαστε σε κόσμους του Rieger, θα υποθέτουμε πάντα, χωρίς ιδιαίτερη μνεία, ότι έχουμε επιλέξει κάποιο συγκεκριμένο τελεστή ζεύγους, ένα σύστημα φυσικών αριθμών, κ.λπ., και ότι υπολογίζουμε σχετικοποιήσεις προτάσεων που αναφέρονται σ' αυτές τις απεικονισμένες έννοιες με αναφορά σ' αυτά τα καθορισμένα αντικείμενα. Τα Προβλήματα **xB.13**, **xB.14** ξεκαθαρίζουν ότι οι συγκεκριμένες επιλογές που έχουμε κάνει δεν επηρεάζουν τα αποτελέσματα.

**B.16. Πρόταση.** *Υπάρχει κόσμος του Rieger $\mathcal{M}_a$ στον οποίο κάθε σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο σύνολο ατόμων· ειδικότερα, δεν μπορούμε να αποδείξουμε στην* **ZFDC** *ότι κάθε σύνολο είναι αγνό.*

Αποδειξη. . Η ιδέα είναι να απεικονίσουμε κάθε σύνολο $A$ με το ζεύγος $(0, A)$ στον κόσμο $\mathcal{M}_a$ και να δηλώσουμε ότι κάθε αντικείμενο που δεν απεικονίζει σύνολο μ' αυτό τον τρόπο είναι άτομο. Θέτουμε:

$$\begin{aligned} x \in M_a &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x = x, \text{ έτσι που } M_a = \mathcal{W}, \\ x \in S_a &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} (\exists A)[Set(A) \ \&\ x = (0, A)], \\ x E_a (0, A) &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} x \in A, \end{aligned}$$

και απομένει να δείξουμε ότι η τριάδα $\mathcal{M}_a = M_a, S_a, E_a$ είναι κόσμος συνόλων, ότι έχει την ιδιότητα του Rieger και ότι ικανοποιεί την πρόταση *«κάθε σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο σύνολο ατόμων»*.

Παραλείποντας τον δείκτη $\mathcal{M}_a$, προφανώς

$$\mathbf{b}(x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν για κάθε σύνολο } A,\ x \neq (0, A), \\ A, & \text{αν για κάποιο (και επομένως μόνο ένα) σύνολο } A,\ x = (0, A), \end{cases}$$

άρα το $\mathbf{b}(x)$ είναι σύνολο. Για την ιδιότητα του Rieger, παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε σύνολο $A \subseteq M_a$, $(0, A) \in S_a$ και $\mathbf{b}((0, A)) = A$· αν $x \in S$ και $\mathbf{b}(x) = A$, τότε $x = (0, B)$ και $\mathbf{b}(x) = B$ για κάποιο σύνολο $B$, εξ ορισμού, έτσι ώστε $A = B$ και $x = (0, A)$, όπως το απαιτεί ο ορισμός. Ο τελεστής του Rieger είναι πολύ απλός σ' αυτή την περίπτωση,

$$\rho(Y) = (0, Y).$$

Η σχετικοποίηση στον $\mathcal{M}_a$ της πρότασης «κάθε σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιο σύνολο ατόμων» είναι η απαίτηση ότι *για κάθε $\mathcal{M}_a$-σύνολο $(0, A)$, υπάρχει αντιστοιχία στον $\mathcal{M}_a$ ανάμεσα στο $(0, A)$ και κάποιο $\mathcal{M}_a$-σύνολο ατόμων $(0, B)$*. Θέτουμε

$$B =_{\text{ορ}} \{(1, t) \mid t \in A\}\cdot$$

προφανώς $(0, B) \in S_a$ και εξ ορισμού,

$$x E_a (0, B) \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow (\forall y)[x \neq (0, y)] \Longrightarrow x \notin S_a,$$

δηλαδή κάθε $\mathcal{M}_a$-μέλος του $(0, B)$ είναι άτομο στον $\mathcal{M}_a$. Αν $(x, y)_a$ είναι ο τελεστής διατεταγμένου ζεύγους στον $\mathcal{M}_a$ και

$$f =_{\text{ορ}} \rho\{(t, (1, t))_a \mid t \in A\},$$

τότε ο κόσμος $\mathcal{M}_a$ αναγνωρίζει το $f$ ως αντιστοιχία των δύο $\mathcal{M}_a$-συνόλων $(0, A)$ και $(0, B)$. $\dashv$

Με την ανθρωπομορφική έκφραση «*ο $\mathcal{M}_a$ αναγνωρίζει το $f$ ...* » εννοούμε ότι αν $A' = (0, A)$ και $B' = (0, B)$ είναι τα αντικείμενα που εκπροσωπούν στο $M_a$ τα σύνολα $A$, $B$, κι αν θέσουμε

$$\begin{aligned} \theta \iff_{\text{ορ}} f \subseteq A \times B \mathbin{\&} (\forall x \in A')(\exists y \in B')(x, y) \in f \\ \mathbin{\&} (\forall y \in B')(\exists! x \in A')[(x, y) \in f], \end{aligned}$$

τότε η σχετικοποίηση $\theta^{(\mathcal{M}_a)}$ της $\theta$ στον $\mathcal{M}_a$ αληθεύει. Υπολογισμοί σχετικοποιήσεων σαν αυτή είναι περίπλοκοι, και είναι χρήσιμο να δημιουργήσουμε την κατάλληλη «τεχνολογία» που θα μας επιτρέψει να αποδείχνουμε ιδιότητές τους με τους ελάχιστους ρητούς υπολογισμούς. Γι' αυτό το σκοπό, το φυσικό εργαλείο είναι ο εξής παραδοσιακός συμβολισμός από τη γενική θεωρία προτύπων: αν ο $\mathcal{M}$ είναι κόσμος συνόλων και η $\theta$ πρόταση, θέτουμε

$$\mathcal{M} \models \theta \iff_{\text{ορ}} \text{η } \theta \text{ αληθεύει στον } \mathcal{M} \iff \theta^{(\mathcal{M})}.$$

Η έκφραση $\mathcal{M} \models \theta$ διαβάζεται *«ο $\mathcal{M}$ είναι πρότυπο της $\theta$»*, αλλά επίσης *«ο $\mathcal{M}$ αναγνωρίζει ότι $\theta$»*, *«ο $\mathcal{M}$ πιστεύει ότι $\theta$»*, κ.λπ., όπως ακούγεται καλύτερα. Π.χ. για κάθε ζεύγος κλάσεων $M$, $S$ και κάθε διμελή συνθήκη $E$, έστω

$$\begin{aligned} \text{Setuniv}(M, S, E) \iff_{\text{ορ}} & (\forall u, v)[u E v \Longrightarrow u, v \in M] \\ & \mathbin{\&} (\forall t)[t \in S \Longrightarrow t \in M] \\ & \mathbin{\&} (\forall x)[x \in M \Longrightarrow \\ & \qquad (\exists X)[Set(X) \mathbin{\&} (\forall t)[t \in X \iff t E x]] \end{aligned}$$

η κάπως περίπλοκη πρόταση που εκφράζει ότι οι $M$, $S$, $E$ αποτελούν κόσμο συνόλων. Έστω επίσης

$$\begin{aligned} \text{Rieger}(M, S, E) \iff_{\text{ορ}} & (\forall Y)[(Set(Y) \mathbin{\&} Y \subseteq M) \\ & \qquad \Longrightarrow (\exists! X \in S)[Y = \mathbf{b}_{\mathcal{M}}(X)]] \\ \iff & (\forall Y)[(Set(Y) \mathbin{\&} Y \subseteq M) \\ & \qquad \Longrightarrow (\exists! X \in S)(\forall t \in M)[t \in Y \iff t E X]], \end{aligned}$$

η πρόταση που εκφράζει ότι ο $\mathcal{M}$ είναι κόσμος του Rieger. Είναι προτάσεις για τις $M$, $S$ και $E$, οι οποίες μπορεί να αληθεύουν ή να μην αληθεύουν, εξαρτάται· είτε αληθεύουν είτε όχι, οι ερμηνείες (σχετικοποιήσεις) τους σ' έναν κόσμο $\mathcal{M}'$ έχουν νόημα, και μαζί εκφράζουν ότι *ο $\mathcal{M}'$ πιστεύει ότι* οι $M$, $S$, $E$ αποτελούν κόσμο του Rieger! Προκύπτει απ' αυτά μια προφανής ερώτηση, που έχει απλή και χρήσιμη απάντηση, ως εξής.

**B.17. Θεώρημα.** *Έστω κόσμος του Rieger $\mathcal{M}_1 = M_1, S_1, E$, κλάσεις $S_2 \subseteq M_2 \subseteq M_1$, και μια διμελής συνθήκη $E_2$, τέτοια ώστε $x E_2 y \Longrightarrow x, y \in M_2$· αν*

$$\mathcal{M}_1 \models \text{Setuniv}(M_2, S_2, E_2) \mathbin{\&} \text{Rieger}(M_2, S_2, E_2),$$

*τότε ο $\mathcal{M}_2 = M_2, E_2, E_2$ είναι πράγματι κόσμος του Rieger.*

Αποδειξη. . Για να δείξουμε πρώτα ότι ο $\mathcal{M}_2$ είναι κόσμος συνόλων, πρέπει να επαληθεύσουμε ότι για κάθε $x \in M_2$,

$$(\exists Y \in Set)(\forall t)[t \in Y \iff t \in M_2 \ \&\ t E_2 x].$$

Έστω $x \in M_2$. Η πρόταση **B.17** αληθεύει στον $\mathcal{M}_1$, εφόσον

$$\mathcal{M}_1 \models \mathrm{Setuniv}(M_2, S_2, E_2),$$

που σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο $Y_1 \in S_1$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \in M_1$,

$$t E_1 Y_1 \iff t \in M_2 \ \&\ t E_2 x\cdot$$

και αφού ο $\mathcal{M}_1$ είναι κόσμος συνόλων, υπάρχει κάποιο σύνολο $Y$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t$,

$$t \in Y \iff t \in M_1 \ \&\ t E_1 Y_1\cdot$$

τελικά, οι **B.17** και **B.17** μαζί συνεπάγονται αυτό που απαιτεί η **B.17** για το δοσμένο $x \in M_2$ και κάποιο $Y$.

Για να δείξουμε ότι ο $\mathcal{M}_2$ είναι κόσμος του Rieger, πρέπει πρώτα να βεβαιώσουμε ότι αν $Y \subseteq M_2$, τότε υπάρχει κάποιο $X_2 \in S_2$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \in M_2$,

$$t \in Y \iff t E_2 X_2,$$

και κατόπιν να επαληθεύσουμε ότι μόνον ένα τέτοιο $X_2$ υπάρχει. Επειδή $Y \subseteq M_2 \subseteq M_1$ και ο $\mathcal{M}_1$ είναι κόσμος του Rieger, υπάρχει κάποιο $X_1 \in S_1$ τέτοιο ώστε για όλα τα $t \in M_1$,

$$t \in Y \iff t E_1 X_1\cdot$$

εργαζόμενοι στον $\mathcal{M}_1$, εφαρμόζουμε την ιδιότητα του Rieger για τον $\mathcal{M}_2$ στο $\mathcal{M}_1$-σύνολο $X_1$, κι αυτό μας δίνει κάποιο $X_2 \in S_2$, τέτοιο ώστε

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall t)[t \in M_2 \Longrightarrow [t \in X_1 \iff t E_2 X_2]]\cdot$$

από τον υπολογισμό αυτής της σχετικοποίησης προκύπτει ότι

$$(\forall t \in M_1)[t \in M_2 \Longrightarrow [t E_1 X_1 \iff t E_2 X_2]].$$

Υπολογίζουμε τώρα για το τυχόν $t \in M_2 \subseteq M_1$:

$$\begin{aligned} t \in Y &\iff t E_1 X_1, \text{από την } \mathbf{B.17}, \\ &\iff t E_2 X_2 \text{ από την } \mathbf{B.17}, \end{aligned}$$

που τελειώνει την απόδειξη του **B.17**. Το γεγονός ότι το πολύ ένα $X_2 \in S_2$ ικανοποιεί την **B.17** για κάθε $t \in M_2$ δείχνεται με τον ίδιο τρόπο. ⊣

Παρατηρηση: Στη σχετικοποίηση της **B.17** δεν αλλάξαμε καθόλου την πρόταση $t \in M_2$. Γενικά, η σχετικοποίηση μιας «πρωτόγονης» πρότασης της μορφής $P(x_1, \ldots, x_n)$ (που εκφράζει ότι η οριστική συνθήκη $P$ ικανοποιείται από τα αντικείμενα $x_1, \ldots, x_n$) είναι η ίδια η $P(x_1, \ldots, x_n)$.

Μ' αυτό το απλό θεώρημα μπορούμε να κατασκευάσουμε κόσμους μέσα σε κόσμους, μέσα σε κόσμους, χρησιμοποιώντας σε κάθε στάδιο της κατασκευής ιδιότητες του πρότυπου που μόλις κατασκευάσαμε. Για παράδειγμα, θεωρούμε το εξής Πόρισμα του **B.16**.

**B.18. Πρόταση.** *Υπάρχει Z-F κόσμος $\mathcal{M}$ που έχει ακριβώς ένα άτομο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Έστω $c$ άτομο, και έστω

$$M_c =_{\text{ορ}} \{x \mid (\forall t \in \mathrm{TC}(x))[\neg Set(t) \Longrightarrow t = c]\}$$

η κλάση αντικειμένων που *στηρίζονται από το* $\{c\}$, όπως ορίσαμε αυτή την έννοια στο Πρόβλημα **11.38**. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η κλάση $M_c$ είναι μεταβατική, και ότι για κάθε σύνολο $X$,

$$X \subseteq M_c \Longrightarrow X \in M_c,$$

δηλαδή ότι ο φυσικός κόσμος $M_c$ έχει την ιδιότητα του Rieger και από το **B.11** είναι πρότυπο της **ZFDC**· και προφανώς, ο $M_c$ έχει ακριβώς ένα άτομο, το $c$.

Εύκολη απόδειξη, εφόσον υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο, που ίσως να υπάρχει αλλά και ίσως να μην υπάρχει στο θεμελιακό μας πεδίο $\mathcal{W}$. Πάντως υπάρχουν πολλά άτομα στον κόσμο του Rieger $\mathcal{M}_a$ του **B.16**, κι αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι *να ερμηνεύσουμε την απόδειξη της προηγούμενης παραγράφου στον κόσμο* $M_a$. Η πλήρης απόδειξη είναι ως εξής.

Έστω

$$\begin{aligned} \phi(M,S,E,c) \iff_{\text{ορ}} & \ \mathrm{Setuniv}(M,S,E) \ \& \ \mathrm{Rieger}(M,S,E) \\ & \&\neg Set(c) \ \& \ (\forall t \in M)[t \notin S \Longrightarrow t = c] \end{aligned} \qquad \text{(B-3)}$$

η πρόταση που απαιτεί από τα $M, S, E, c$ να έχουν τις ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν, και έστω

$$\theta \iff_{\text{ορ}} (\exists M)(\exists S)(\exists E)(\exists c)\phi(M,S,E,c)$$

η πρόταση που εκφράζει ότι υπάρχουν κάποια $M, S, E, c$ μ' αυτές τις ιδιότητες. Αποδείξαμε την $\theta$ από την υπόθεση ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο και (βέβαια) τα αξιώματα της **ZFDC**. Άρα αυτή η $\theta$ αληθεύει σε κάθε κόσμο της **ZFDC** που έχει τουλάχιστον ένα άτομο, και ειδικότερα στον $\mathcal{M}_a$, δηλαδή

$$\mathcal{M}_a \models \theta.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\mathcal{M}_a$-κλάσεις $M, S$, μια διμελής $\mathcal{M}_a$-συνθήκη $E$ και κάποιο $\mathcal{M}_a$-αντικείμενο $c$, τέτοια ώστε

$$\mathcal{M}_a \models \phi(M,S,E,c),$$

και ειδικότερα,

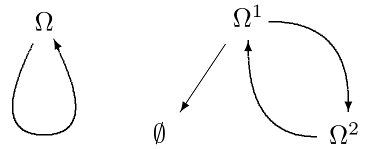
$$\mathcal{M}_a \models \mathrm{Setuniv}(M,S,E) \ \& \ \mathrm{Rieger}(M,S,E)\cdot$$

άρα, από το **B.17**, η τριάδα $\mathcal{M} = M, S, E$ είναι κόσμος του Rieger. Επιπλέον,

$$\mathcal{M}_a \models \neg Set(c) \ \& \ (\forall t \in M)[t \notin S \Longrightarrow t = c],$$

που σημαίνει ακριβώς ότι

$$\mathcal{M} \models \neg Set(c) \ \& \ (\forall t)[\neg Set(t) \Longrightarrow t = c],$$




Διαγραμμα **B.1**. Δύο διακοσμημένα, μη εδραιωμένα γραφήματα.

το συμπέρασμα που θέλαμε, ότι δηλαδή ο κόσμος $\mathcal{M}$ «πιστεύει» ότι υπάρχει ακριβώς ένα άτομο. $\dashv$

Με διάφορους, απλούς συνδυασμούς της τεχνικής της απόδειξης του **B.16** κι αυτής του **B.17**, μπορούμε να κατασκευάσουμε κόσμους του Rieger που έχουν μη εδραιωμένα σύνολα διαφόρων τύπων. Μερικά από τα προβλήματα δίνουν παραδείγματα τέτοιων κόσμων. Εδώ θα περιοριστούμε στην κατασκευή του *Αντιθεμελιωμένου Κόσμου* $\mathcal{A}$ του Aczel, που περιέχει μια πλούσια ποικιλία μη εδραιωμένων συνόλων με φυσική και ευκολονόητη δομή.

Η αφετηρία για την κατασκευή του $\mathcal{A}$ είναι το Λήμμα Συμπίεσης **11.36** του Mostowski, που δίνει ένα «δομικό» χαρακτηρισμό των αγνών, εδραιωμένων συνόλων. Σύμφωνα με το **11.35**, διακόσμηση γραφήματος $G$ είναι ένας επιμορφισμός $d : G \twoheadrightarrow d[G]$ τέτοιος ώστε

$$d(x) = \{d(y) \mid y \leftarrow x\}, \quad (x \in G),$$

όπου $\rightarrow$ είναι η σχέση ακμών του $G$ και $\leftarrow$ η αντίστροφη σχέση,

$$y \leftarrow x \iff \text{το } y \text{ είναι παιδί του } x \iff x \rightarrow y.$$

Κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ επιδέχεται ακριβώς μία διακόσμηση $d_G$, και τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα είναι ακριβώς όλες οι τιμές $d_G(x)$ αυτών των διακοσμήσεων. Μήπως είναι δυνατό να «διακοσμήσουμε» τους κόμβους μη εδραιωμένων γραφημάτων, και να κατασκευάσουμε μ' αυτό τον τρόπο μη εδραιωμένα σύνολα που σχετίζονται με τα μη εδραιωμένα γραφήματα ακριβώς όπως τα αγνά, εδραιωμένα σύνολα σχετίζονται με τα εδραιωμένα γραφήματα;

**B.19.** Αρχή Αντιθεμελίωσης, **AFA**. Κάθε γράφημα επιδέχεται διακόσμηση.

Στο Διάγραμμα **B.1** έχουμε προσκολλήσει στους κόμβους δύο μη εδραιωμένων γραφημάτων τις τιμές των μοναδικών τους διακοσμήσεων, δεχόμενοι ότι υπάρχουν τέτοιες μοναδικές διακοσμήσεις. Από τον ορισμό «διακόσμησης»,

$$\Omega = \{\Omega\}, \quad \Omega^1 = \{\emptyset, \Omega^2\}, \quad \Omega^2 = \{\Omega^1\},$$

δηλαδή τα $\Omega$, $\Omega^1$, $\Omega^2$ είναι τα «τραγικά απογοητευτικά δώρα» του **11.32**. Αναφερόμαστε εδώ «στα» απογοητευτικά δώρα και όχι «σε κάποια» απογοητευτικά δώρα, επειδή οι εξισώσεις **B-3** —ή τα γραφήματα του **B.1**— χαρακτηρίζουν αυτά τα σύνολα από το **AFA**, ως εξής.

**B.20. Πρόταση.** (**AFA**) (1) *Υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο* $\Omega$ *που είναι το μονοσύνολο του εαυτού του.* (2) *Υπάρχει ακριβώς ένα ζεύγος συνόλων* $\Omega^1$, $\Omega^2$ *τέτοιων ώστε* $\Omega^1 = \{\emptyset, \Omega^2\}$, $\Omega^2 = \{\Omega_1\}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . (1) Αν $X = \{X\}$ και $Y = \{Y\}$, τότε μπορούμε να διακοσμήσουμε τον μόνο κόμβο του γραφήματος στο Διάγραμμα **B.1** είτε με το $X$ ή με το $Y$· εφόσον αυτό το γράφημα επιδέχεται ακριβώς μία διακόσμηση από το **AFA**, συμπεραίνουμε ότι $X = Y$. Η απόδειξη του (2) είναι παρόμοια. ⊣

Η «μοναδικότητα» της Αρχής Αντιθεμελίωσης **AFA** που χρησιμοποιήσαμε σ' αυτή την απόδειξη μας επιτρέπει να καθορίσουμε και να μελετήσουμε τη δομή μη εδραιωμένων συνόλων με διάφορες ιδιότητες, κι απ' αυτήν προκύπτει το κύριο πλεονέκτημα του αντιθεμελιωμένου κόσμου $\mathcal{A}$ έναντι πολλών άλλων προτύπων που περιέχουν μη εδραιωμένα σύνολα. Προχωρούμε τώρα στην κατασκευή του.

**B.21. Ορισμός. Τονισμένο γράφημα** (pointed graph) είναι ένα ζεύγος $(G, p_G)$ γραφήματος και κόμβου του, λεπτομερέστερα ένα δομημένο σύνολο $(G, \rightarrow_G, p_G)$, όπου $p_G \in G$ και η $\rightarrow_G$ είναι διμελής σχέση στο πεδίο $G$. Ο διακεκριμένος κόμβος $p_G$ είναι ο **τόνος** ή το **σημείο** του τονισμένου γραφήματος.

**B.22.** Εικόνες. Ένα τονισμένο γράφημα $(G, p)$ είναι **εικόνα** συνόλου $A$, αν υπάρχει κάποια διακόσμηση $d : G \to d[G]$ του $G$ τέτοια ώστε $d_G(p) = A$. Η **κανονική εικόνα** αγνού συνόλου $A$ είναι το τονισμένο γράφημα $(\mathrm{TC}(A), \ni, A)$, όπου το $\mathrm{TC}(A)$ είναι η μεταβατική κλειστότητα του $A$ και η $\ni$ είναι ο περιορισμός του αντίστροφου της συνθήκης $\in$ στο $\mathrm{TC}(A)$. Είναι εικόνα του $A$ αυτό το δομημένο σύνολο, επειδή η συνάρτηση ταυτότητας $d(x) = x$ προφανώς είναι διακόσμησή του, $A \in \mathrm{TC}(A)$ και $d(A) = A$.

**B.23.** Ισομορφισμός μεταξύ δύο γραφημάτων $G$, $H$ είναι μια αντιστοιχία $\pi : G \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow H$ τέτοια ώστε

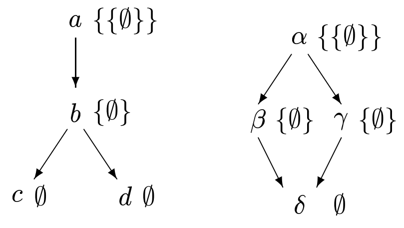
$$x \rightarrow_G y \iff \pi(x) \rightarrow_H \pi(y), \quad (x, y \in G),$$

και ισομορφισμός τονισμένων γραφημάτων $(G, p)$, $(H, q)$ είναι ένας ισομορφισμός $\pi : G \to H$ των γραφημάτων, τέτοιος ώστε $\pi(p) = q$. Το $G$ είναι **ισομορφικό** με το $H$ αν υπάρχει ισομορφισμός $\pi : G \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow H$ του κατάλληλου είδους.

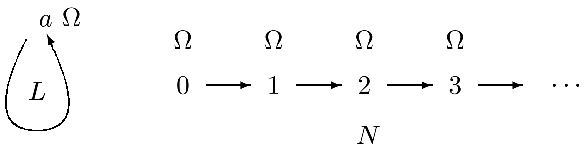
Υπάρχουν πολλά παραδείγματα μη ισομορφικών, εδραιωμένων, τονισμένων γραφημάτων που εικονίζουν το ίδιο σύνολο, π.χ. αυτά στο Διάγραμμα **B.2**, όπου έχουμε προσκολλήσει σε κάθε κόμβο την τιμή της μοναδικής διακόσμησης. Από την άλλη μεριά, αν ένα τονισμένο γράφημα $(G, p)$ επιδέχεται μόνο μία διακόσμηση $d_G$, τότε το σύνολο $A = d_G[G]$ θα πρέπει να «αντικατοπτρίζει» κάποια σημαντική σταθερά του $(G, p)$. Ο επόμενος βασικός ορισμός συλλαμβάνει αυτή τη σταθερά.

**B.24. Ορισμός. Προσομοίωση** (bisimulation) (μεταξύ) δύο τονισμένων γραφημάτων $(G, \rightarrow_G, p_G)$ και $(H, \rightarrow_H, p_H)$ είναι μια σχέση $R \subseteq G \times H$ που συσχετίζει τους τόνους, δηλαδή $p_G R p_H$, και επίσης ικανοποιεί τη συνεπαγωγή

$$\begin{aligned} xRy \Longrightarrow\ & (\forall u\ {}_G\!\leftarrow x)(\exists v\ {}_H\!\leftarrow y) uRv \\ & \& \ (\forall v\ {}_H\!\leftarrow y)(\exists u\ {}_G\!\leftarrow x) uRv. \end{aligned} \tag{B-4}$$




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **B.2**. Μη ισομορφικά, προσόμοια, εδραιωμένα γραφήματα.




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ **B.3**. Πολλές εικόνες του $\Omega$ : το $(L, a)$ και κάθε $(N, n)$.

Τα τονισμένα γραφήματα $G$, $H$ είναι **προσόμοια** (bisimilar) αν υπάρχει προσομοίωση μεταξύ τους,

$$G =_{\rm bs} H \iff_{\rm op} (\exists R \subseteq G \times H)[\text{η } R \text{ είναι προσομοίωση}].$$

Όπως πάντα με δομημένα σύνολα, θα αναφερόμαστε στο «τονισμένο γράφημα $G$», χωρίς ρητή μνεία της σχέσης ακμών $\rightarrow_G$ ή του τόνου, όταν αυτά είναι προφανή ή άνευ ιδιαίτερης σημασίας — όπως ήδη κάναμε στην **B-4**.

**B.25. Άσκηση.** *Ισομορφικά, τονισμένα γραφήματα είναι προσόμοια, όπως επίσης προσόμοια είναι και τα μη ισομορφικά, εδραιωμένα και τονισμένα γραφήματα του Διαγράμματος* **B.2**.

**B.26. Άσκηση.** *Αν ο $a$ είναι ελαχιστικός κόμβος του γραφήματος $G$ και ο $b$ ελαχιστικός του $H$, τότε το $\{(a, b)\}$ είναι προσομοίωση μεταξύ των τονισμένων γραφημάτων $(G, a)$ και $(H, b)$.*

**B.27. Άσκηση.** *Έστω $L$ το γράφημα «μίας θηλιάς» στο μονοσύνολο $\{a\}$ με τη μοναδική ακμή $(a, a)$, και έστω στο σύνολο των φυσικών αριθμών $N$ η σχέση ακμών του επόμενου,*

$$n \rightarrow_s m \iff_{\rm op} n + 1 = m.$$

*Δείξτε ότι η σχέση $\{(a, i) \mid i \in N\}$ είναι προσομοίωση μεταξύ των $(L, a)$ και $(N, n)$, για κάθε $n$.*

**B.28. Λήμμα.** *Η συνθήκη $=_{\rm bs}$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση όλων των τονισμένων γραφημάτων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Από τις τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες συνθήκης ισοδυναμίας (όπως την ορίσαμε στο **12.42**), μόνο η μεταβατικότητα της $=_{\rm bs}$ δεν είναι προφανής. Για τρία τονισμένα γραφήματα $G_1$, $G_2$, $G_3$, και δοσμένες προσομοιώσεις

$R_1$ μεταξύ των $G_1$ και $G_2$ και $R_2$ μεταξύ των $G_2$ και $G_3$, έστω

$$xRz \iff_{\text{op}} (\exists y)[xR_1y \ \& \ yR_2z]$$

το «γινόμενο» των σχέσεων $R_1$ και $R_2$. Προφανώς η $R$ συσχετίζει τους τόνους $p_1$ και $p_3$ των $G_1$ και $G_3$, επειδή $p_1R_1p_2$ και $p_2R_2p_3$. Αν $xRz$, τότε υπάρχει κάποιο $y \in G_2$ τέτοιο ώστε $xR_1y$ και $yR_2z$· για κάθε $u \ _1\!\leftarrow x$, υπάρχει (από την **B-4** για την $R_1$) κάποιο $v \ _2\!\leftarrow y$ τέτοιο ώστε $uR_1v$· και από την **B-4** για την $R_2$, υπάρχει κάποιο $w \ _3\!\leftarrow z$ τέτοιο ώστε $vR_2w$, που μαζί με την $uR_1v$ βεβαιώνει ότι $uRw$. Το επιχείρημα δείχνει το μισό της **B-4**, και το άλλο μισό είναι εξίσου εύκολο. ⊣

Οπλισμένοι μ' αυτούς τους ορισμούς, μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι για κάθε εδραιωμένο γράφημα $G$ και κάθε κόμβο $p \in G$, οι ιδιότητες του $(G, p)$ που αντικατοπτρίζονται στην τιμή $d_G(p)$ της μοναδικής του διακόσμησης είναι ακριβώς οι ιδιότητες τις οποίες σέβεται η συνθήκη προσομοίωσης τονισμένων γραφημάτων.

**B.29. Θεώρημα.** *Για όλα τα εδραιωμένα γραφήματα $G$, $H$ με διακοσμήσεις $d_G$, $d_H$, και για όλους τους κόμβους $p \in G$ και $q \in H$,*

$$d_G(p) = d_H(q) \iff (G, p) =_{\text{bs}} (H, q).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. . Πρώτα δείχνουμε ότι η σχέση

$$R = \{(x, y) \in G \times H \mid d_G(x) = d_H(y)\}$$

ικανοποιεί την **B-4**:

$$\begin{aligned}
xRy &\implies \{d_G(u) \mid u \ _G\!\leftarrow x\} = \{d_H(v) \mid v \ _H\!\leftarrow\} \text{ από τον ορ. διακόσμησης,}\\
&\implies (\forall u \ _G\!\leftarrow x)(\exists v \ _H\!\leftarrow y)[d_G(u) = d_H(v)]\\
&\qquad \& \ (\forall v \ _H\!\leftarrow y)(\exists u \ _G\!\leftarrow x)[d_G(u) = d_H(v)]\\
&\implies (\forall u \ _G\!\leftarrow x)(\exists v \ _H\!\leftarrow y)uRv\\
&\qquad \& \ (\forall v \ _H\!\leftarrow y)(\exists u \ _G\!\leftarrow x)uRv.
\end{aligned}$$

Συνάγεται ότι αν $p \in G$, $q \in H$ και $d_G(p) = d_H(q)$, τότε η σχέση $R$ της **B.29** φανερώνει ότι $(G, p) =_{\text{bs}} (H, q)$.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι το $p$ είναι ελαχιστικό στο $G$ τέτοιο που να υπάρχει κάποιο $q \in H$ και κάποια προσομοίωση $R$ μεταξύ των τονισμένων γραφημάτων $(G, p)$ και $(H, q)$, αλλά $d_G(p) \neq d_H(q)$. Από τον ορισμό προσομοίωσης, $(\forall u \ _G\!\leftarrow p)(\exists v \ _H\!\leftarrow q)uRv$, άρα

$$(\forall u \ _G\!\leftarrow p)(\exists v \ _H\!\leftarrow q)[d_G(u) = d_H(v)]$$

από την επιλογή του $p$, και με τον ίδιο τρόπο, $(\forall v \ _H\!\leftarrow q)(\exists u \ _G\!\leftarrow p)[d_G(u) = d_H(v)]$. Προκύπτει ότι $d_G(p) = d_H(q)$, που αντιτίθεται στην επιλογή του $p$. ⊣

Χαρακτηριστικό της αρχής **AFA** είναι ότι δίνει το ίδιο αποτέλεσμα, αλλά με τελείως διαφορετική απόδειξη,

**Β.30. Θεώρημα.** (Aczel) (**AFA**) *Για όλα τα γραφήματα $G$, $H$ με αντίστοιχες (μοναδικές) διακοσμήσεις $d_G$, $d_H$, και για όλους τους κόμβους $p \in G$ και $q \in H$,*

$$d_G(p) = d_H(q) \iff (G, p) =_{\text{bs}} (H, q).$$

Αποδειξη. . Η κατεύθυνση από τα αριστερά στα δεξιά της συνεπαγωγής **Β.30** δείχνεται ακριβώς όπως στο **Β.29**, εφόσον αυτό το μέρος της απόδειξης δεν χρησιμοποίησε τη θεμελίωση των δοσμένων γραφημάτων.

Για την άλλη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι οι σχέσεις ακμών των $G$ και $H$ είναι οι $\to_G$, $\to_H$ και ότι η $R \subseteq G \times H$ είναι προσομοίωση μεταξύ των $G$ και $H$. Θεωρούμε το σύνολο $R$ ως τονισμένο γράφημα, με τόνο τον κόμβο $(p_G, p_H)$ και σχέση ακμών το γινόμενο των $\to_G$ και $\to_H$:

$$(p, q) \to (u, v) \iff_{\text{ορ}} p \to_G u \;\&\; q \to_H v.$$

Η αρχή **AFA** εγγυάται ότι υπάρχει ακριβώς μία διακόσμηση $d_G$ του γραφήματος $G$, μ' αυτήν ορίζουμε στο $R$ τη συνάρτηση

$$d_G^R(p, q) =_{\text{ορ}} d_G(p),$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in d_G^R(p, q) &\iff x \in d_G(p) \\ &\iff (\exists u \;{}_G\!\leftarrow p)[x = d_G(u)] \\ &\iff (\exists u \;{}_G\!\leftarrow p)(\exists v \;{}_H\!\leftarrow q)[uRv \;\&\; x = d_G(u)] \qquad \text{(B-5)} \\ &\iff (\exists (u, v) \leftarrow (p, q))[x = d_G^R(u, v)], \end{aligned}$$

όπου η ισοδυναμία-κλειδί **Β-5** ισχύει επειδή η $R$ είναι προσομοίωση, $pRq$, και επομένως για κάθε $u \;{}_G\!\leftarrow p$, υπάρχει κάποιο $v \;{}_H\!\leftarrow q$ τέτοιο ώστε $uRv$. Συνάγεται ότι η συνάρτηση $d_G^R$ είναι διακόσμηση του $R$, και η αντίστοιχη επέκταση

$$d_H^R(p, q) =_{\text{ορ}} d_H(q)$$

της διακόσμησης $d_H$ του $H$ είναι επίσης διακόσμηση του $R$, με ανάλογη απόδειξη. Άρα, από το **AFA**, για κάθε $(p, q) \in R$,

$$d_G(p) = d_G^R(p, q) = d_H^R(p, q) = d_H(q),$$

που τελειώνει την απόδειξη. ⊣

Αυτός ο χαρακτηρισμός των ιδιοτήτων του $(G, p)$ που αντικατοπτρίζονται στην τιμή $d_G(p)$ υποδείχνει τον φυσικό τρόπο κατασκευής του κόσμου $\mathcal{A}$.

**Β.31.** Ο Αντιθεμελιωμένος (antifounded) Κόσμος. Έστω

$$\mathcal{A}_0 =_{\text{ορ}} \{(G, \to_G, p_G) \in \mathcal{V} \mid \to_G \subseteq G \times G \;\&\; p_G \in G\}$$

η κλάση των τονισμένων γραφημάτων σε αγνά, εδραιωμένα σύνολα. Στην $\mathcal{A}_0$ ορίζουμε τη συνθήκη

$$(G, p_G)\varepsilon_0(H, p_H) \iff_{\text{ορ}} (\exists q \in H)[q \;{}_H\!\leftarrow p_H \;\&\; (G, p_G) =_{\text{bs}} (H, q)],$$

παραλείποντας τις σχέσεις ακμών από το συμβολισμό.

Παρατηρούμε πρώτα ότι η $\varepsilon_0$ σέβεται την προσομοίωση:

$$G_1 \varepsilon_0 H_1 \ \& \ G_1 =_{\text{bs}} G_2 \ \& \ H_1 =_{\text{bs}} H_2 \Longrightarrow G_2 \varepsilon_0 H_2.$$

Για την απόδειξη, υποθέτουμε ότι οι $\rightarrow_1$, $p_1$ είναι η σχέση ακμών και ο τόνος του $H_1$, και παρομοίως με τα $\rightarrow_2$, $p_2$ για το $H_2$. Η υπόθεση της **B.31** μας δίνει κάποιο $q_1 \ {}_1\!\leftarrow p_1$ τέτοιο ώστε

$$G_2 =_{\text{bs}} G_1 =_{\text{bs}} (H_1, q_1),$$

και κάποια προσομοίωση $R$ μεταξύ των $(H_1, p_1)$ και $(H_2, p_2)$. Από τη βασική ιδιότητα προσομοιώσεων, υπάρχει $q_2 \ {}_2\!\leftarrow H_2$ τέτοιο ώστε $q_1 R q_2$· άρα η $R$ είναι προσομοίωση μεταξύ των $(H_1, q_1)$ και $(H_2, q_2)$, και από την **B.31** και τη μεταβατικότητα της συνθήκης $=_{\text{bs}}$, $G_2 =_{\text{bs}} (H_2, q_2)$, άρα $G_2 \varepsilon_0 H_2$.

Κάθε $G \in \mathcal{A}_0$ είναι αγνό, εδραιωμένο *σύνολο* (μια τριάδα στο $\mathcal{V}$), ακόμη κι αν είναι μη εδραιωμένο *ως γράφημα*, και η συνθήκη προσομοίωσης $=_{\text{bs}}$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας στην κλάση $\mathcal{A}_0$ από το **B.28**. Άρα, από το Πρόβλημα **x12.45** προκύπτει ότι υπάρχει οριστικός τελεστής $\alpha$ που είναι προσδιοριστικός για την $=_{\text{bs}}$, δηλαδή για όλα τα $G, H \in \mathcal{A}_0$,

$$G =_{\text{bs}} H \iff \alpha(G) = \alpha(H).$$

Το πεδίο του αντιθεμελιωμένου κόσμου είναι η κλάση-πηλίκο της $\mathcal{A}_0$ από την $=_{\text{bs}}$,

$$\mathcal{A} =_{\text{ορ}} \{\alpha(G) \mid G \in \mathcal{A}_0\}.$$

Θέτουμε

$$x \varepsilon y \iff_{\text{ορ}} (\exists G, H)[x = \alpha(G) \ \& \ y = \alpha(H) \ \& \ G \varepsilon_0 H],$$

με επίκληση του **B.31**, και τελικά ορίζουμε τον *Αγνό Αντιθεμελιωμένο Κόσμο* ως την τριάδα $\mathcal{A}, \mathcal{A}, \varepsilon$. Θα αναφερόμαστε σ' αυτόν με το όνομα του πεδίου του $\mathcal{A}$, που είναι επίσης και η κλάση συνόλων του — δεν υπάρχουν άτομα στον $\mathcal{A}$.

**B.32. Θεώρημα.** (Aczel) (**AC**) *Ο $\mathcal{A}$ είναι κόσμος του Rieger, που ικανοποιεί επιπλέον την Αρχή Αντιθεμελίωσης* **AFA**, *το Αξίωμα Επιλογής* **AC** *και την Αρχή Αγνότητας.*

Απόδειξη. . Η ιδιότητα-κλειδί του $\mathcal{A}$ είναι ότι για κάθε γράφημα $H \in \mathcal{V}$ με σχέση ακμών $\rightarrow_H$ και κάθε κόμβο $p \in H$,

$$\mathbf{b}_{\mathcal{A}}(\alpha(H, p)) = \{\alpha(H, q) \mid q \ {}_H\!\leftarrow p\},$$

που δείχνεται μ' έναν απλό υπολογισμό:

$$\begin{aligned} x \in \mathbf{b}_{\mathcal{A}}(\alpha(H, p)) &\iff (\exists G \in \mathcal{A}_0)(\exists q \ {}_H\!\leftarrow p)[x = \alpha(G) \ \& \ G =_{\text{bs}} (H, q)] \\ &\iff (\exists q \ {}_H\!\leftarrow p)[x = \alpha(H, q)]. \end{aligned}$$

Απ' αυτό προκύπτει αμέσως ότι κάθε $\mathbf{b}_{\mathcal{A}}(x)$ είναι σύνολο, και επομένως η τριάδα $\mathcal{A}$ είναι κόσμος συνόλων.

Για να δείξουμε την ιδιότητα του Rieger, υποθέτουμε ότι $Y \subseteq \mathcal{A}$ και (από το **AC**), επιλέγουμε για κάθε $y \in Y$ κάποιο τονισμένο γράφημα $G_y \in \mathcal{A}_0$ τέτοιο ώστε (1) $\alpha(G_y) = y$. Αντικαθιστώντας κάθε $G_y$ με κάποιο ισομορφικό αντίγραφο (αν χρειάζεται), μπορούμε να βεβαιώσουμε επιπλέον ότι (2) $y \neq z \Longrightarrow G_y \cap G_z = \emptyset$, και για κάθε $y \in Y$, (3) $\emptyset \notin G_y$. Έστω

$$\begin{aligned} H \quad &=_{\text{ορ}} \quad \bigcup\{G_y \mid y \in Y\} \ \cup \ \{\emptyset\}, \\ u \to_H v \quad &\Longleftrightarrow_{\text{ορ}} \quad (\exists y \in Y)[u \to_y v \vee (u = \emptyset \ \& \ v = p_y)], \end{aligned}$$

όπου τα $\to_y$ και $p_y$ είναι η σχέση ακμής και ο τόνος του $G_y$.Το τονισμένο γράφημα $H$ με σχέση ακμής $\to_H$ και τόνο $\emptyset$ ανήκει προφανώς στην κλάση $\mathcal{A}_0$, και για κάθε $y \in Y$,

$$(H, p_y) =_{\text{bs}} G_y$$

από την (τετριμμένη, ταυτοτική) προσομοίωση

$$\{(u, v) \in H \times G_y \mid u = v\}\cdot$$

άρα, από την **B.32** και τον ορισμό,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathcal{A}}(\alpha(H, \emptyset)) &= \{\alpha(H, q) \mid q \ {}_H\!\leftarrow \emptyset\} \\ &= \{\alpha(H, p_y) \mid y \in Y\} \\ &= \{\alpha(G_y) \mid y \in Y\} \quad \text{by } \mathbf{B\text{-}5}, \\ &= Y. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε τη μοναδικότητα του $\alpha(H)$, υποθέτουμε ότι το $H'$ είναι τονισμένο γράφημα στην $\mathcal{A}_0$ με σχέση ακμών $\to'$ και τόνο $q'$, τέτοιο ώστε

$$G \varepsilon_0 H' \iff \alpha(G) \in Y.$$

Από την **B.32** πάλι,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\mathcal{A}}(\alpha(H', q')) &= \{\alpha(H', q) \mid q \ {}'\!\leftarrow q'\} \\ &= \{\alpha(H, p_y) \mid y \in Y\}, \text{από την υπόθεση.} \end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $y \in Y$,

$$y = \alpha(G_y) = \alpha(H, p_y) \, \varepsilon \, \alpha(H'),$$

και (με επίκληση του **AC**) μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $q_y \ {}'\!\leftarrow q'$ και κάποια προσομοίωση $S_y$ μεταξύ των $(H, p_y)$ και $(H', q_y)$· και αντιστρόφως, με το ίδιο επιχείρημα, για κάθε $q \ {}'\!\leftarrow q'$ μπορούμε να επιλέξουμε κάποιο $y_q \in Y$ και κάποια προσομοίωση $T_q$ μεταξύ των $(H, q_y)$ και $(H', q)$. Μ' αυτές τις επιλογές είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι η ένωση

$$R = \bigcup\{S_y \mid p_y \ {}_H\!\leftarrow \emptyset\} \cup \{T_q \mid q \ {}'\!\leftarrow q'\} \cup \{(\emptyset, q')\}$$

είναι προσομοίωση μεταξύ των $H$ και $H'$, δηλαδή $\alpha(H) = \alpha(H')$.

Τελικά, για να δείξουμε ότι ο κόσμος $\mathcal{A}$ ικανοποιεί την αρχή **AFA**, έστω $G$ γράφημα στον $\mathcal{A}$ με σχέση ακμών $\to_G \in \mathcal{A}$. Για να κατασκευάσουμε διακόσμηση του $G$ στον $\mathcal{A}$, αρκεί να ορίσουμε έναν $\mathcal{A}$-τελεστή $\delta$, τέτοιον ώστε

$$\mathcal{A} \models (\forall p \in G)[\delta(p) = \{\delta(q) \mid q \ {}_G\!\leftarrow p\}],$$

εφόσον ο $\mathcal{A}$ είναι Z-F κόσμος και «γνωρίζει» από την **B-5** ότι ο περιορισμός του $\delta$ στο $G$ είναι συνάρτηση, και επομένως διακόσμηση του $G$. Θέτουμε

$$H =_{\text{ορ}} \mathbf{b}_{\mathcal{A}}(G) \in \mathcal{V},$$

και ορίζουμε στο $H$ τη σχέση ακμών

$$x \to_H y \iff_{\text{ορ}} \mathcal{A} \models x \to_G y, \quad (x, y \in H),$$

που επίσης ανήκει στην $\mathcal{V}$. Για κάθε $p \in H$, θέτουμε

$$\delta(p) =_{\text{ορ}} \alpha(H, p) \in \mathcal{A}, \quad (p \in H)$$

και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_{\mathcal{A}}(\delta(p)) &= \{\alpha(H, q) \mid q \;{}_H\!\leftarrow p\}, &&\text{από την } \mathbf{B.32},\\ &= \{\alpha(H, q) \mid \mathcal{A} \models q \;{}_G\!\leftarrow p\} \text{by } \mathbf{B\text{-}5},\\ &= \{\delta(q) \mid \mathcal{A} \models q \;{}_G\!\leftarrow p\} &&\text{από την } \mathbf{B\text{-}5}.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $p \,\varepsilon\, G$,

$$x \,\varepsilon\, \delta(p) \iff \mathcal{A} \models (\exists q \;{}_G\!\leftarrow p)[x = \delta(q)],$$

που είναι ισοδύναμο με την **B-5**.

Απομένει να δείξουμε ότι το $G$ επιδέχεται το πολύ μία διακόσμηση στον $\mathcal{A}$, και γι' αυτό αρκεί (όπως πιο πάνω) να βεβαιώσουμε ότι αν ο $\delta'$ είναι $\mathcal{A}$-τελεστής τέτοιος ώστε

$$\mathcal{A} \models (\forall p \in G)[\delta'(p) = \{\delta'(q) \mid q \;{}_G\!\leftarrow p\}],$$

τότε $\delta'(p) = \delta(p)$, για κάθε $p \in H$. Υποθέτουμε ότι ο $\delta'$ ικανοποιεί την **B-5**, επιλέγουμε (από το **AC**) τονισμένο γράφημα $H'_p$ με τόνο $r_p$ για κάθε $p \in H$, τέτοιο ώστε

$$\delta'(p) = \alpha(H'_p), \quad (p \in H),$$

και επιπλέον ρυθμίζουμε τις επιλογές όπως στην απόδειξη της ιδιότητας του Rieger έτσι που αυτά τα γραφήματα να είναι ξένα ανά δύο. Αν $H' = \bigcup\{H'_p \mid p \in H\}$ είναι η ένωσή τους, τότε

$$\delta'(p) = \alpha(H', r_p), \quad (p \in H),$$

εφόσον η ταυτοτική σχέση $\{(q, q) \mid q \in H\}$ είναι προσομοίωση μεταξύ των $(H'_p, r_p)$ και $(H, r_p)$. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι *η σχέση*

$$R =_{\text{ορ}} \{(p, s) \in H \times H' \mid \alpha(H', s) = \delta'(p)\}$$

*είναι προσομοίωση μεταξύ των* $(H, p)$ *και* $(H', r_p)$, για κάθε $p \in H$: αυτό θα τελειώσει την απόδειξη, επειδή για κάθε $p \in H$, $\alpha(H', r_p) = \delta'(p)$, άρα $p R r_p$, και επομένως

$$\delta(p) = \alpha(H, p) = \alpha(H', r_p) = \delta'(p).$$

Για να δείξουμε το λιγότερο εύκολο μέρος της πρότασης στα πλάγια, έστω $\to'$ η σχέση ακμής του $H'$ και έστω $pRs$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} t \,{}'\!\leftarrow s &\Longrightarrow \alpha(H',t)\,\varepsilon\,\alpha(H',s) \\ &\Longrightarrow \alpha(H',t)\,\varepsilon\,\delta'(p), && \text{επειδή } pRs, \\ &\Longrightarrow \text{για κάποιο } q \;{}_H\!\!\leftarrow p, \alpha(H',t) = \delta'(q), \text{από την } \mathbf{B\text{-}5}, \\ &\Longrightarrow \text{για κάποιο } q \;{}_H\!\!\leftarrow p, qRt. \end{aligned}$$

Το Αξίωμα Επιλογής συνάγεται από το **B.14** και η Αρχή Αγνότητας είναι τετριμμένη. $\dashv$

## Προβλήματα για το Κεφάλαιο B

**xB.1.** Δείξε ότι για κάθε κόσμο συνόλων $\mathcal{M} = M, S, E$, τα αξιώματα για οριστικές συνθήκες και τελεστές του **3.18** αληθεύουν, αν αντικαταστήσουμε σ' αυτά «συνθήκη» με «$\mathcal{M}$-συνθήκη», «τελεστής» με «$\mathcal{M}$-τελεστής», $\in$ με $E$, $Set$ με $S$ και $(\forall y)$ με $(\forall y \in M)$.

$^*$**xB.2.** Υποθέτουμε ότι ζεύγη και Καρτεσιανά γινόμενα έχουν οριστεί με το ζεύγος Kuratowski του **4.2**. Δείξε ότι $\bigcup_{n=2}^{\infty}\{N_0\}^n \notin \mathcal{Z}$ και συμπέρανε ότι η ακόλουθη πρόταση δεν είναι θεώρημα της **ZDC**: *για κάθε σύνολο $A$, υπάρχει συνάρτηση $f : N \to f[A]$ τέτοια ώστε*

$$f(0) = A \times A, \quad f(n+1) = f(n) \times A.$$

$^*$**xB.3.** Δώσε ορισμό τελεστή $(x,y)'$ με τις εξής ιδιότητες: (1) $(x,y)'$ είναι τελεστής ζεύγους, δηλαδή ικανοποιεί τις **OP1** και **OP2**. (2) Αν $X, Y \in \mathcal{Z}$, τότε και το γινόμενο $X \times Y$ ανήκει στο $\mathcal{Z}$. (3) Για κάθε $A \in \mathcal{Z}$, αν ορίσουμε την ένωση $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n$ μ' αυτό τον τελεστή ζεύγους, τότε $\bigcup_{n=2}^{\infty} A^n \in \mathcal{Z}$.

$^*$**xB.4.** Δείξε ότι η συνεπαγωγή **OP1** $\Longrightarrow$ **OP2** δεν είναι θεώρημα της **ZDC** για κάθε οριστικό τελεστή $(x,y)$.

$^*$**xB.5.** Δείξε ότι αν το $I$ είναι μεταβατικό σύνολο, τότε

$$A \in M(I) \Longrightarrow \mathrm{TC}(A) \in M(I).$$

**xB.6.** Για κάθε $I$, ορίζουμε τα σύνολα $K_n(I)$ με την αναδρομή

$$K_0(I) = I, \quad K_{n+1}(I) = K_n(I) \cup \mathcal{P}(K_n(I)).$$

Δείξε ότι

$$M_n(I) \subseteq K_n(\mathrm{TC}_{n+1}(I)) \subseteq M(I),$$

όπου το $\mathrm{TC}_n(I)$ και το $M_n(I)$ ορίζονται από την **11-16** και την **11-18** αντίστοιχα.

$^*$**xB.7.** Βρες κάποιο $I \supset N_0$ τέτοιο ώστε $\mathrm{TC}(I) \notin M(I)$. Συμπέρανε ότι η **ZDC** δεν αποδείχνει ότι «κάθε σύνολο έχει μεταβατική κλειστότητα».

$^*$**xB.8.** Η συνεπαγωγή **C1** $\Longrightarrow$ **C3** δεν αποδείχνεται για κάθε οριστικό τελεστή πληθικότητας $|A|$ στην **ZDC**.

$^*$**xB.9.** Η ισοδυναμία στο Πρόβλημα **x11.7** δεν είναι θεώρημα της **ZDC**.

$^*$**xB.10.** Δεχόμαστε το πλήρες Αξίωμα Επιλογής και τη Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς, έτσι που για όλους τους πληθαρίθμους $\kappa$, $2^\kappa =_c \kappa^+$. Δείξε ότι

$$(n \mapsto \aleph_n) \subseteq \mathcal{Z}, \quad (n \mapsto \aleph_n) \notin \mathcal{Z}.$$

Συμπέρανε ότι η **ZAC** δεν αποδείχνει την ύπαρξη άπειρης, αύξουσας ακολουθίας άπειρων πληθαρίθμων, δηλαδή την πρόταση

$$\theta : (\exists f : N \to f[N])(\forall n \in N)[N \leq_c f(n) <_c f(n+1)].$$

$^*$**xB.11.** Δείξε ότι η **ZDC** δεν αποδείχνει την πρόταση «ο καλά διατεταγμένος χώρος των φυσικών αριθμών $N$ είναι όμοιος με κάποιο διατακτικό αριθμό». Υπόδειξη: Χρησιμοποίησε το **x12.27**. Το λιγότερο εύκολο μέρος της απόδειξης είναι ο υπολογισμός της σχετικοποίησης αυτής της κάπως περίπλοκης πρότασης ή πώς να αποφευχθεί αυτό.

$^*$**xB.12.** (**AC**) Δείξε ότι η **ZFC** δεν αποδείχνει την ύπαρξη ισχυρά απρόσιτων πληθαρίθμων. Υπόδειξη: Προς απαγωγή σε άτοπο, ερμήνευσε το Πρόβλημα στον κόσμο $\mathcal{V}_\kappa$, όπου $\kappa$ είναι ο ελάχιστος, ισχυρά απρόσιτος πληθάριθμος.

**xB.13. Τελεστής διατεταγμένου ζεύγους** στον κόσμο του Rieger $\mathcal{M}$, είναι ένας διμελής $\mathcal{M}$-τελεστής $C$ τέτοιος ώστε για όλα τα $x, y, x', y' \in M$,

$$C(x,y) = C(x',y') \iff x = x' \;\&\; y = y'.$$

Καρτεσιανά γινόμενα και συναρτησιακοί χώροι ορίζονται με τον φυσικό τρόπο, σχετικά με τον $C$:

$$\begin{aligned} A \times_C B &=_{\text{ορ}} \rho\{C(x,y) \mid x E A, y E B\}, \\ (A \to_C B) &=_{\text{ορ}} \rho\{f \in M \mid (\forall t E f)[t E A \times_C B] \\ &\qquad\qquad \& \; (\forall x E A)(\exists! y E B)[C(x,y) E f]\}, \end{aligned}$$

όπου $\rho(Y)$ είναι ο τελεστής του Rieger για τον $\mathcal{M}$, που ορίσαμε στην **B.10**. Δείξε ότι αυτοί οι ορισμοί έχουν νόημα (δηλαδή ο $\rho$ χρησιμοποιείται σωστά), και επομένως οι $A \times_C B$ και $A \to_C B$ είναι $\mathcal{M}$-τελεστές.

$^*$**xB.14.** Όρισε τριάδες, δομημένα σύνολα και συστήματα φυσικών αριθμών σε δοσμένο κόσμο του Rieger $\mathcal{M}$, σχετικά με δοσμένο τελεστή ζεύγους $C(x,y)$ του $\mathcal{M}$. Διατύπωσε τις Αρχές Επιλογής **DC**, $\mathbf{AC}_{\mathbb{N}}$ και **AC** μ' αυτές τις έννοιες, και δείξε ότι ο κόσμος του Rieger $\mathcal{M}$ ικανοποιεί την **DC**, κι αν το **AC** αληθεύει, τότε ο $\mathcal{M}$ επίσης ικανοποιεί το **AC**.

**xB.15.** Δείξε ότι ο κόσμος του Rieger $\mathcal{M}_a$ του **B.16** έχει έναν τελεστή ζεύγους $C$ τέτοιον ώστε για όλα τα $x, y$, το «ζεύγος» $C(x,y)$ να είναι άτομο.

$^*$**xB.16.** (**AC**) Κατασκεύασε έναν κόσμο Rieger $\mathcal{M}$ που να ικανοποιεί τις εξής δύο απαιτήσεις.

(a) Υπάρχει διμελής, οριστική συνθήκη $\leq_a$ που διατάσσει καλά την κλάση των ατόμων, δηλαδή τέτοια ώστε (1) για όλα τα άτομα $a$, $b$, $c$,

$$a \leq a, \ [a \leq b \ \& \ b \leq c] \Longrightarrow a \leq c, \ [a \leq b \ \& \ b \leq a] \Longrightarrow a = c,$$

(2) για όλα τα άτομα $a$, $b$, είτε $a \leq b$ ή $b \leq a$, και (3) κάθε μη κενό σύνολο ατόμων έχει $\leq$-ελάχιστο μέλος.

(b) Κάθε σύνολο $X$ είναι ισοπληθικό με κάποιο $\leq$-*αρχικό τμήμα* ατόμων, δηλαδή για κάποιο άτομο $b$, $X =_c \{a \mid Atom(a) \ \& \ a < b\}$. Υποδειξη: Κάνε τους διατακτικούς αριθμούς άτομα σε κάποιο κόσμο του Rieger.

$^*$**xB.17.** Όρισε έναν κόσμο του Rieger που να έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά «αυτομονοσύνολα», δηλαδή σύνολα $a$, $b$ τέτοια ώστε $a \neq b$, $a = \{a\}$, $b = \{b\}$. Υποδειξη: Άρχισε με κάποιο κόσμο που να έχει τουλάχιστον δύο άτομα και μιμήσου την κατασκευή αντικατοπτρισμού του **B.16**.

$^*$**xB.18.** Όρισε ένα κόσμο του Rieger που να περιέχει μιαν άπειρη ακολουθία διαφορετικών συνόλων $x_0, x_1, \ldots$ τέτοιων ώστε για κάθε $i$, $x_i = \{x_{i+1}\}$.

**xB.19.** Έστω γράφημα $G$ και $p \in G$ ένας κόμβος του, και έστω

$$G \restriction p = \{x \in G \mid x = p \lor p \Rightarrow x\}$$

το σύνολο που περιέχει το $p$ και όλους τους κόμβους σε κάποιο μονοπάτι του γραφήματος που αρχίζει με το $p$. Θεωρούμε το $G \restriction p$ ως «υπογράφημα» του $G$, με τον περιορισμό της σχέσης ακμών $\to_G$ στο $G \restriction p$. Δείξε ότι

$$(G, p) =_{\mathrm{bs}} (G \restriction p, p).$$

**B.33. Ορισμός. Μερική** (partial) **προσομοίωση** μεταξύ δύο γραφημάτων $G$, $H$ είναι μια σχέση $R \subseteq G \times H$ που είναι προσομοίωση μεταξύ των τονισμένων γραφημάτων $(G, p)$, $(H, q)$, για κάθε $(p, q) \in R$· είναι **ολική** (total) **προσομοίωση**, αν επιπλέον

$$(\forall p \in G)(\exists q \in H) p R q \ \& \ (\forall q \in H)(\exists p \in G) p R q.$$

Δύο γραφήματα είναι **προσόμοια** (bisimilar) αν υπάρχει ολική προσομοίωση μεταξύ τους.

**xB.20.** Για κάθε ζεύγος γραφημάτων $G$, $H$ υπάρχει μέγιστη (σύμφωνα με την $\subseteq$) προσομοίωση $R$ μεταξύ των $G$ και $H$, και $G =_{\mathrm{bs}} H$ τότε και μόνον αν αυτή η μέγιστη προσομοίωση είναι ολική.

**xB.21.** Δύο γραφήματα $G$, $H$ είναι προσόμοια τότε και μόνον αν για κάθε $p \in G$ υπάρχει κάποιο $q \in H$ τέτοιο ώστε τα τονισμένα γραφήματα $(G, p)$ και $(H, q)$ να είναι προσόμοια, και αντίστροφα, κάθε $(H, q)$ είναι προσόμοιο με κάποιο $(G, p)$.

**xB.22.** (**AFA**) Δείξε ότι υπάρχουν διαφορετικά αγνά σύνολα $x, y, z$ τέτοια ώστε

$$x \ni y \ni z \ni x,$$

και σχεδίασε εικόνες τους.

$^*$**xB.23.** (**AFA**) Δείξε ότι υπάρχουν μόνο δύο μεταβατικά, αγνά μονοσύνολα. Πόσα μεταβατικά, αγνά δισύνολα υπάρχουν; Σχεδίασε εικόνες τους.

**xB.24.** (**AFA**) Με το ζεύγος Kuratowski, δείξε ότι υπάρχει αγνό σύνολο $x$, τέτοιο ώστε

$$x = (\emptyset, x),$$

και σχεδίασε εικόνα του.

**xB.25.** (**AFA**) Με το ζεύγος Kuratowski, δείξε ότι υπάρχει αγνό σύνολο $x$ τέτοιο

$$x = \{(n, x) \mid n \in N\},$$

και σχεδίασε εικόνα του.

# ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ 1 - 12

**2.5**. Η ταυτοτική συνάρτηση $(x \mapsto x)$ φανερώνει ότι $A \leq_c A$. Αν $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail C$, τότε η σύνθεση $h(x) = g(f(x))$ είναι μονομορφισμός από το $A$ στο $C$, άρα $A \leq_c C$.

**2.8**. Από την υπόθεση έχουμε $A \leq_c \mathbb{N}$ και $B \leq_c A$, έτσι που $B \leq_c \mathbb{N}$.

**2.9**. Αν το $A$ είναι κενό, τότε $B = f[\emptyset] = \emptyset$. Αν το $A$ δεν είναι κενό, τότε υπάρχει επιμορφισμός $\pi : \mathbb{N} \twoheadrightarrow A$, η σύνθεση $h(i) = f(\pi(i))$ είναι επίσης επιμορφισμός από το $\mathbb{N}$ επί του $B$, και επομένως το $B$ είναι αριθμήσιμο.

**2.20**. Έστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B$ αντιστοιχία, και $\pi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ η συνάρτηση

$$\pi(X) = f[X] \quad (X \subseteq A).$$

Για να δείξουμε ότι η $\pi$ είναι ισομορφισμός, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $x \in X \setminus Y$, τότε $f(x) \in f[X]$ όμως δε γίνεται να έχουμε και $f(x) \in f[Y]$· διότι αν $f(x) = f(y)$ για κάποιο $y \in Y$, τότε $y = x$ αφού η $f$ είναι ισομορφισμός και έτσι $x = y \in Y$, που δεν ισχύει. Άρα

$$x \in X \setminus Y \Longrightarrow f(x) \in f[X] \setminus f[Y],$$

και συμμετρικά,

$$y \in Y \setminus X \Longrightarrow f(y) \in f[Y] \setminus f[X].$$

Από τις δύο συνεπαγωγές έπεται ότι

$$X \neq Y \Longrightarrow f[X] \neq f[Y],$$

δηλαδή η $\pi$ είναι ισομορφισμός.

Για να δείξουμε ότι είναι και επιμορφισμός, για δοσμένο $Y \subseteq B$, έστω $X = f^{-1}[Y]$ οπότε αμέσως παίρνουμε $f[X] \subseteq Y$· όμως, επειδή η $f$ είναι επιμορφισμός, κάθε $y \in Y$ είναι η τιμή $f(x)$ κάποιου $x \in A$, και έτσι $x = f^{-1}(y) \in X$, οπότε $f[X] = Y$.

**2.23**. Έστω αντιστοιχίες $f : A_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow A_2$ και $g : B_1 \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow B_2$. Για κάθε $p : A_1 \to B_1$, θέτουμε

$$\pi(p) = q \text{ όπου για κάθε } x \in A_2,\ q(x) = g(p(f^{-1}(x))).$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & A_2 \arrow[d, "q = \pi(p)"] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

Διαγραμμα 1. Διάγραμμα για την Άσκηση 2.23.

Με λίγα λόγια, η $q$ είναι η μοναδική συνάρτηση που κάνει το διάγραμμα στην Εικόνα 1 *μεταθετικό*, δηλαδή

$$g(p(x)) = q(f(x)) \qquad (x \in A_1).$$

Παραθέτουμε τις λεπτομέρειες του ισχυρισμού (που φαίνονται από το διάγραμμα) για να είναι πλήρης η απόδειξη,

Για να ελέγξουμε ότι αν $p : A_1 \to B_1$, τότε $\pi(p) = q : A_2 \to B_2$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \in A_2 &\Longrightarrow f^{-1}(x) \in A_1 \\ &\qquad\qquad \Longrightarrow p(f^{-1}(x)) \in B_1 \Longrightarrow q(x) = g(p(f^{-1}(x))) \in B_2. \end{aligned}$$

Η απόδειξη ότι η $\pi$ είναι αντιστοιχία είναι παρόμοια με αυτήν στην Άσκηση **2.20** για τα δυναμοσύνολα, όμως λίγο πιο απλή.

Αρχικά, αν $p_1, p_2 : A_1 \to B_1$ και $p_1 \neq p_2$, τότε υπάρχει κάποιο $y \in A_1$ τέτοιο που $p_1(y) \neq p_2(y)$. Αν $x = f(y)$, τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f^{-1}$ είναι ισομορφισμός,

$$p_1(f^{-1}(x)) = p_1(y) \neq p_2(y) = p_2(f^{-1}(x)),$$

και έτσι, εφαρμόζοντας την $g$ και στις δύο μεριές και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι είναι ισομορφισμός, συνάγουμε ότι

$$\pi(p_1)(x) \neq \pi(p_2)(x),$$

και επομένως $\pi(p_1) \neq \pi(p_2)$. Έτσι, η $\pi$ είναι ισομορφισμός. Για να ελέγξουμε ότι είναι και επιμορφισμός, ορίζουμε για κάθε $q : A_2 \to B_2$ τη συνάρτηση

$$p(y) = g^{-1}(q(f(y))) \quad (y \in A_1),$$

έτσι που $p : A_1 \to B_1$, και για κάθε $x \in A_2$,

$$\pi(p)(x) = g(p(f^{-1}(x))) = g(g^{-1}(q(f(f^{-1}(x))))) = q(x).$$

Τελικά $\pi(p) = q$ και η $\pi$ είναι επιμορφισμός.

**3.9**. Πρέπει να δείξουμε ότι αυτά τα δύο σύνολα δεν έχουν τα ίδια μέλη, που ισχύει επειδή $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ενώ $\emptyset \notin \emptyset$.

**3.13**. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, κι έτσι $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$· κι αν $X \subseteq \emptyset$, τότε το $X$ πρέπει να είναι κενό, αφού κάθε μέλος του $X$ θα έπρεπε να είναι και μέλος του $\emptyset$—πράγμα αδύνατο. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, είναι πάλι άμεσο ότι για κάθε σύνολο $A$, $\emptyset, A \subseteq A$, κι έτσι $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{\emptyset\})$· για την άλλη κατεύθυνση, αν $X \subseteq \{\emptyset\}$, τότε το $X$ μπορεί να έχει μόνο ένα μέλος, το $\emptyset$, κι άρα $X = \emptyset$ ή $X = \{\emptyset\}$.

**3.14**. Χρησιμοποιώντας τα αξιώματα του Δυναμοσυνόλου και του Διαχωρισμού, θέτουμε

$$B = \{X \in \mathcal{P}(A) \mid (\exists t \in A)[X = \{t\}]\}.$$

**3.16**. Το κενό σύνολο δεν έχει μέλη, κι άρα $\bigcup \emptyset = \emptyset$· και το μοναδικό μέλος του μονοσυνόλου $\{\emptyset\}$ είναι το $\emptyset$, το οποίο, ξανά, δεν έχει μέλη, άρα και πάλι $\bigcup\{\emptyset\} = \emptyset$.

**3.20**. Η μονομελής συνθήκη $P$ που ορίζεται με

$$P(x) \iff x \in A$$

είναι ισομελής με το $A$, κι άρα από την (3-10), $\{x \mid x \in A\} = A$. Ομοίως, αν

$$Q(X) \iff \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A,$$

τότε $Q =_{\mathrm{e}} \mathcal{P}(A)$, κι έτσι από την (3-10), $\{X \mid \mathrm{Set}(X) \,\&\, X \subseteq A\} = \mathcal{P}(A)$.

**3.21**. Το ότι η Set δεν είναι σύνολο αποδείχθηκε στο Θεώρημα **3.11**. Για τη $\mathcal{W}$ χρησιμοποιούμε εις άτοπο απαγωγή: αν ήταν σύνολο, τότε σύνολο θα ήταν και η Set από το Αξίωμα Διαχωρισμού, αφού $\mathrm{Set} = \{x \in \mathcal{W} \mid \mathrm{Set}(x)\}$.

**3.22**. Αν το $A = \{w \mid \text{το } w \text{ είναι μονοσύνολο}\}$ ήταν σύνολο, τότε η ένωσή του $\bigcup A$ θα ήταν επίσης σύνολο· όμως κάθε αντικείμενο $x$ είναι μέλος του μονοσυνόλου του $\{x\}$, κι έτσι $\bigcup A = \mathcal{W}$, το οποίο δεν είναι σύνολο από την προηγούμενη ΐσκηση.

**3.23**. Αυτή η άσκηση είναι απλή εφαρμογή της ορολογίας μας, και θα αποδείξουμε τις συνεπαγωγές κυκλικά. Έστω $A$ κλάση.

Αν η $A$ είναι σύνολο, τότε $A \in \{A\}$ και το μονοσύνολο $\{A\}$ είναι επίσης σύνολο, κι άρα και κλάση, κι έτσι το $A$ ανήκει σε κάποια κλάση.

Αν η $A$ ανήκει σε κάποια κλάση $B$, τότε πρέπει να είναι αντικείμενο (άτομο ή σύνολο, αφού μόνο αντικείμενα τοποθετούνται σε κλάσεις από την (3-8)· κι αφού η $A$ είναι κλάση από την υπόθεση, δεν είναι άτομο κι άρα πρέπει να είναι σύνολο. Έπεται ότι $A \subseteq A$, κι έτσι το $A$ είναι υποσύνολο κάποιου συνόλου.

Τέλος, έστω $A$ κλάση και $A \subseteq X$, για κάποιο σύνολο $X$. Αν η $A$ είναι σύνολο, τελειώσαμε· διαφορετικά, από την (3-10), $A = P$ για κάποια οριστική συνθήκη $P$, όμως $A \subseteq X$, έτσι που μόνο μέλη του $X$ μπορούν να ικανοποιούν την $P$ και $A = \{x \in X \mid P(x)\}$. Από το Αξίωμα Διαχωρισμού, το $A$ είναι σύνολο, άτοπο από την υπόθεση.

**4.3**. Αν $\mathrm{Pair}(z)$, τότε $z = (x, y)$ για κάποια $x, y$, και από τους ορισμούς,

$$x = \mathrm{First}(z), \quad y = \mathrm{Second}(z),$$

κι αν $z = (\mathrm{First}(z), \mathrm{Second}(z))$, τότε $z = (x, y)$ για αυτά τα $x, y$, κι έτσι ισχύει η $\mathrm{Pair}(x, y)$.

**4.4**. Αν $(x,y,z)=(x,(y,z))=(x',(y',z'))=(x',y',z')$, τότε από τη βασική ιδιότητα του ζεύγους έχουμε $x=x'$ και $(y,z)=(y',z')$, και εφαρμόζοντας πάλι την ίδια ιδιότητα, συνάγουμε ότι $y=y'$ και $z=z'$. Η άλλη κατεύθυνση είναι τετριμμένη.

**4.6**. $A\uplus\emptyset=\{(\underline{\text{κυανό}},x)\mid x\in A\}$, και $(\underline{\text{κυανό}},x)\in A\uplus B$ για κάθε $x\in A$ και κάθε $B$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι για οποιαδήποτε σύνολα $A,B$, τα μέλη του $A\uplus B$ είναι διατεταγμένα ζεύγη· όμως για $A=B=\{\emptyset\}$, (με το ζεύγος Kuratowski) το $\emptyset$ δεν είναι διατεταγμένο ζεύγος κι άρα δεν ισχύει ότι $\{\emptyset\}\subseteq\{\emptyset\}\uplus\{\emptyset\}$.

**4.9**. Ούτε και για το (2) χρειάζεται δουλειά, αφού το $P_{A,B}$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**) και είναι υποσύνολο του $A\times B$ εξ ορισμού—άρα είναι σχέση στα $A,B$.

**4.11**. Για τα δύο πρώτα παραδείγματα, ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος. Για το τρίτο, το ότι η $\sim_{A/B}$ είναι αυτοπαθής και συμμετρική είναι επίσης τετριμμένο. Για τη μεταβατικότητα, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$[x\sim_{A/B}y\,\&\,y=z]\Longrightarrow x\sim_{A/B}z.$$

Αυτό ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε πως είτε $x=y$, οπότε από την $y=z$ έπεται ότι $x=z$ κι άρα $x\sim_{A/B}z$· είτε $x,y\in B$, οπότε πάλι από την $y=z$ έχουμε $x,z\in B$, δηλαδή $x\sim_{A/B}z$. Υποθέτουμε τώρα πως $x\sim_{A/B}y$ και $y\sim_{A/B}z$, με $x,y,z$ διαφορετικά ανά δύο, αφού αλλιώς, οποιαδήποτε από τις $x=y$, $y=z$ ή $y=z$ μας οδηγεί αμέσως στο $x\sim_{A/B}z$ από την προηγούμενη παρατήρηση. Όμως αν $x\neq y$ και $y\neq z$, τότε από την πρώτη υπόθεση $y\sim_{A/B}z$ συνάγουμε ότι $x\in B\,\&\,y\in B$, και από τη δεύτερη υπόθεση $y\sim_{A/B}z$ συνάγουμε ότι $y\in B\,\&\,z\in B$, δηλαδή έχουμε ότι $x\in B\,\&\,z\in B$ και τελικά $x\sim_{A/B}z$.

**4.13**. Έστω $=_A$ ο περιορισμός της σχέσης ισότητας στο σύνολο $A$. Τότε κάθε $x\in A$ είναι ισοδύναμο μόνο με τον εαυτό του κι άρα $[x/{=_A}]=\{x\}$. Για τη καθολική σχέση $\sim_A$ με $x\sim_A y$ για όλα τα $x,y\in A$, προφανώς $[x/{\sim_A}]=A$ για οποιοδήποτε $x\in A$. Τέλος, για την πιο περίπλοκη $\sim_{A/B}$, έχουμε $[x/{\sim_{A/B}}]=\{x\}$ αν $x\in A\setminus B$ και $[x/{\sim_{A/B}}]=B$ αν $x\in B$.

**4.15**. Αν η $f$ είναι συνάρτηση, τότε (εξ' ορισμού) υπάρχουν σύνολα $A,B$ τέτοια ώστε $f\subseteq A\times B$, κι άρα

$$\mathrm{Domain}(f)=\{x\in A\mid(\exists y)[(x,y)\in f]\}$$

και το $\mathrm{Domain}(f)$ είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**). Με το ίδιο σκεπτικό δείχνουμε πως και η $\mathrm{Image}(f)$ είναι σύνολο (υποσύνολο του $B$). Ο τελευταίος ισχυρισμός είναι τετριμμένος.

**4.17**. Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με αυτή στην Άσκηση **2.20**, κι άρα το σημαντικό είναι να διαβάσουμε τον ισχυρισμό προσεκτικά και να αναγνωρίσουμε ακριβώς ποιά αξιώματα χρησιμοποιούμε στην απόδειξή του. Θυμίσου πως η ισοπληθικότητα ανάμεσα στα $\mathcal{P}(A)$ και $\mathcal{P}(B)$ φαίνεται από τη συνάρτηση εικόνας

$$\pi(X)=f[X]\quad(X\subseteq A),$$

κι άρα πρέπει να ελέγξουμε ποιά αξιώματα χρειάζονται για την κατασκευή της σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγών. Αρχικά, οι τιμές της είναι σύνολα από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**) αφού

$$f[X] = \{y \in B \mid (\exists x \in X)[(x, y) \in f]\}\cdot$$

όμως εδώ χρησιμοποιούμε κάποιον τελεστή διατεταγμένου ζεύγους κι έτσι έμμεσα στηριζόμαστε σε όλα τα αξιώματα που χρειάζονται στην κατασκευή ενός τέτοιου τελεστή, δηλαδή σε αυτά που επικαλεστήκαμε στην απόδειξη του Λήμματος **4.2**. Εξετάζοντάς την προσεκτικά, χρειαζόμαστε το Αξίωμα Ζεύγους (**II**) για να ορίσουμε τον τελεστή Kuratowski· το Αξίωμα Έκτασης (**I**) για να δείξουμε πως ο τελεστής αυτός ικανοποιεί την (OP1)· και για να αποδείξουμε την (OP2), χρειαζόμαστε αρχικά τα Αξιώματα Ζεύγους και Ένωσης (**II**) and (**V**) για να κατασκευάσουμε το $A \cup B$, κι έπειτα το Αξίωμα Δυναμοσυνόλου (**IV**). Με λίγα λόγια, για να δείξουμε αυστηρά ότι αν $f : A \to B$, τότε η εικόνα $f[X]$ οποιουδήποτε $X \subseteq A$ είναι σύνολο, χρειαζόμαστε όλα τα αξιώματα εκτώς από το Αξίωμα του Απείρου (**VI**).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, ορίζουμε την $\pi$ σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγών:

$$\pi = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \mid (\forall y)[y \in Y \iff (\exists x \in X)[(x, y) \in f]]\}.$$

Αυτό είναι σύνολο από το Αξίωμα Διαχωρισμού (**III**) ξανά, αφού έχουμε τις βασικές ιδιότητες του τελεστή διατεταγμένου ζεύγους, όπως και πριν.

**4.18**. Οι λεπτομερείς αποδείξεις της άσκησης αυτής είναι σχεδόν ίδιες με αυτές της Άσκησης **4.17** και δεν υπάρχει λόγος να επαναληφθούν. Θα αρκεστούμε στο να ορίσουμε συναρτήσεις που φανερώνουν τις ισοπληθικότητες αυτές, με την υπόθεση ότι $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A'$ και $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B'$.

Για να δείξουμε ότι $A \uplus B =_c A' \uplus B'$, θέτουμε

$$\pi((i, x)) = \begin{cases} (\underline{\text{κυανό}}, f(x)), & \text{αν } i = \underline{\text{κυανό}}, \\ (\underline{\text{λευκό}}, g(x)), & \text{αλλιώς, δηλαδή αν } i = \underline{\text{λευκό}}. \end{cases}$$

Για να δείξουμε ότι $A \times B =_c A' \times B'$ θέτουμε

$$\pi((x, y)) = (f(x), g(y)).$$

Τέλος, για να δείξουμε ότι $(A \to B) =_c (A' \to B')$, θέτουμε για $p : A \to B$,

$$\pi(p) = \{(x, y) \in A' \times B' \mid y = g(p(f^{-1}(x)))\},$$

ακολουθώντας την απόδειξη στην Άσκηση **2.23**.

**4.22**. Χρησιμοποιόντας διαδοχικά την (C1), την υπόθεση και την (C1) ξανά,

$$A =_c |A| = |B| =_c B.$$

**4.23**. Χρησιμοποιώντας τις αντιστοιχίες $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow |A|$ και $g : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow |B|$, ορίζουμε $h : A \cup B \rightarrowtail A \uplus B$ με

$$h(x) = \begin{cases} (\underline{\text{κυανό}}, f(x)), & \text{αν } x \in A, \\ (\underline{\text{λευκό}}, g(x)), & \text{αλλιώς (δηλαδή αν } x \in B \setminus A). \end{cases}$$

Αν $A \cap B = \emptyset$, τότε οι δύο περιπτώσεις στον ορισμό της $h$ δεν επαληθεύονται ταυτόχρονα, κι έτσι η $h$ είναι αντιστοιχία που φανερώνει την

$$A \cup B =_c A \uplus B =_c |A| + |B|.$$

**4.24**. Οι ταυτότητες αυτές είναι άμεσες από τους ορισμούς, τη βασική (C1) και την Άσκηση **4.18**: δηλαδή,

$$\kappa_1 + \kappa_2 =_c \kappa_1 \uplus \kappa_2 =_c \lambda_1 \uplus \lambda_2 \text{ (από την Άσκηση } \mathbf{4.18}) =_c \lambda_1 + \lambda_2.$$

**4.26**. Αν ο $\kappa$ είναι πληθάριθμος, τότε $\kappa = |A|$ για κάποιο σύνολο $A$, και από την (C1), $\kappa =_c A$· τότε όμως από την (C2) (που ισχύει για ισχυρούς τελεστές πληθικότητας) έπεται ότι $|\kappa| = |A|$, δηλαδή $|\kappa| = \kappa$. Για τη μη τετριμμένη κατεύθυνση του δεύτερου ισχυρισμού: αν $\kappa =_c \lambda$, τότε $|\kappa| = |\lambda|$ από την (C2), κι άρα $\kappa = \lambda$ από τον πρώτο ισχυρισμό.

**4.27**. Εξ ορισμού, κάθε μέλος του $K \uplus (L \uplus M)$ έχει ακριβώς μία από τις ακόλουθες μορφές, όπου τα $k, l, m$ είναι συγκεκριμένα στοιχεία των $K, L, M$ αντίστοιχα:

$$x = (\underline{\text{κυανό}}, k), \text{ ή } x = (\underline{\text{λευκό}}, (\underline{\text{κυανό}}, l)), \text{ ή } x = (\underline{\text{λευκό}}, (\underline{\text{λευκό}}, m)).$$

Όμοια, κάθε μέλος του $(K \uplus L) \uplus M$ έχει ακριβώς μία από τις ακόλουθες μορφές, όπου τα $k, l, m$ είναι συγκεκριμένα στοιχεία των $K, L, M$ αντίστοιχα:

$$y = (\underline{\text{κυανό}}, (\underline{\text{κυανό}}, k)), \text{ ή } y = (\underline{\text{κυανό}}, (\underline{\text{λευκό}}, l)), \text{ ή } y = (\underline{\text{λευκό}}, m).$$

Η ζητούμενη αντιστοιχία $f : K \uplus (L \uplus M) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (K \uplus L) \uplus M$ προκύπτει αντιστοιχίζοντας με τον προφανή τρόπο τα στοιχεία των δύο συνόλων:

$$\begin{aligned} f(\underline{\text{κυανό}}, k) &= (\underline{\text{κυανό}}, (\underline{\text{κυανό}}, k)), \\ f(\underline{\text{λευκό}}, (\underline{\text{κυανό}}, l)) &= (\underline{\text{κυανό}}, (\underline{\text{λευκό}}, l)), \\ f(\underline{\text{λευκό}}, (\underline{\text{λευκό}}, m)) &= (\underline{\text{λευκό}}, m). \end{aligned}$$

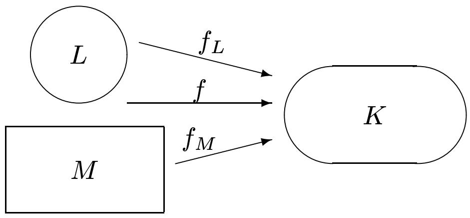
**4.28**. Αν $L \cap M = \emptyset$, τότε μπορούμε να διασπάσουμε το $(L \cup M) \times K$ στα δύο ξένα σύνολα $L \times K$ και $M \times K$, κι έτσι κάθε συνάρτηση $f \subseteq (L \cup M) \times K$ διαχωρίζεται σε δύο συναρτήσεις

$$f_L = f \cap (L \times K) : L \to K, \quad f_M = f \cap (M \times K) : M \to K.$$

Έτσι η απεικόνιση $\pi : ((L \cup M) \to K) \to (L \to K) \times (M \to K)$ ορίζεται με τον τύπο

$$\pi(f) = (f_L, f_M),$$

και είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι είναι όντως αντιστοιχία.




ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2. Άσκηση **4.28**.

Για να αποδείξουμε την ταυτότητα των πληθαρίθμων (4-17) από αυτό, χρησιμοποιούμε τη $\lambda \uplus \mu = L \cup M$ με $L = \{\underline{\text{κυανό}}\} \times \lambda$ και $M = \{\underline{\text{λευκό}}\} \times \mu$, έτσι ώστε $L \cap M = \emptyset$ και $\lambda =_c L$, $\mu =_c M$. Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \kappa^{(\lambda+\mu)} &=_c (L \cup M) \to K && \text{(ορισμός, (C1) και } \mathbf{4.18}\text{)} \\ &=_c (L \to K) \times (M \to K) \\ &=_c \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu && \text{(ορισμός, (C1) και } \mathbf{4.18}\text{).} \end{aligned}$$

**5.18**. Αποδεικνύουμε με επαγωγή στο $n$ ότι κάθε συνάρτηση

$$f_n(s) = n + s$$

είναι μονομορφισμός. Στη βάση είναι τετριμμένο αφού $f_0(s) = s$, και στο επαγωγικό βήμα,

$$f_{n+1}(s) = (n+1) + s = (n+s) + 1 = f_n(s) + 1,$$

έτσι που η $f_{n+1}$ είναι σύνθεση της $f_n$ και της συνάρτησης επομένου. Και οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι ένα-προς-ένα, άρα το ίδιο και η $f_{n+1}$.

**5.25**. Για τον πρώτο ισχυρισμό, υποθέτουμε πως υπάρχει $k \in [n, n)$, έτσι ώστε να υπάρχουν $t$ και $s$ με

$$n + t = k, \ k + s = n, \ k \neq n.$$

Έπεται ότι $n+t+s = n$, που με τρεις εφαρμογές της Άσκησης **5.18** συνεπάγεται ότι $t = 0$ και $s = 0$· έτσι συνάγουμε ότι $k = n$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι ουσιαστικά άλλη μορφή του Λήμματος **5.22**. Αρχικά υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} k < Sm &\iff k \leq Sm \,\&\, k \neq Sm && \text{(ορισμός.),} \\ &\iff (k \leq m \vee k = Sm) \,\&\, k \neq Sm && \text{(Λήμμα } \mathbf{5.22}\text{),} \\ &\iff k \leq m \\ &\iff (k \leq m \,\&\, k \neq m) \vee k = m \\ &\iff k < m \vee k = m, \end{aligned}$$

όπου για την τρίτη ισοδυναμία χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$k \leq m \Longrightarrow k \neq Sm,$$

που ισχύει αφού αν δεχτούμε την άρνησή του καταλήγουμε στο άτοπο $Sm \leq m$: αν $Sm + t = m$, τότε $m + St = m$, κι άρα $St = 0$ από την ΐσκηση **5.18**, που δεν μπορεί να ισχύει. Έπεται ότι για όλα τα $k$ και $n \leq m$,

$$k \in [n, Sm) \iff n \leq k \,\&\, k < Sm \iff n \leq k \,\&\, (k < m \vee k = m)$$
$$\iff (n \leq k \,\&\, k < m) \vee (n \leq k \,\&\, k = m) \iff k \in \Big([n, m) \cup \{m\}\Big),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την υπόθεση $n \leq m$.

**6.3**. Για κάθε $x \in P$, έχουμε $x \leq M$ αφού το $M$ είναι μέγιστο· και αν το $M'$ είναι κάποιο άνω φράγμα του $P$, τότε επειδή $M \in P$, έχουμε $M \leq M'$.

**6.4**. (1) Το $\{e, f\}$ δεν έχει άνω φράγμα. (2) Το $\{a, c\}$ έχει άνω φράγματα ($b$, $d$, $e$ και $f$) αλλά όχι ελάχιστο άνω φράγμα. (3) Το $\{b, d\}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα ($e$) αλλά όχι μέγιστο στοιχείο.

**6.5**. Κάθε μέλος του $P$ είναι άνω φράγμα του $\emptyset$, αφού (τετριμμένα) ικανοποιεί την απαραίτητη συνθήκη

$$(\forall x)[x \in \emptyset \Longrightarrow x \leq M]\cdot$$

έπεται ότι το $M$ είναι *το ελάχιστο άνω φράγμα* του $\emptyset$ αν και μόνον αν είναι το ελάχιστο στοιχείο του $P$.

**6.6**. Όλες οι συνθήκες

$$X \subseteq X,\ [X \subseteq Y \,\&\, Y \subseteq Z] \Longrightarrow X \subseteq Z,\ [X \subseteq Y \,\&\, Y \subseteq X] \Longrightarrow X = Y$$

είναι τετριμμένες. Αν το $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(A)$ είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο υποσυνόλων του $A$, τότε η ένωση του $\bigcup \mathcal{E}$ είναι ένα άνω φράγμα για το $\mathcal{E}$, επειδή $X \in \mathcal{E} \Longrightarrow X \subseteq \bigcup \mathcal{E}\cdot$ και είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, επειδή για κάθε $M'$, αν $X \subseteq M'$ για όλα τα $X \in \mathcal{E}$, τότε $\bigcup \mathcal{E} \subseteq M'$.

**6.9**. Αν το $E$ είναι κενό, τότε $(A \rightharpoonup E) = (A \to E) = \{\emptyset\}$ και τελειώσαμε, οπότε υποθέτουμε πως $e_0 \in E$. Για τυχαία $f : A \rightharpoonup E$ και $X = \mathrm{Domain}(f)$, θέτουμε

$$f'(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x)\downarrow, \\ e_0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

έτσι που $f' : A \to E$ και $f' \restriction X = f\cdot$ κι αν $f : A \to E$ και $X \subseteq A$, τότε $f \restriction X : A \rightharpoonup E$ με $\mathrm{Domain}(f \restriction X) = X$, άμεσα από τους ορισμούς.

**6.11**. Το κενό σύνολο πληρεί (αυστηρά) τη συνθήκη

$$(\forall x, y)[(x \in \emptyset \ \&\ y \in \emptyset) \Longrightarrow x \leq y \vee y \leq x],$$

δηλαδή είναι αλυσίδα.

**6.12**. Οι μοναδικές αλυσίδες σε έναν επίπεδο χώρο είναι $P$ είναι τα μονοσύνολα (ακόμα και το $\{\perp\}$) και τα δισύνολα της μορφής $\{\perp, a\}$, και καθένα από αυτά τα σύνολα έχει μέγιστο, που είναι ταυτόχρονα και ελάχιστο άνω φράγμα.

Ένας διακριτός χώρος με τουλάχιστον δύο στοιχεία $a, b$, δεν μπορεί να είναι επαγωγικός· έτσι τα μονοσύνολα είναι οι μοναδικοί διακριτοί χώροι που είναι επαγωγικοί.

**6.13**. Έστω $u, v \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Τότε υπάρχουν $n, m$ τέτοια ώστε $u = x_n$ και $v = x_m$· αν $n \leq m$, τότε $u = x_n \leq x_m = v$, και ομοίως αν $m \leq n$, τότε $v \leq u$.

**6.15**. Με τη συνήθη διάταξη, ο $\mathbb{N}$ είναι αλυσίδα κι όχι άνω φραγμένος· κι ο χώρος του Διαγράμματος **6.2** δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

**6.16**. Ισχυριζόμαστε ότι αν $X \subseteq P = E^* \bigcup (\mathbb{N} \to E)$ και το $X$ είναι αλυσίδα, τότε η ένωση $\bigcup X$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$: επειδή αν $(x, y), (x, y') \in \bigcup X$, τότε υπάρχουν $p, q \in X$ τέτοια ώστε $(x, y) \in p$ και $(x, y') \in q$· και αν $p \subseteq q$, έχουμε $(x, y), (x, y') \in q$ έτσι ώστε $y = y'$, ενώ αν $q \subseteq p$ έχουμε $(x, y), (x, y') \in p$, έτσι ώστε και πάλι $y = y'$. Επιπλέον, το πεδίο ορισμού της $\bigcup X$ είναι είτε ολόκληρο το $\mathbb{N}$ είτε κάποιο πεπερασμένο, αρχικό τμημα του $\mathbb{N}$, διότι είναι κλειστό για τη $<$:

$$\begin{aligned} x < x' \in \mathrm{Domain}(\bigcup X) &\Longrightarrow \text{για κάποιο } p \in X, x' \in \mathrm{Domain}(p) \\ &\Longrightarrow x \in \mathrm{Domain}(p) \\ &\Longrightarrow x \in \mathrm{Domain}(\bigcup X). \end{aligned}$$

Έτσι, $\bigcup X \in P$, και είναι φανερό ότι είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $X$.

**6.17**. Για τυχαία αλυσίδα *μερικών μονομορφισμών* $S \subseteq (A \rightarrowtail B)$, θέτουμε $p^* = \bigcup S =$ η ένωση του $S$. Προφανώς το $p^*$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $S$ με τη $\subseteq$ , άρα αρκεί να δείξουμε ότι είναι μερική διάταξη, δηλαδή ότι

$$(x, y), (x, y') \in p^* \Longrightarrow y = y, \tag{a}$$

$$(x, y), (x', y) \in p^* \Longrightarrow x = x'. \tag{b}$$

(a): Από την υπόθεση, υπάρχουν $p, p' \in S$ τέτοια που $(x, y) \in p$ και $(x, y') \in p'$· αν $p \leq p'$, τότε $(x, y) \in p'$, κι αφού το $p'$ είναι μερική συνάρτηση και περιέχει το $(x, y')$, θα πρέπει να ισχύει $y = y'$· κι αν $p \leq p$, συμμετρικά οδηγούμαστε στο ίδιο συμπέρασμα.

Όμοια δείχνουμε και την (b).

**6.20**. Αν $x_0 \leq_P x_1 \leq_P \cdots$, τότε το σύνολο τιμών $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ της ακολουθίας $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και η εικόνα του $\pi[X] = \{\pi(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ από μια μονοτονική $\pi$ είναι μη κενές, απαριθμητές αλυσίδες, κάτι που χρησιμοποιήσαμε εξ' αρχής για να ορίσουμε τα όρια μονοτονικών ακολουθιών,

$$\lim_n x_n = \sup X, \quad \lim_n \pi(x_n) = \sup \pi[X].$$

Έπεται ότι αν η $\pi$ είναι αριθμήσιμα συνεχής, τότε

$$\pi(\lim_n x_n) = \pi(\sup[X]) = \sup \pi[X] = \lim_n \pi(x_n),$$

κι έτσι έχουμε τη μία κατεύθυνση της Άσκησης. Για την άλλη, υποθέτουμε ότι το $S = \{s_0, s_1, \ldots, \}$ είναι μια μη κενή απαριθμητή αλυσίδα του $P$, και ορίζουμε τη συνάρτηση (ακολουθία) $x : \mathbb{N} \to S$ με αναδρομή,

$$x_0 = s_0, \quad x_{n+1} = \max_P(x_n, s_{n+1}).$$

Ο ορισμός αυτός έχει νόημα, αφού κάθε $x_n$ είναι μέλος της αλυσίδας $S$ κι άρα συγκρίσιμο με το $s_{n+1}$. Με μια απλή επαγωγή στο $n$,

$$x_n \in S,\ s_n \leq_P x_n,\ x_n \leq_P x_{n+1},$$

από όπου έπεται ότι

$$\sup S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim x_n\cdot$$

το ίδιο ισχύει και για τις εικόνες οποιασδήποτε μονοτονικής $\pi$,

$$\sup \pi[S] = \sup\{\pi(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_n \pi(x_n).$$

Ετσι, αν η $\pi$ σέβεται (διατηρεί) τα όρια μονοτονικών ακολουθιών, έχουμε το ζητούμενο

$$\sup \pi[S] = \lim_n \pi(x_n) = \pi(\lim_n x_n) = \pi[\sup S].$$

**6.24**. Κατευθείαν από τον ορισμό,

$$\pi(f)(n) = \pi(f_0)(n),$$

όπου $f_0$ είναι ο περιορισμός της $f$ στο πεπερασμένο σύνολο $\{0, \dots, n\}$. Για το δεύτερο σκέλος, αν $f(n) = 2n$, τότε

$$\pi(f)(2) = f(0) + f(1) + f(2) = 0 + 2 + 4 = 6.$$

**6.26**. Αν η $f : X \to Y$ είναι συνεχής και το $F \subseteq Y$ είναι κλειστό, τότε το $G = Y \setminus F$ είναι ανοικτό, και $F = Y \setminus G$, άρα

$$f^{-1}[F] = f^{-1}[Y \setminus G] = f^{-1}[Y] \setminus f^{-1}[G] = X \setminus f^{-1}[G],$$

κι έτσι το $f^{-1}[F]$ είναι κλειστό. Συμμετρικά αποδεικνύουμε ότι αν το $f^{-1}[F]$ είναι κλειστό για κάθε κλειστό $F \subseteq Y$, τότε το $f^{-1}[G]$ θα είναι ανοικτό για κάθε ανοικτό $G \subseteq Y$, κι έτσι η $f$ είναι συνεχής.

**6.32**. Κατευθείαν από τον ορισμό,

$$\pi(f)(n) = \pi(f_0)(n),$$

με $f_0 = \{(n, 0)\}$ αν $n \in A$, κι αν $n \notin A$, τότε

$$f_0 = \{(n, h(w)) \mid (n+1, w) \in f\}.$$

Αυτή η $f_0$ είναι πεπερασμένη, για την ακρίβεια ορίζεται σε ακριβώς έναν αριθμό αν $n \in A$ ή αν $n \notin A \,\&\, f(n+1)\downarrow$, ενώ σε αντίθετη περίπτωση, είναι η κενή μερική συνάρτηση· έτσι, από την **6.23**, η $\pi$ είναι συνεχής απεικόνιση.

**7.3**. Έστω $\leq_C$ καλή διάταξη του $C$ και $f : A \rightarrowtail C$ μονομορφισμός. Θέτουμε

$$x \leq_A y \iff f(x) \leq_C f(y) \qquad (x, y \in A),$$

και δείχνουμε ότι η $\leq_A$ είναι καλή διάταξη του $A$.

Το ότι η $\leq_A$ είναι γραμμική, αποδεικνύεται τετριμμένα, ουσιαστικά με απλό έλεγχο. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} x \leq_A y \,\&\, y \leq_A z &\Longrightarrow f(x) \leq_C f(y) \,\&\, f(y) \leq_C f(z) \\ &\Longrightarrow f(x) \leq_C f(z) \quad (\text{επειδή η } \leq_C \text{ είναι μεταταβατική}) \\ &\Longrightarrow x \leq_A z \quad (\text{από τον ορισμό}), \end{aligned}$$

κι έτσι η $\leq_A$ είναι μεταβατική.

Για να δείξουμε ότι η $\leq_A$ είναι καλή διάταξη του $A$, υποθέτουμε ότι $X \subseteq A$ και $X \neq \emptyset$. Έστω $f[X]$ η εικόνα του $X$· έτσι το $f[X]$ είναι μη κενό υποσύνολο του $C$, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο $f(m)$· έπεται ότι το $m$ είναι το $\leq_A$-ελάχιστο στοιχείο του $X$, αφού για κάθε $x \in X$, $f(m) \leq_C f(x)$ και επομένως $m \leq_A x$, εξ ορισμού.

**7.4**. Αν $(C, \leq_C)$ είναι καλά διατεταγμένο σύνολο και $f : C \twoheadrightarrow A$, ορίζουμε μια «αντίστροφη» συνάρτηση $g : A \to C$ με

$$g(x) = \min_C \{y \mid f(y) = x\}.$$

Αυτή είναι μονομορφισμός· διότι αν $x \neq x'$, τότε

$$\{y \mid f(y) = x\} \cap \{y \mid f(y) = x'\} = \emptyset,$$

και το $g(x)$ είναι το πρώτο από αυτά τα δύο σύνολα, ενώ το $g(x')$ το δεύτερο.

Τώρα εφαρμόζουμε την Άσκηση **7.3** χρησιμοποιώντας αυτόν τον μονομορφισμό.

**7.6**. Αυτό είναι τετριμμένο: ο περιορισμός $\leq_I$ της $\leq_U$ στο $I$ κληρονομεί την αυτοπάθεια, τη μεταβατικότητα και την αντισυμμετρικότητα, και κάθε μη κενό $X \subseteq I$ έχει ελάχιστο στοιχείο στο $U$ που είναι και το ελάχιστό του στο $I$.

**7.8**. Από τον ορισμό, $\mathbf{seg}(0) = \{x \in U \mid x <_U 0\}$, κι άρα $\mathbf{seg}(0) = \emptyset$ αφού το 0 είναι το ελάχιστο στοιχείο.

Και πάλι από τον ορισμό,

$$S(x) = \min\{y \in U | x <_U y\},$$

κι έτσι δεν υπάρχει $z \in U$ με $x <_U z <_U S(x)$· αυτό σημαίνει ότι

$$y <_U S(x) \iff y <_U x \vee y = x,$$

δηλαδή $\mathbf{seg}(S(x)) = \mathbf{seg}(x) \cup \{x\}$.

**7.10**. Αν $V$ είναι το σύνολο όλων των αρχικών τμημάτων του $U$, τότε

$$V = V_p \cup \{U\},$$

όπου τα «γνήσια» αρχικά τμήματα στο $V_p$ είναι εκείνα που γράφονται σαν $\mathbf{seg}_U(x)$ με $x \in U$. Επιπλέον, η απεικόνιση

$$f(I) = \text{το μοναδικό } x \in U \text{ τέτοιο πού } I = \mathbf{seg}_U(x)$$

διατηρεί προφανώς τη διάταξη από το $V_p$ στο $U$—συγκεκριμένα είναι ομοιότητα, κι έτσι ο $V_p$ είναι καλά διατεταγμένος. Τώρα, προσθέτοντας ένα σημείο $(U)$ στην κορυφή του $V_p$, παίρνουμε τον $V$, κι άρα εξακολουθεί να είναι καλά διατεταγμένος—η λεπτομερής απόδειξη για αυτό βρίσκεται στην Άσκηση **7.18** παρακάτω.

**7.12**. Από τον Ορισμό **6.18**, μια απεικόνιση $\pi : P \to Q$ είναι μονοτονική αν

$$x \le y \Longrightarrow \pi(x) \le \pi(y),$$

κι έτσι, σέβεται τις διατάξεις, αν *επιπλέον* ισχύει και το αντίστροφο,

$$\pi(x) \le \pi(y) \Longrightarrow x \le y.$$

Έτσι οι απεικονίσεις που σέβονται τις διατάξεις είναι μονοτονικές. Αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο αποτελεί οποιαδήποτε σταθερή απεικόνιση $\pi(t) = c$, επιλέγοντας το $P$ ώστε να έχει (τουλάχιστον) δύο μέλη $x \neq y$· οι σταθερές απεικονίσεις είναι τετριμμένα μονοτονικές, όμως αυτή δεν μπορεί να σέβεται τις διατάξεις, αφού $\pi(x) = \pi(y) = c$, από το οποίο έπεται (αν η $\pi$ σέβεται τις διατάξεις) ότι $x \le y$ και $y \le x$, δηλαδή $x = y$.

**7.13**. Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι οι $P$ και $Q$ είναι γραμμικοί, ότι η συνάρτηση $f : P \to Q$ σέβεται τις διατάξεις και ότι $x <_P y$ αλλά $f(x) \not<_Q f(y)$. Έπεται από τη γραμμικότητα του $Q$ ότι $f(y) \le_Q f(x)$· όμως από αυτό συνάγουμε ότι $y \le_P x$, αφού η $f$ σέβεται τις διατάξεις, που αντιτίθεται στην υπόθεση.

Για το αντίστροφο, δεχόμαστε ότι οι $P$ και $Q$ είναι γραμμικοί και ότι η $f$ είναι αυστηρά μονοτονική, αλλά δε σέβεται τις διατάξεις. Από τη μονοτονικότητα τη $f$, $x \le_P y \Longrightarrow f(x) \le_Q f(y)$, διακρίνοντας περιπτώσεις $x = y$ ή $x <_P y$, κι έτσι, αφού η $f$ δε σέβεται τις διατάξεις, υπάρχουν $x, y \in P$ με $f(x) \le_Q f(y)$ αλλά $x \not\le_P y$. Όμως τότε έχουμε $y <_P x$ από τη γραμμικότητα του $P$· έτσι, αφού η $f$ είναι αυστηρά μονοτονική, συνάγουμε $f(y) <_Q f(x)$, ενάντια στην υπόθεση $f(x) \le_Q f(y)$.

**7.14**. Η ταυτοτική απεικόνιση $\pi(x) = x$ στο $P$ είναι ομοιότητα, κι έτσι $P =_o P$.

Για τη συμμετρικότητα, δεχόμαστε ότι η $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q$ είναι ομοιότητα. Τώρα, αν $\pi^{-1} : Q \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow P$ είναι η αντίστροφη αντιστοιχία και $x, y \in Q$, έχουμε

$$\pi^{-1}(x) \le_P \pi^{-1}(y) \iff \pi(\pi^{-1}(x)) \le_Q \pi(\pi^{-1}(y)) \iff x \le_P y$$

εφόσον $\pi(\pi^{-1}(z)) = z$ για κάθε $z \in Q$.

Για τη μεταβατικότητα, παρατηρούμε ότι *η σύνθεση απεικονίσεων που σέβονται τις διατάξεις, σέβεται τις διατάξεις*:

$$x \le_P y \iff \pi(x) \le_Q \pi(y) \iff \rho(\pi(x)) \le_R \rho(\pi(y)).$$

Όμως η σύνθεση αντιστοιχιών είναι αντιστοιχία, άρα *η σύνθεση ομοιοτήτων είναι ομοιότητα*, κι έτσι η $=_o$ είναι μεταβατική.

**7.17**. Αν η $\pi : P \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow Q$ είναι ομοιότητα του $P$ με τον $Q$, τότε η επέκτασή της $p \cup \{(t_P, t_Q)\}$ είναι εύκολα ομοιότητα του $\mathrm{Succ}(P)$ με τον $\mathrm{Succ}(Q)$.

**7.18**. Το ότι η $\le_{\mathrm{Succ}(U)}$ είναι γραμμική διάταξη του $\mathrm{Field}(U) \cup \{t_U\}$ είναι προφανές. Είναι και καλή διάταξη, αφού αν υποθέτοντας ότι $\emptyset \neq X \subseteq \mathrm{Field}(U) \cup \{t_U\}$, αν $X = \{t_U\}$, τότε το $t_U$ είναι το ελάχιστο του $X$ στον $\mathrm{Succ}(U)$, κι άν

$X \cap \mathrm{Field}(U) \neq \emptyset$, τότε το $\leq_U$-ελάχιστο μέλος του συνόλου αυτού είναι το $\leq_{\mathrm{Succ}(U)}$-ελάχιστο μέλος του $X$.

**7.28**. Έστω $\sigma = \rho\pi$ η σύνθεση των $\pi$ και $\rho$, έτσι ώστε

$$\sigma(x) = \rho(\pi(x)) \quad (x \in U).$$

Για να αποδείξουμε ότι η $\sigma : U \to W$ σέβεται τις διατάξεις, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} x \leq_U y &\iff \pi(x) \leq_V \pi(y) \\ &\iff \rho(\pi(x)) \leq_W \rho(\pi(x)) \\ &\iff \sigma(x) \leq_W \sigma(y). \end{aligned}$$

Τελικά, για να δείξουμε ότι το $\sigma[U]$ είναι αρχικό τμήμα του $W$, υποθέτουμε ότι $w \in \sigma[U] = \rho[\pi[U]]$, έτσι που $w = \rho(v)$ για κάποιο $v \in \pi[U]$, και $w' <_W w$. Όμως η $\rho$ είναι αρχική ομοιότητα, κι άρα πρέπει να υπάρχει κάποιο $v' \in V$ με $w' = \rho(v')$· κι αφού $\rho(v') <_W \rho(v)$ και η $\rho$ σέβεται τις διατάξεις, θα πρέπει να ισχύει $v' <_V v$. $v \in \pi[U]$, κι άρα έχουμε κάποιο $u \in U$ τέτοιο ώστε

$$v = \pi(u) \text{ και } v' <_V v.$$

Όμως η $\pi$ είναι επίσης αρχική ομοιότητα, κι άρα (όπως και πριν) θα υπάρχει κάποιο $u' <_U u$ με $v' = \pi(u')$, από το οποίο συνάγουμε ότι

$$\sigma(u') = \rho(\pi(u')) = \rho(v') = w',$$

και τελειώσαμε.

**8.3**. Για μια οικογένεια $\mathcal{E}$ που περιέχει το $\emptyset$, δεν υπάρχει δύνολο επιλογής, αφού το $S \cap \emptyset$ δεν είναι μονοσύνολο. Για το δεύτερο παράδειγμα, αν το $S$ είναι σύνολο επιλογής για το $\mathcal{E}$, τότε $S \cap \{a\} = \{a\}$ και επίσης $S \cap \{b\} = \{b\}$, έτσι που $\{a, b\} \subseteq S$, και το $S \cap \{a, b\}$ δεν είναι μονοσύνολο.

**8.7**. Έστω $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ και $\varepsilon$ συνάρτηση επιλογής για το $B$, έτσι ώστε

$$[X \subseteq B \,\&\, X \neq \emptyset] \Longrightarrow \varepsilon(X) \in X.$$

Ορίζουμε $f : A \to B$ με

$$f(x) = \varepsilon(\{y \mid P(x, y)\}).$$

Αυτό έχει νόημα, αφού για κάθε $x \in A$, $\{y \mid P(x, y)\} \neq \emptyset$ από την υπόθεση. Επιπλέον, $f(x) \in \{y \mid P(x, y)\}$ για οποιοδήποτε $x \in A$, μιας και η $\varepsilon$ είναι συνάρτηση επιλογής για το $B$, και έτσι φτάνουμε στο ζητούμενο $P(x, f(x))$.

**8.15**. Έστω $a \in A$, $P \subseteq A \times A$, και $(\forall x \in A)(\exists y \in A)P(x, y)$. Θεωρούμε

$$\begin{aligned} P^*(u, x) \iff\ & u \in A^* \,\&\, x \in A \\ & \& \Big[[u = \emptyset \,\&\, x = a] \vee [\mathrm{lh}(u) > 0 \,\&\, P(u(\mathrm{lh}(u) - 1), x)]\Big]. \end{aligned}$$

Αν $u = \emptyset$, τότε $P^*(u, a)$, και αν $u = \langle u_0, \ldots, u_n \rangle$ με $n \geq 0$ και $P(u_n, x)$, τότε $P^*(u, x)$· έτσι η υπόθεση για το $P$ συνεπάγεται $(\forall u)(\exists x)P^*(u, x)$, και η δοσμένη εκδοχή του **DC** μας δίνει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ έτσι που $(\forall n)P^*(\overline{f}(n), f(n))$ και $f(0) = a$. Επιπλέον, αν $n > 0$,

$$P^*(\overline{f}(n), f(n)) \iff P(f(n-1), f(n)),$$

έτσι ώστε $(\forall n > 0)P(f(n-1), f(n))$, με άλλα λόγια $(\forall n)P(f(n), f(n+1))$.

**8.18**. Έστω $(P, \leq)$ γραμμική και εδραιωμένη, και $X \subseteq P$ ένα μη κενό σύνολο σημείων· έπεται ότι υπάρχει $m \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$, $x \not< m$, το οποίο από τη γραμμικότητα του $\leq$ σημαίνει ότι $m \leq x$, και έτσι το $m$ είναι το ελάχιστο μέλος του $X$. Αντίστροφα, αν η $(P, \leq)$ είναι καλή διάταξη και το $X$ ένα μη κενό υποσύνολο του $P$, τότε το $X$ έχει ελάχιστο $m$, που είναι προφανώς ελαχιστικό στο $X$.

**9.4**. Αν το $u$ είναι τερματικός κόμβος, τότε $u \sqsubseteq w \Longrightarrow w = u$, έτσι που $T_u = \{w \in T \mid w \sqsubseteq u\}$· από την άλλη μεριά, το δεύτερο σύνολο στην (9-2) είναι κενό (επειδή το $u$ δεν έχει παιδιά), και έτσι η (9-2) αληθεύει. Αν το $u$ δεν είναι τερματικό, τότε προφανώς, για κάθε $w$,

$$u \sqsubseteq w \iff (\exists v)[\text{το } v \text{ είναι παιδί του } u \,\&\, v \sqsubseteq w],$$

από το οποίο και πάλι έπαιται η (9-2).

**9.5**. Αν το $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι άπειρο κλαδί, τότε

$$f(0) > f(1) > \cdots,$$

αλλά δεν υπάρχουν άπειρες, (γνήσια) φθίνουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών.

**9.12**. Με όλες τις λεπτομέρειες, γνωρίζουμε ότι $\kappa <_c 2^\kappa$, και έτσι $\kappa^+ \leq_c 2^\kappa$ από την (9-5). Από το **GCH**, δεν υπάρχει πληθάριθμος αυστηρά ανάμεσα σε έναν άπειρο $\kappa$ και στον $2^\kappa$, έτσι που $\kappa^+ =_c 2^\kappa$· και, αντίστροφα, αν $\kappa^+ =_c 2^\kappa$, τότε δεν υπάρχει πληθάριθμος αυστηρά ανάμεσα στον $\kappa$ και στον $2^\kappa$, πάλι από την (9-5).

**9.19**. Αν τα $\kappa_1$ και $\kappa_2$ ικανοποιούν τις (1) – (3), τότε $\kappa_1 =_c A$ για κάποιο $A \in \mathcal{E}$ από τη (2) για $\kappa_1$· έτσι έχουμε $\kappa_2 \leq_c A \leq_c \kappa_1$ από την (3) για $\kappa_2$. Συμμετρικά έπεται ότι $\kappa_1 \leq_c \kappa_2$.

**9.22**. Αυτό είναι άμεσο, από το θεώρημα και το γεγονός ότι για κάθε $i$, $\{i\} <_c 2$, αφού το 2 είναι σύνολο με δύο μέλη.

**9.24**. Αυτό είναι άμεσο.

**10.2**. Δεχόμαστε ότι $u \sqsubseteq v$ και υπολογίζουμε:

$$x \in \mathcal{N}_v \Longrightarrow v \sqsubseteq x \Longrightarrow u \sqsubseteq x \Longrightarrow x \in \mathcal{N}_u.$$

Το αντίστροφο είναι εξίσου προφανές.

**10.3**. Η οικογένεια των γειτονιών είναι ισοπληθική με το $\mathbb{N}^*$, και $\mathbb{N}^* =_c \mathbb{N}$.

**10.5**. Αν το $G$ είναι ανοικτό και $x \in G$, τότε από τη (10-6), υπάρχει $u$ με $x \in \mathcal{N}_u \subseteq G$· και αν κάθε $x \in G$ ανήκει σε κάποιο $\mathcal{N}_u \subseteq G$, τότε η (10-6) ισχύει τετριμμένα.

**10.9**. Εξ ορισμού, $\mathcal{N}_u = [T_u]$, όπου το υπόδεντρο $T_u$ ορίζεται στην (9-1) και είναι διασπώμενο, αφού για κάθε $v \in T_u$ και κάθε $n$, $v \star \langle n \rangle \in T_u$.

**10.13**. Αν το $A$ είναι αναπαρίθμητο και $A = \bigcup_n A_{n\in\mathbb{N}}$, τότε τουλάχιστον ένα $A_n$ πρέπει να είναι αναπαρίθμητο· και αν $A_n \in \Gamma$, τότε το $A_n$ έχει μη κενό, τέλειο υποσύνολο $P$ από την υπόθεση, και έτσι $P \subseteq A$.

**10.17**. Αν η $\pi : (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N})$ είναι συνεχής και $x \in \mathcal{N}$, τότε

$$\pi(x) = \sup\{\pi(v) \mid v \in \mathbb{N}^*, v \sqsubseteq x\},$$

και έτσι αν $\pi(x) \in \mathcal{N}_u$ (που σημαίνει ότι $u \sqsubseteq \pi(x)$), θα πρέπει να υπάρχει κάποιο $v \sqsubseteq x$ με $u \sqsubseteq \pi(v)$· απο αυτό όμως έπεται ότι $u \sqsubseteq \pi(y)$ για κάθε $y \in \mathcal{N}$ με $v \sqsubseteq y$, έτσι που τελικά,

$$y \in \mathcal{N}_v \Longrightarrow \pi(y) \in \mathcal{N}_u$$

για αυτό το $v$, γεγονός που φανερώνει τη συνέχεια της $f = \pi \restriction \mathcal{N}$ στο $x$.

**10.26**. Βαφτίζουμε (προσωρινά) *καλή* μια οικογένεια συνόλων απ' αυτές που η τομή τους καθορίζει το $\mathcal{B}(X)$, δηλαδή

$$\begin{aligned} \text{η } \mathcal{E} \text{ είναι καλή} \iff\ & \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E} \\ & \&\, (\forall \{A_n\}_n)[(\forall n) A_n \in \mathcal{E} \Longrightarrow \textstyle\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}] \\ & \&\, (\forall A \in \mathcal{E})[cA \in \mathcal{E}]\}. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{B}(X) = \bigcap\{\mathcal{E} \mid \text{η } \mathcal{E} \text{ είναι καλή}\}$, είναι $\sigma$-πεδίο που περιέχει όλα τα ανοικτά σύνολα (δηλαδή, καλό), πρέπει να επαληθεύσουμε τους ακόλουθους τρεις ισχυρισμούς:

(1) *Κάθε ανοικτό σύνολο $G \subseteq X$ ανήκει στο $\mathcal{B}(X)$*· αυτό ισχύει διότι $G \in \mathcal{E}$ για κάθε καλή $\mathcal{E}$, και έτσι $G \in \mathcal{B}(X)$.

(2) *Αν $A \in \mathcal{B}(X)$, τότε $cA \in \mathcal{B}(X)$*: αν $A \in \mathcal{E}$ για κάθε καλή $\mathcal{E}$, τότε $cA \in \mathcal{E}$ για κάθε καλή $\mathcal{E}$, από τον ορισμό της «καλοσύνης», και έτσι $cA \in \mathcal{B}(X)$.

(3) *Αν $A_n \in \mathcal{B}(X)$ για κάθε $n$, τότε $\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(X)$.* Έστω $\mathcal{E}$ μια καλή οικογένεια. Από την υπόθεση έχουμε ότι κάθε $A_n \in \mathcal{E}$, και έτσι πάλι από τον ορισμό της «καλοσύνης», $\bigcup_n A_n \in \mathcal{E}$· όμως η $\mathcal{E}$ επιλέχτηκε τυχαία, και έτσι η $\bigcup_n A_n$ ανήκει σε κάθε καλή οικογένεια, που σημαίνει ότι $\bigcup_n A_n \in \mathcal{B}(X)$.

**10.27**. Από το Πρόβλημα **x1.3**, $\bigcap_n A_n = c(\bigcup_n cA_n)$.

**11.4**. Από το Αξίωμα Αντικατάστασης, η εικόνα $F[X]$ συνόλου $X$ είναι επίσης σύνολο, και άρα υπάρχει κάποιο $w$ που ικανοποιεί τη συνθήκη

$$(\forall y)[y \in w \iff (\exists x \in X)[y = F(x)]]\cdot$$

και από το Αξίωμα Έκτασης, το $w$ είναι μοναδικό, άρα μπορούμε να ορίσουμε

$$G(X) = \text{το μοναδικό } w \text{ τέτοιο ώστε } (\forall y)[y \in w \iff (\exists x \in X)[y = F(x)]].$$

**11.7**.

$$H(w,n) = \begin{cases} a, & \text{αν } n = 0, \\ F(y), & \text{αν } n > 0 \,\&\, (n-1,y) \in w \,\&\, (\forall t \neq y)[(n-1,t) \notin w], \\ \emptyset, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

**11.9**. Για αυτές τις περιπτώσεις, είναι ευκολότερο να δείξουμε $\bigcup M \subseteq M$, αφού πρώτα υπολογίσουμε τις σχετικές ενώσεις:

$$\begin{aligned} \bigcup \emptyset &= \emptyset, \\ \bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &= \{\emptyset\}, \\ \bigcup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\ \bigcup \mathbb{N}_0 &= \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Τέλος, αν το $M$ είναι κλάση ατόμων, τότε $\bigcup M = \emptyset$, και έτσι $\bigcup M \subseteq M$.

**11.11**. Από τον ορισμό, $A \in \mathrm{TC}(A)$ και το $\mathrm{TC}(A)$ είναι μεταβατικό, έτσι που $A \subseteq \mathrm{TC}(A)$ και άρα $A \cup \{A\} \subseteq \mathrm{TC}(A)$, για κάθε $A$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι το $A$ είναι μεταβατικό και $x \in A \cup \{A\}$. Αν $x \in A$, τότε $x \subseteq A \subseteq A \cup \{A\}$, και αν $x = A$, τότε και πάλι $x \subseteq A \subseteq A \cup \{A\}$· το οποίο δείχνει ότι το $A \cup \{A\}$ είναι μεταβατική, και άρα $A \cup \{A\} \subseteq \mathrm{TC}(A)$.

**11.13**. Αν δεν υπάρχουν άτομα, τότε η μεταβατική κλειστότητα $\mathrm{TC}(A)$ κάθε συνόλου δεν έχει άτομα, και έτσι κάθε σύνολο είναι αγνό. Αντίστροφαμ αν υπάρχει κάποιο άτομο $a$, τότε $\mathrm{TC}(\{a\}) = \{\{a\}, a\}$, και έτσι το $\{a\}$ δεν είναι αγνό.

**11.14**. Αν το $A$ είναι μεταβατικό, τότε $\mathrm{TC}(A) = A \cup \{A\}$ από την Άσκηση **11.11**, και το $A \cup \{A\}$ είναι πεπερασμένο ή απαριθμητό ακριβώς όταν το $A$ είναι πεπερασμένο ή απαριθμητό.

**11.16**. Λάθος: το μονοσύνολο $\{a\}$ ενός ατόμου είναι μεταβατικό και έχει μεταβατική κλειστότητα $\mathrm{TC}(\{a\}) = \{\{a\}, a\}$, χωρίς να είναι υποσύνολο του δυναμοσυνόλου του $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$, του οποίου όλα τα μέλη (εξ ορισμού) είναι σύνολα.

**11.17**. Η συμπερίληψη $M_n(I) \subseteq M_n(J)$ αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή στο $n$, με βάση τη συμπερίληψη $M_0(I) = I \subseteq J = M_0(J)$ που μας δίνει η υπόθεση.

**11.20**. Η κλάση $\mathcal{W}$ όλων των αντικειμένων είναι μεταβατική, επειδή αν το $y$ είναι ένα αντικείμενο και $x \in y$, τότε το $x$ είναι επίσης αντικείμενο—απλά και μόνο επειδή έχουμε δεχθεί απαρχής ότι η σχέση του «ανήκειν» ορίζεται ανάμεσα σε ζεύγη αντικειμένων· και είναι κόσμος του Zermelo, αφού δεχθήκαμε για αυτήν όλες τις συνθήκες που απαιτούνται από ένα κόσμο του Zermelo—ότι περιέχει το δισύνολο $\{x, y\}$ οποιωνδήποτε αντικειμένων του $x$, $y$, την ένωση $\bigcup X$ και το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ κάθε μέλους του που είναι συνόλο, καθώς επίσης και ένα σύνολο $I$ που ικανοποιεί το Αξίωμα του Απείρου, έτσι που το $\mathbb{N}_0$ μπορεί να κατασκευαστεί χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες κλειστότητας του $\mathcal{W}$, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος **5.4**.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, παρατήρησε ότι $\mathbb{N}_0 \subseteq M$, αφού το $M$ είναι μεταβατικό και περιέχει το $\mathbb{N}_0$, και τώρα $\emptyset \in M$, αφού $\emptyset \in \mathbb{N}_0$. Επιπλέον, αν $A \in M$, τότε $\mathcal{P}(A) \in M$ και έτσι $\mathcal{P}(A) \subseteq M$, που σημαίνει ότι κάθε υποσύνολο του $A$ είναι στο $M$.

**11.22**. Το σύστημα Peano που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος **5.4** είναι μέλος κάθε κόσμου $M$ του Zermelo, αφού από την Πρόταση **11.21**, το $M$ είναι κλειστό για όλους τους τελεστές που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη αυτή για την κατασκευή του.

**11.24**. Από το Αξίωμα Επιλογής, η υπόθεση του (11-24) συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποια $f : A \to B$ τέτοια που για κάθε $x \in A$, $P(x, f(x))$. Όμως ο συναρτησιακός χώρος $(A \to B) \in M$, και έτσι $f \in M$ αφού ο $M$ είναι μεταβατικός.

**11.27**. Δεν μπορεί να ξεκινάει μια φθίνουσα $\in$-αλυσίδα με το $x$ αν το $x$ δεν έχει μέλη, και ακριβώς για αυτό τα άτομα και το $\emptyset$ είναι εδραιωμένα. Όσον αφορά το $\mathbb{N}_0$, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αποτελεί σύστημα Peano με $0 = \emptyset$ και $Sm = \{m\}$, και δείχνουμε με επαγωγή πως για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, δεν υπάρχει άπειρη, φθίνουσα $\in$-αλυσίδα που να ξεκινάει με το $m$: αυτό είναι προφανές αν $m = 0$, επειδή $0 = \emptyset$, και αν αληθεύει για το $m$, τότε αληθεύει και για το $Sm = \{m\}$, για το οποίο μια τέτοια αλυσίδα θα πρέπει να ξεκινάει με το

$$\{m\} \ni m \ni \cdots$$

και αυτόματα έχουμε μια αλυσίδα που αρχίζει με το $m$.

Αν το $A$ είναι εδραιωμένο, τότε εδραιωμένο είναι και κάθε $x \in A$: επειδή αν η $x \ni x_1 \ni \cdots$ ήταν μια άπειρη, φθίνουσα $\in$-αλυσίδα με αρχή κάποιο $x \in A$, τότε η $A \ni x \ni x_1 \ni \cdots$ θα ήταν άπειρη, φθίνουσα $\in$-αλυσίδα με αρχή το $A$· και αντίστροφα, αν κάθε μέλος του $A$ είναι εδραιωμένο, τότε δεν μπορεί να υπάρχει αλυσίδα $A \ni x_1 \ni \cdots$, γιατί η «ουρά» της $x_1 \ni \cdots$ θα φαναίρωνε ότι το $x_1$ δεν είναι εδραιωμένο.

Ομοίως, αν το $A$ είναι εδραιωμένο, τότε και το $\mathcal{P}(A)$ είναι εδραιωμένο: επειδή οποιαδήποτε αλυσίδα $\mathcal{P}(A) \ni X \ni x_1 \ni \cdots$ θα γεννούσε μια αλυσίδα $x_1 \ni \cdots$ με αρχή $x_1 \in A$· και αντίστροφα, αν το $\mathcal{P}(A)$ είναι εδραιωμένο, τότε εδραιωμένο είναι και το $A$, επειδή οποιαδήποτε αλυσίδα $A \ni x_1 \ni \cdots$ με αρχή το $A$ θα γεννούσε μια αλυσίδα $\mathcal{P}(A) \ni A \ni x_1 \ni \cdots$ με αρχή το $\mathcal{P}(A)$.

Τέλος, η κλάση όλων των εδραιωμένων συνόλων είναι μεταβατική, επειδή και πάλι, όλα τα στοιχεία ενός εδραιωμένου συνόλου είναι εδραιωμένα.

**12.2**. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f : A \to B$, η εικόνα $f[\emptyset]$ του κενού είναι κενή· το ίδιο και για τη $\mathbf{v}_U : U \twoheadrightarrow \mathrm{ord}(U)$, μιας και το $0_U$ δεν έχει προηγούμενους,

$$\mathbf{v}_U(0_U) = \mathbf{v}_U[\{y \in U \mid y < 0_U\}] = \mathbf{v}_U[\emptyset] = \emptyset.$$

Από τον ορισμό του επομένου $U$,

$$y <_U S(x) \iff y <_U x \vee y = x,$$

και με αυτό υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_U(S(x)) &= \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U S(x)\}\\ &= \{\mathbf{v}_U(y) \mid y <_U x\} \cup \{\mathbf{v}_U(x)\}\\ &= \mathbf{v}_U(x) \cup \{\mathbf{v}_U(x)\}.\end{aligned}$$

**12.3**. Αν $0_U$ ελάχιστο στο $U$, τότε $0_U <_U x$, και έτσι $\emptyset = \mathbf{v}_U(0_U) \in \mathbf{v}_U(x)$. Αν $\alpha \in \mathbf{v}_U(x)$, τότε $\alpha = \mathbf{v}_U(y)$, για κάποιο $y <_U x$· όμως τότε το $y$ έχει επόμενο $S(y) <_U x$, αφού το $x$ είναι οριακό σημείο, $\mathbf{v}_U(S(y)) \in \mathbf{v}_U(x)$, από τον ορισμό, και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση **12.2**,

$$\mathbf{v}_U(S(y)) = \mathbf{v}_U(y) \cup \{\mathbf{v}_U(y)\} = \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathbf{v}_U(x).$$

**12.4**. Έστω

$$G = \{X \mid \emptyset \in X \,\&\, (\forall \alpha \in X)[\alpha \cup \{\alpha\} \in X]\}.$$

Το $\omega_U$ είναι οριακό, άρα $\mathbf{v}_U(\omega_U) \in G$ από την Άσκηση **12.3**, και ειδικότερα, το $G$ είναι μη κενή κλάση. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει $X \in G$ με $\mathbf{v}_U(\omega_U) \not\subseteq X$· έστω $y$ το ελάχιστο του $U$ τέτοιο που $\mathbf{v}_U(y) \notin X$. Τώρα, το $y$ δεν είναι το ελάχιστο του $U$, μιας και $\mathbf{v}_U(0_U) = \emptyset \in X$, από την υπόθεση για το $X$. Επίσης το $y$ δεν είναι οριακό σημείο του $U$, αφού $y < \omega_U$· άρα $y = S(x)$ για κάποιο $x \in U$, $\mathbf{v}_U(x) \in X$, από την επιλογή του $y$, και $\mathbf{v}_U(y) = \mathbf{v}_U(x) \cup \{\mathbf{v}_U(x)\} \in X$ από την υπόθεση για το $X$, που αντιτίθεται στην επιλογή του $y$.

**12.6**. Αν η $\pi : U \rightarrowtail V$ είναι αρχική ομοιότητα, τότε, αμέσως από το Λήμμα **12.5**,

$$\mathrm{ord}(U) = \{\mathbf{v}_U(x) \mid x \in U\} = \{\mathbf{v}_V(\pi(x)) \mid x \in U\} \subseteq \mathrm{ord}(V).$$

**12.8**. Αν ο $U = \mathrm{Succ}((\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}))$ είναι ο επόμενος καλά διατεταγμένος χώρος του $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ με το νέο $t$ στην κορυφή, τότε $t = \omega_U$, $\mathbb{N} = \mathbf{seg}_U(t)$ και $\mathrm{ord}(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}) = \mathbf{v}_U(t) = \omega$. Τα υπόλοιπα έπονται άμεσα από την Άσκηση **12.2**.

**12.10**. Ο ισχυρισμός είναι ότι $\mathrm{ord}(\alpha, \leq_\alpha) = \alpha$, και η απόδειξη είναι ως εξής: αν $\alpha = \mathrm{ord}(U)$, τότε $(\alpha, \leq_\alpha) =_o U$ από το Λήμμα **12.9**, και έτσι από την Άσκηση **12.6**

$$\mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(U) = \alpha.$$

**12.13**. Αν $U =_o V$, τότε $\mathrm{ord}(U) \sqsubseteq \mathrm{ord}(V)$ και $\mathrm{ord}(V) \sqsubseteq \mathrm{ord}(U)$ από την (12-13), άρα $\mathrm{ord}(U) = \mathrm{ord}(V)$.

Για το δεύτερο ισχυρισμό, αν $U =_o \alpha$ και $U =_o \beta$, τότε $\alpha =_o \beta$, και με την Άσκηση 12.10, $\alpha = \mathrm{ord}(\alpha) = \mathrm{ord}(\beta) = \beta$.

**12.16**. Αν το $\beta$ είναι το ελάχιστο μέλος του $\mathcal{E}$, τότε $\beta \leq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{E}$, έτσι που από το Λήμμα **12.9**, $\beta \subseteq \alpha$· άρα $\beta \subseteq \bigcap \mathcal{E}$. Από την άλλη μεριά, αν $\gamma \in \beta$, τότε $\gamma < \beta$, άρα $\gamma < \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{E}$, δηλαδή, $\gamma \in \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{E}$, δηλαδή $\gamma \in \bigcap \mathcal{E}$· έπεται ότι $\gamma \in \beta \Longrightarrow \gamma \in \bigcap \mathcal{E}$, δηλαδή, $\beta \subseteq \bigcap \mathcal{E}$.

**12.20**. Για τον επόμενο μερικά διατεταγμένο χώρο $\mathrm{Succ}(\alpha)$ προσθέτουμε ένα νέο στοιχείο $r \notin \alpha$ στο πεδίο $\alpha$ πάνω από όλα τα μέλη του $\alpha$. Έστω $\pi : \alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\} \to \mathrm{Succ}(\alpha)$ με

$$\pi(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \alpha, \\ r, & \text{αλλιώς (δηλαδή αν } x = \alpha). \end{cases}$$

Έπεται άμεσα ότι η $\pi$ είναι ομοιότητα, έτσι που $\alpha + 1 =_0 \mathrm{Succ}(\alpha)$, και άρα $\alpha + 1 = \mathrm{ord}(\alpha + 1) = \mathrm{ord}(\mathrm{Succ}(\alpha))$.

**12.21**. Αυτή είναι μια παραλλαγή της προηγούμενης Άσκησης **12.20**. Από τον ορισμό του αθροίσματος μερικά διατεταγμένων χώρων στο **7.37**, έχουμε

$$\alpha +_o \beta = (\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta, \leq),$$

όπου η διάταξη $\leq$ ορίζεται χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της διάταξης στους διατακτικούς, ως εξής:

$$(i, x) \leq (j, y) \iff i < j \vee [i = j \,\&\, [x = y \vee x \in y]].$$

Σταθεροποιούμε ένα $\alpha$, και για κάθε $\beta$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\pi_\beta : \alpha +_o \beta \to \mathrm{ON}$$

με

$$\pi_\beta(0, x) = x, \quad \pi_\beta(1, y) = \alpha + y\cdot$$

με διατακτική επαγωγή στο $\beta$ δείχνουμε ότι *η $\pi_\beta$ είναι ομοιότητα του $\alpha +_o \beta$ με το $\alpha + \beta$*, έτσι που

$$\mathrm{ord}(\alpha +_o \beta) = \mathrm{ord}(\alpha + \beta) = \alpha + \beta.$$

Στη βάση $\beta = 0$, $\alpha +_o 0 = (\{0\} \times \alpha, \leq)$, έτσι που $\pi_0(0, x) = x$ και αυτή είναι προφανώς ομοιότητα του $\alpha +_o 0$ με το $\alpha + 0 = \alpha$.

Για το επαγωγικό βήμα, αν $\beta = \gamma + 1$, τότε έχουμε το ζητούμενο από την προηγούμενη Άσκηση **12.20**.

Τελικά, για το επαγωγικό βήμα όταν ο $\beta$ είναι οριακός διατακτικός, η επαγωγική υπόθεση μας βεβαιώνει ότι για κάθε $\gamma < \beta$, η συνάρτηση $\pi_\gamma$ είναι ομοιότητα του $\alpha +_o \gamma$ με τον $\alpha + \gamma$. Είναι προφανές από τον ορισμό των συναρτήσεων αυτών ότι

$$\gamma < \delta < \beta \Longrightarrow \pi_\gamma \subseteq \pi_\delta\cdot$$

και από αυτό παίρνουμε εύκολα ότι η ένωση

$$\pi_\beta = \bigcup\nolimits_{\gamma < \beta} \pi_\gamma$$

είναι ομοιότητα του $\alpha +_o \beta$ με το $\alpha + \beta$, που είναι το ζητούμενο.

Τα αποτελέσματα για την προσεταιριστικότητα και τη (μη) μεταθετικότητα συνάγονται από τα προβλήματα του Κεφαλαίου **7**, και ιδιαίτερα από το Πρόβλημα **x7.4**.

Τέλος, η (12-26) έπεται επίσης από το βασικό μέρος της άσκησης, μιας και αν η $\pi : \beta \rightarrowtail \gamma$ είναι αρχική ομοιότητα του $\beta$ επί κάποιου αρχικού τμήματος του $\gamma$, τότε η συνάρτηση

$$\rho((i,x)) = \begin{cases} (i,x), & \text{αν } i = 0, \\ (i,\pi(x)), & \text{αν } i = 1 \end{cases}$$

είναι εύκολα αρχική ομοιότητα του $\alpha +_o \beta$ επί κάποιου γνήσιου, αρχικού τμήματος του $\alpha +_o \gamma$.

**12.22**. Από τον ορισμό,

$$\alpha \cdot_o \beta = (\alpha \times \beta, \leq),$$

όπου $\leq$ η "αντίστροφη λεξικογραφική" διάταξη ζευγών,

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \iff y_1 < y_2 \vee [y_1 = y_2 \,\&\, x_1 \leq x_2].$$

Θα δείξουμε μια διαφορετική μέθοδο από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη άσκηση: για κάθε σταθερό $\alpha$, δείχνουμε με διατακτική επαγωγή στο $\beta$, ότι

$$\alpha \cdot_0 \beta =_0 \alpha \cdot \beta,$$

κάτι που μας δίνει αυτό που θέλουμε αν πάρουμε διατακτικούς και στις δύο μεριές.

Στη βάση $\beta = 0$, έχουμε ότι το $\alpha \cdot_o 0$ είναι ο κενός χώρος, $\alpha \cdot 0 = 0 = \emptyset$, οπότε έχουμε κυριολεκτικά ισότητα.

Για το επαγωγικό βήμα του επομένου, $\beta = \gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\}$, έτσι που

$$\alpha \times \beta = (\alpha \times \gamma) \cup (\alpha \times \{\gamma\}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$(\alpha \times \gamma) \cap (\alpha \times \{\gamma\}) = \emptyset,$$

μιας και τα ζεύγη $(x, \gamma)$ στο δεύτερο μέρος έχουν δεύτερο μέλος $\gamma$, ενώ κάθε ζεύγος $(x, y)$ στο πρώτο μέρος έχει δεύτερο μέλος κάποιο $y < \gamma$. Επιπλέον,

$$(\{(x,\gamma) \mid x \in \alpha\}, \leq) =_o \alpha$$

από την τετριμμένη ομοιότητα $\rho(x, \gamma) = x$, και έτσι, από τον ορισμό της πρόσθεσης μερικά διατεταγμένων χώρων,

$$\alpha \cdot_o \beta =_o \alpha \cdot_o \gamma +_o \alpha\cdot$$

όμως από την επαγωγική υπόθεση, την προηγούμενη Άσκηση **12.21** και από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού διατακτικών συνάγουμε ότι

$$\alpha \cdot_o \beta =_o \alpha \cdot \gamma + \alpha = \alpha \cdot \beta,$$

αυτό που θέλαμε.

Για την οριακή περίπτωση στο επαγωγικό βήμα, για κάθε $\gamma < \beta$ η επαγωγική υπόθεση μας δίνει μια ομοιότητα

$$\pi_\gamma : \alpha \cdot_o \gamma \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \alpha \cdot \gamma,$$

η οποία είναι αρχική ομοιότητα του $\alpha \cdot_o \gamma$ στο $\alpha \cdot \beta$ επειδή $\alpha \cdot \gamma \leq \alpha \cdot \beta$, έτσι που το $\alpha \cdot \gamma$ είναι αρχικό τμήμα του $\alpha \cdot \beta$. Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι αν οι $U$, $V$ είναι καλά διατεταγμένοι χώροι με $U \leq_o V$, τότε υπάρχει ακριβώς μια αρχική ομοιότητα $\pi : U \rightarrowtail V$ από το Πρόβλημα **x7.13**. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό σημαίνει ότι

$$\delta < \gamma < \beta \Longrightarrow \pi_\beta \restriction \gamma = \pi_\gamma,$$

δηλαδή οι αρχικές αυτές ομοιότητες «συμπίπτουν», έτσι που η ένωσή τους είναι αρχική ομοιότητα του $\alpha \cdot_o \beta$ με το $\alpha \cdot \beta$,

$$\cup\{\pi_\gamma \mid \gamma < \beta\} = \pi : \alpha \cdot_o \beta \rightarrowtail \alpha \cdot \beta.$$

Όμως η $\pi$ είναι επί του $\alpha \cdot \beta$ αφού

$$\alpha \cdot \beta = \bigcup\nolimits_{\gamma<\beta} \alpha \cdot \gamma$$

από τον ορισμό του διατακτικού πολλαπλασιασμού, και άρα η $\pi$ είναι ομοιότητα και έτσι φτάνουμε στο ζητούμενο $\alpha \cdot_o \beta =_o \alpha \cdot \beta$.

Τα αποτελέσματα για την προσεταιριστικότητα και τη (μη) μεταθετικότητα έπονται πλέον από τα Προβλήματα **x7.9** και **x7.8**.

Τέλος, αν η $\pi : \beta \rightarrowtail \gamma$ είναι γνήσια αρχική ομοιότητα, τότε (εύκολα) το ίδιο είναι και η συνάρτηση $\rho : \alpha \cdot_o \beta \rightarrowtail \alpha \cdot_o \gamma$ με τύπο

$$\rho(x, y) = (x, \pi(y)),$$

που μας δίνει το ζητούμενο $\alpha \cdot_o \beta <_o \alpha \cdot_o \gamma$.

*Σημείωση.* Ένας άλλος τρόπος να αποδείξουμε το βασικό μέρος της Άσκησης είναι να δείξουμε κατευθείαν ότι για όλα τα $\alpha$, $\beta$, η απεικόνιση

$$\pi(x, y) = x \cdot y \quad ((x, y) \in \alpha \times \beta)$$

είναι ομοιότητα του $\alpha \cdot_o \beta$ με το $\alpha \cdot \beta$. Η απόδειξη (με διατακτική επαγωγή στο $\beta$) είναι παρόμοια με αυτή που μόλις δώσαμε, αν και χρειάζεται ένα κάπως πιο λεπτομερές «κυνήγι» ομοιοτήτων.

**12.23**. Δείχνουμε το ζητούμενο με διατακτική επαγωγή στο $\gamma$, ταυτόχρονα για όλα τα $\alpha$ και $\beta$: δηλαδή, αποδείχνουμε με επαγωγή στο $\gamma$ ότι

$$(\forall \alpha, \beta)[\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma].$$

Η βάση $\gamma = 0$ είναι τετριμμένη.

Για $\gamma = \delta + 1$, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta + (\delta + 1)) &= \alpha \cdot ((\beta + \delta) + 1) \\
&= \alpha \cdot (\beta + \delta) + \alpha \quad &&(\text{ορισμός του } \cdot) \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta + \alpha &&(\text{επαγωγική υπόθεση}) \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (\delta + 1).
\end{aligned}$$

Τέλος, για οριακό $\gamma$, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\text{ο } \bigcup_{\eta<\gamma}\{\beta+\eta\} \text{ είναι οριακός διατακτικός,}$$

αφού για κάθε $\eta < \gamma$ υπάρχει $\zeta$ έτσι ώστε $\eta < \zeta < \gamma$, και τότε $\beta + \eta < \beta + \zeta$ από τη (12-26). Με αυτό διαχωρίζουμε περιπτώσεις στον ορισμό του πολλαπλασιασμόυ, και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta+\gamma) &= \alpha \cdot (\textstyle\bigcup_{\eta<\gamma}\{\beta+\eta\}) \\
&= \textstyle\bigcup_{\eta<\gamma}\{\alpha \cdot (\beta+\eta)\} \\
&= \textstyle\bigcup_{\eta<\gamma}\{\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\eta\} \quad && \text{(επαγωγική υπόθεση)} \\
&= \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma && \text{(ορισμός του +),}
\end{aligned}$$

όπου για το τελευταίο χρησιμοποιήσαμε τη (12-27) για να συμπεράνουμε ότι αν $\eta < \zeta < \gamma$, τότε $\alpha \cdot \eta < \alpha \cdot \zeta < \alpha \cdot \gamma$, έτσι που ο $\alpha \cdot \gamma$ είναι οριακός διατακτικός και $\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\eta<\gamma} \alpha \cdot \eta$.

**12.26**. Δεχόμαστε ότι $\kappa = (\mu\xi \in \mathrm{ON})[\xi =_c A]$, και υποθέτουμε προς άτοπο, ότι $\kappa =_c \alpha$ για κάποιο $\alpha < \kappa$· όμως τότε $A =_c \alpha < \kappa$, που αντιτίθεται στον ορισμό του $\kappa$. Για το αντίστροφο (και τον δεύτερο ισχυρισμό), αν το $\kappa$ δεν είναι ισοπληθικό με κανένα $\alpha < \kappa$, τότε, $\kappa = |\kappa|$, αφού $\kappa =_c \kappa$, και άρα $\kappa \in \mathrm{Card}_v$.

**12.27**. Αν $A =_c B$, τότε, για όλα τα $\xi \in \mathrm{ON}$,

$$A =_c \xi \iff B =_c \xi,$$

και έτσι $(\mu\xi \in \mathrm{ON})[A =_c \xi] = (\mu\xi \in \mathrm{ON})[B =_c \xi]$. Η τρίτη ιδιότητα των ισχυρών τελεστών πληθικότητας είναι τετριμμένη αν δεχτούμε το Αξίωμα Αντικατάστασης: τότε η $\{|X| \mid X \in \mathcal{E}\}$ είναι η εικόνα του $\mathcal{E}$ από τον οριστικό τελεστή $X \mapsto |X|$, και άρα είναι σύνολο.

**12.30**. Αν ισχύει το **AC**, τότε κάθε σύνολο είναι ισοπληθικό με κάποιον διατακτικό $\lambda$, και τότε ο $|A|$ είναι εξ ορισμού πληθάριθμος von Neumann. Αντίστροφα, αν $|A| = \aleph_\alpha$, τότε $A =_c \aleph_\alpha$, και έτσι το $A$ είναι καλά διατάξιμο.

**12.31**. Αν δεχτούμε το **AC**, η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς είναι ο ισχυρισμός ότι για κάθε άπειρο πληθάριθμο $\kappa$,

$$|\mathcal{P}(\kappa)| = 2^\kappa = \kappa^+,$$

που είναι ακριβώς η εξίσωση που θέλουμε να δείξουμε αφού οι πληθάριθμοι είναι ακριβώς τα άλεφ και $\aleph_\alpha^+ = \aleph_{\alpha+1}$.